Übungen Wahrscheinlichkeitstheorie
Blatt 8
WS 2017/2018
Abgabe: Übung am 08.01.2018

1. (4 Punkte)
Gegeben seien Zufallsvariablen X und X_n, $n \in \mathbb{N}$, die Werte in den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ annehmen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $X_n \to X$ in Verteilung für $n \to \infty$

(ii) $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$

2. (6 Punkte)
Seien $A, A_1, A_2, \cdots$ Mengen und $\mathbb{1}_B(x)$ bezeichne die Indikatorfunktion auf einer Menge B. Definiere weiterhin $A_* := \liminf_{n\to\infty} A_n$ und $A^* := \limsup_{n\to\infty} A_n$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{1}_{A_*} = \liminf_{n\to\infty}(\mathbb{1}_{A_n}) \quad \text{und} \quad \mathbb{1}_{A^*} = \limsup_{n\to\infty}(\mathbb{1}_{A_n})$$

gelten.

(b) Zeigen Sie: Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und $A_n \in \mathcal{A}$ für alle n, so gilt $A_* \in \mathcal{A}$ und $A^* \in \mathcal{A}$.

3. (4 Punkte)
Sei $X_0, X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger, integrierbarer Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $\mathbb{E}(X_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Es bezeichne $\mathcal{F}_n = \sigma_\Omega(X_0, \ldots, X_n)$ die von den Zufallsvariablen $X_0, \ldots, X_n$ erzeugte σ-Unteralgebra von $\mathcal{F}$ (über Ω).

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration von $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und dass

$$S_n := X_0 + X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

an $\mathcal{F}_n$ adaptiert ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bzgl. der Filtration $\mathcal{F}_n$ ist.

4. (2 Punkte)
Wir werfen einen fairen Würfel so oft, bis zum ersten Mal eine 5 oder 6 eintritt. N sei die Anzahl der bis dahn benötigten Würfe und X die Anzahl gerader Augenzahl unter den Würfen 1 bis N. Berechnen Sie $\mathbb{E}(X|N)$ und $\mathbb{E}(X)$.