

Übungen Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 9

WS 2017/2018

Abgabe: Übung am 15.01.2018

1. Sei $X_0, X_1, \dots$ eine Folge integrierbarer Zufallsvariablen. Setze $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$ und betrachte die Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$.

(a) Es gelte

$$E(X_0) = 0; \quad E(X_{n+1} \mid X_0, X_1, \dots, X_n) = 0 \text{ f.s.}$$

Zeigen Sie, dass $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Martingal bzgl. $\mathcal{F}_n$ ist.

(b) Nun gelte

$$E(X_0) \geq 0; \quad E(X_{n+1} \mid X_0, X_1, \dots, X_n) \geq 0 \text{ f.s.}$$

Zeigen Sie, dass $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bzgl. $\mathcal{F}_n$ ein Submartingal ist.

2. Gegeben sei ein Martingal $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Außerdem sei eine an die Filtration $\mathcal{F}_n$ adaptierte Folge $Y_1, Y_2, \dots$ von beschränkten Zufallsvariablen gegeben (d.h. Y_n ist $\mathcal{F}_n$ -messbar).

Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned} Z_0 &:= X_0 \\ Z_1 &:= X_1 \\ Z_{n+1} &:= Z_n + Y_n(X_{n+1} - X_n) \end{aligned}$$

ein Martingal bzgl. $\mathcal{F}_n$ definiert wird.

3. Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $X_1 \sim N(0, 1)$. Wir setzen

$$S_n = X_1 + \dots + X_n; \quad S_0 = 0$$

und

$$Y_n = \exp\left(S_n - \frac{n}{2}\right)$$

Zeigen Sie, dass $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bzgl. der Filtration

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n); \quad \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

ein Martingal ist.

4. Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $X_1 \sim N(0, 4)$.

Gesucht sind Konstanten $c_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} Y_0 &= 1 \\ Y_n &= e^{X_1 + \dots + X_n - c_n}, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

ein Martingal ist bzgl. der Filtration $\sigma(X_1, \dots, X_n)$.