Funktionentheorie, Übungsblatt 1

(1) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von

$$\frac{i-1}{i+1},\ \frac{3+4i}{1-2i},\ \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n,\ \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

(2) Schraffieren Sie in der komplexen Zahlenebene das Bild von

$$\{z = x + iy : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi\}$$

unter der Abbildung $z \mapsto e^z$.

(3) (a) Untersuchen Sie mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen die folgenden Funktionen auf komplexe Differenzierbarkeit:

$$z \mapsto z^2, \quad z \mapsto zRe(z), \quad z \mapsto \overline{z}, \quad z \mapsto z\overline{z}.$$

(b) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und nimmt nur reelle Werte an, dann ist f konstant.

(4) (a) Für welche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist

$$h(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

eine harmonische Funktion (in den reellen Variablen x, y)?

(b) Bestimmen Sie in diesem Fall alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $Re(f)(x + iy) = h(x, y)$.