WS 2018/2019 Prof. Schürmann

Funktionentheorie, Übungsblatt 2

(1) Wiederholung aus der Analysis: Man formuliere und beweise die so genannte Cauchy-Hadamard-Formel für den Konvergenzradius einer Potenzreihe. Was ändert sich, wenn man komplexe statt reelle Potenzreihen betrachtet ?

(2) Komplexe Sinusfunktion. Zeigen Sie:
 (a) $\lim_{t\to\infty} |\sin(z+it)| = \infty$ für alle $z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$.
 (b) sin hat nur reelle Nullstellen.
 (c) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $\sin z$ reell?

(3) (a) Entwickeln Sie die Funktion $\frac{1}{1+z^2}$ in eine Potenzreihe um die reelle Zahl a. Wie lautet die allgemeine Formel für die Koeffizienten der Potenzreihe?
 (b) Welcher Konvergenzradius ergibt sich um $a = 0$? Was geschieht am Rand?

(4) (a) Zeigen Sie, dass die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{1-z^n}$$
in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ normal konvergiert.

 (b) Zeigen Sie, dass die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n}$$
in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$ lokal gleichmäßig, aber nicht normal konvergiert.