WS 2018/2019 Prof. Schürmann

Funktionentheorie, Übungsblatt 3

(1) Zeigen Sie: Ist f eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion mit

$$|f(z)| \leq C|z|^n \text{ für alle } |z| \geq R$$

für geeignete $n \in \mathbb{N}, C, R \in \mathbb{R}, C > 0$, dann ist f ein Polynom höchstens n-ten Grades.

(2) Sei f ein ganze Funktion, so dass für jede Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \ (a \in \mathbb{C})$$

mindesten ein Koeffizient 0 ist. Man zeige: f ist ein Polynom.

(3) Man bestimme alle ganzen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

(a) $f(0) = 1, f'(z) = z + 2f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) $f(f(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}, f(0) = 0$ und $f^{(1)}(0) > 0$.

(4) Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Seien $f, g : G \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen. Es gelte $f(z)g(z) = 0$ für alle $z \in G$.
Zeigen Sie: $f = 0$ oder $g = 0$.