

Funktionentheorie, Übungsblatt 4

- (1) Zeigen Sie für die komplexe Sinusfunktion:
- (a) $\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist surjektiv.
 - (b) $\sin \upharpoonright \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}\}$ ist injektiv.
- (2) Gibt es auf dem Einheitskreis $K_1(0)$ eine holomorphe Funktion mit
- (a) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$, $f(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$?
 - (b) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2} = f(-\frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$?
- (3) Die ganze Funktion f erfülle für (über $\mathbb{R}$!) linear unabhängige Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ die Gleichungen
- $$f(z+x) = f(z) = f(z+y), \quad z \in \mathbb{C}.$$
- Zeigen Sie, dass f konstant ist.
- (4) (a) Zeigen Sie: Es gibt keine in einer Umgebung von Null holomorphe Funktion $\sqrt{z}$ (also eine Funktion, deren Quadrat z ist).
- (b) Definieren Sie $\sqrt{z}$ als holomorphe Funktion auf einem möglichst großen Gebiet.