TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

Differentialformen, Integralsatz von Stokes und deren Anwendung in der Elektrodynamik

Bachelorarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science

vorgelegt von

Philipp Varšo
geboren am 15.04.1985 in Dresden

Institut für Geometrie
der Technischen Universität Dresden
2013

Eingereicht am 15.10.2013

1. Gutachter: Prof. Dr. Ulrich Brehm
2. Gutachter: Dr. Felipe Leitner

Kurzdarstellung

Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind von großem Interesse für die theoretische Physik, wie etwa in der Allgemeinen Relativitätstheorie oder der Quantenfeldtheorie auf einer gekrümmten Raumzeit. In dieser Arbeit soll das Verhalten von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten untersucht werden. Darüber hinaus wird die Integrationstheorie von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten vorgestellt. Die Darstellung dieser Sachverhalte findet ihre Anwendung in einer koordinatenfreien Formulierung der Maxwell-Gleichungen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Postulierung der Maxwell-Gleichungen stellt die Grundannahme zur Beschreibung von Phänomenen innerhalb der Elektrodynamik dar. Die klassische Formulierung der Maxwell-Gesetze nimmt dabei Bezug auf die Koordinaten des jeweiligen Inertialsystems, in dem diese gelten sollen. Ist man darum bestrebt, eine koordinatenfreie Formulierung der Maxwell-Gleichung anzugeben, so bedient man sich dabei der Theorie von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten. Manche Observablen der Elektrodynamik sind durch Integration gewisser Grundgrößen definiert. Daher ist die Etablierung einer Integrationstheorie für Differentialformen unerlässlich, um einen koordinatenfreien Formalismus der Elektrodynamik zu erhalten. Die Integrationstheorie von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand findet ihr wichtigstes Resultat in dem Integralsatz von Stokes.

In dieser Arbeit wird vorausgesetzt, dass eine gewisse Grundvertrautheit mit gängigen Konzepten der Differentialgeometrie besteht, wie sie etwa in Einführungsvorlesungen zu diesem Themengebiet gelehrt werden. In den ersten drei Kapiteln dieser Arbeit werden die Grundlagen zum Verständnis von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten gelegt. Darauf aufbauend wird die Integrationstheorie auf orientierten, kompakten Mannigfaltigkeiten mit Rand entwickelt. Dazu muss erklärt werden, wie es möglich ist, einen Orientierungsbegriff auf einer Mannigfaltigkeit einzuführen. Dies soll im vierten Kapitel geschehen. Darauf folgt eine Diskussion von Mannigfaltigkeiten mit Rand. Die Darstellung führt im sechsten Kapitel auf den Integralsatz von Stokes. Im siebten Kapitel der Arbeit werden die Grundzüge Riemannscher und pseudo-Riemannscher Mannigfaltigkeiten vorgestellt. Im Speziellen wird hier der Hodge-$*$-Operator und die Koableitung eingeführt.

Die Auswahl der vorgestellten Themen ist so gestaltet, dass es möglich ist, aus der allgemeinen Theorie heraus, die Maxwell-Gleichungen in ihrer klassischen Formulierungen als einen Spezialfall zu verstehen. Dies soll im achten Kapitel vollzogen werden und darüber hinaus wird die Lorentz-Invarianz der Maxwell-Gleichungen gezeigt. Hat man die klassischen Maxwell-Gleichungen als einen Spezialfall verstanden, so ist man im Stande eine sofortige Verallgemeinerung anzugeben. Der mögliche Gewinn könnte darin bestehen, eine „geometrisierte“ Fassung der Elektrodynamik vorliegen zu haben. Ist demnach der Schritt hin zu Methoden der Differentialgeomtrie vollzogen, so gelingt es, die Maxwell-Gleichungen und damit die Elektrodynamik in bestehende Theorien der modernen Physik „einzubetten“. Dies bezieht sich etwa auf einen einheitlichen, zugrunde liegenden differentialgeometrischen Formalismus, wie er etwa in der Allgemeinen Relativitätstheorie oder in Eichtheorien der Teilchenphysik verwendet wird.

Auch wenn die Arbeit im Titel einen Hinweis auf Anwendung in der Physik trägt, so dient dies lediglich zur Motivation, allgemeingültige, differentialgeometrische Methoden vorzustellen. Die differentialgeometrische Formulierung der Maxwell-Gleichungen ist daher höchstens als Richtungsweisung zu verstehen, denn der Integralsatz von Stokes ist von ganz eigener, wichtiger Bedeutung für die Differentialgeometrie. Insofern ist die vorliegende Arbeit um eine gewisse Allgemeingültigkeit in ihren Aussagen bemüht und die Maxwell-Gleichungen sollen tatsächlich nur als ein mathematischer Spezialfall verstanden werden.

Ist man ausschließlich an einer differentialgeometrischen Fassung der Maxwell-Gleichungen interessiert, dann reicht es aus, sich ein gewisses Grundwissen über Differentialformen aus den ersten drei Kapiteln der Arbeit anzueignen und Teile des vierten Kapitels zu verstehen, damit die Einführung der Riemannschen Volumenform im siebten Kapitel sinnvoll ist. Die wichtigsten Resultate, zum Verständnis der koordinatenfreien Formulierung der Maxwell-Gleichungen, liegen im siebten Kapitel begründet. Damit dringt man ganz ohne den Integralsatz von Stokes zu diesem Ergebnis vor. Der Integralsatz von Stokes wird erst für die klassischen Integralsätze wichtig.

1 Tensoren auf Vektorräumen

Ein wesentliches Merkmal der Theorie glatter Mannigfaltigkeiten besteht darin, Konzepte der linearen Algebra *lokal einzubetten*. Damit soll gemeint sein, dass für Mannigfaltigkeiten der zugehörige Tangentialraum stets ein Vektorraum ist. Hat man also den Tensorbegriff auf einem Vektorraum V etablieren können, so kann der Tangentialraum die Rolle von V annehmen. Unter Verwendung der Eigenschaften eines Vektorbündels ist damit die Möglichkeit geschaffen, *Tensorfelder* oder spezieller *Differentialformen* auf einer Mannigfaltigkeit zu erklären, was in Abschnitt 7.1 und Kapitel 2 näher untersucht wird.

Im Folgenden soll näher auf den Begriff multilinearer Funktionen und deren Eigenschaften eingegangen werden. Die Darstellung des Sachverhaltes folgt in etwa [AMR01, Kapitel 6] und [Tu10, Kapitel 3]. Die mitunter sehr technisch anmutenden Beweise sollen auf ein Minimum reduziert sein und es wird an den entsprechenden Stellen auf die jeweilige Fachliteratur verwiesen.

1.1 Kovektoren

Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{R}$ und $L(V;W)$ bezeichne den Vektorraum aller linearen Abbildungen $f\colon V \to W$. Der Vektorraum aller reellwertigen, linearen Abbildungen auf V wird der *duale Raum* von V genannt und mit V^* bezeichnet:

$$V^* := L(V;\mathbb{R}). \tag{1.1}$$

Man bezeichnet die Elemente von V^* auch als *Kovektoren* von V.

Im weiteren Verlauf des Kapitels wird V als endlich dimensionaler Vektorraum vorausgesetzt. Falls $\{e_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \subseteq V$ eine Basis für V ist, dann lässt sich jedes Element v aus V eindeutig als eine Linearkombination $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$ darstellen, wobei $v^i \in \mathbb{R}$. Mit $\varepsilon^i\colon V \to \mathbb{R}$ soll die i-te Koordinatenfunktion bezeichnet werden, definiert durch

$$\varepsilon^i(v) = v^i \tag{1.2}$$

für $i \in \{1,\dots,n\}$. Mit dieser Funktionsvorschrift wird für $i,j \in \{1,\dots,n\}$ ε^i charakterisiert durch

$$\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases} \tag{1.3}$$

Satz 1.1.1 . *Die endliche Familie der Funktionen* $\{\varepsilon^i\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \subseteq V^*$ *aus* (1.2) *bildet eine Basis für* V^**. Daher gilt* $\dim V^* = \dim V$.

Beweis. [Tu10, Proposition 3.1] □

Die Basis aus Satz 1.1.1 nennt man auch die *duale Basis zu* $\{e_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$. In dieser Arbeit sollen Basiskovektoren stets mit oberen Indizes belegt werden und Komponenten eines Kovektors bezüglich einer Basis mit unteren Indizes. Entsprechendes soll für Vektoren vereinbart werden; Komponenten eines Vektors bezüglich einer Basis tragen den Index oben und Basisvektoren den Index unten. Dies hat ihren Ursprung in der Einsteinschen Summenkonvention, die in dieser Arbeit jedoch nicht verwendet wird. Summen über den jeweiligen Index werden stets kenntlich gemacht.

Ein wichtiges Hilfsmittel in der Charakterisierung von Tensoren ist der zweite duale Raum $V^{**} = (V^*)^*$. Jeder Vektorraum kann auf natürliche Weise mit seinem zweiten Dual identifiziert werden; für jeden Vektor $v \in V$ definiere man ein lineares Funktional $\xi(v)\colon V^* \to \mathbb{R}$ durch

$$\xi(v)(\omega) = \omega(v) \quad \text{für } \omega \in V^*. \tag{1.4}$$

Es ist offensichtlich, dass $\xi(v) \in V^{**}$ und dass die Abbildung $\xi\colon V \to V^{**}$ linear ist. Damit kann man nun folgendes Resultat beweisen:

Satz 1.1.2 . *Für jeden endlich dimensionalen Vektorraum V ist die Abbildung $\xi\colon V \to V^{**}$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Da $\dim V = \dim V^{**}$ muss lediglich gezeigt werden, dass ξ injektiv ist. Da ξ eine lineare Abbildung ist, ist sie durch Wirkung auf die Basiselemente aus der endlichen Familie $\{e_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}} \subseteq V$ eindeutig bestimmt. Sei daher $v \in V$ ungleich dem Nullelement und somit insbesondere $v = e_1$. Die duale Basis sei wie oben mit $\{\varepsilon^i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}} \subseteq V^*$ bezeichnet, dann ist $\xi(v) \neq 0$, da

$$\xi(v)(\varepsilon^1) = \varepsilon^1(v) = \varepsilon^1(e_1) = 1. \tag{1.5}$$

Entsprechendes gilt für die anderen Basiselemente. □

1.2 Multilineare Algebra

Entgegen dem Zugang beschrieben in [Lee12, Kapitel 12] soll auf die algebraische Konstruktion des Tensorproduktes von Vektorräumen hier verzichtet werden und es wird stattdessen ein eher pragmatischer Zugang gewählt, wie er etwa in [AMR01, Kapitel 6] beschrieben wird.

Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichne $V_1 \times \cdots \times V_k$ das k-fache kartesische Produkt für Vektorräume V_i über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung

$$f\colon V_1 \times \cdots \times V_k \to \mathbb{R} \tag{1.6}$$

wird *k-multilinear* genannt, sofern sie linear in jedem ihrer k Argumente ist. Der Vektorraum all jener Funktionen soll durch $L^k(V_1,\ldots,V_k;\mathbb{R})$ gekennzeichnet werden. Wie immer sei V_i, als endlich dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ vorausgesetzt. Für die folgende Definition sei daran erinnert, dass aus den Bemerkungen in [AMR01, Proposition 2.2.9] leicht einzusehender Isomorphismus hervorgeht

$$L^k(V_1,\ldots,V_k;\mathbb{R}) \cong L^k(V_{\sigma(1)},\ldots,V_{\sigma(k)};\mathbb{R}) \tag{1.7}$$

für jede Permutation σ von $\{1, \dots, k\}$.

Definition 1.2.1 . Für einen Vektorraum V setze man

$$T_s^r(V) := L^{r+s}(\underbrace{V^*, \dots, V^*}_{r\text{-fach}}, \underbrace{V, \dots, V}_{s\text{-fach}}; \mathbb{R}). \tag{1.8}$$

Elemente des Raumes $T_s^r(V)$ werden *Tensoren auf* V*, kontravariant von Ordnung* r *und kovariant von Ordnung* s oder kurz *vom Typ* (r, s) bezeichnet.

Sei $t_1 \in T_{s_1}^{r_1}(V)$ und $t_2 \in T_{s_2}^{r_2}(V)$, dann ist das *Tensorprodukt* von t_1 mit t_2 folgendermaßen als Tensor $t_1 \otimes t_2 \in T_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(V)$ erklärt

$$\begin{aligned}(t_1 \otimes t_2)&(\nu^1, \dots, \nu^{r_1}, \omega^1, \dots, \omega^{r_2}, v_1, \dots v_{s_1}, w_1, \dots, w_{s_2}) \\ &= t_1(\nu^1, \dots, \nu^{r_1}, v_1, \dots v_{s_1}) t_2(\omega^1, \dots, \omega^{r_2}, w_1, \dots, w_{s_2}).\end{aligned} \tag{1.9}$$

Aus der Multilinearität von t_1 und t_2 ist ersichtlich, dass $t_1 \otimes t_2$ selbst wieder linear von jedem Argument $\nu^i, \omega^j \in V^*$ und $v_k, w_l \in V$ abhängt und somit tatsächlich ein Element von $T_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(V)$ darstellt.

Satz 1.2.2 (Basis für Tensoren). *Sei* V *ein* n*-dimensionaler Vektorraum. Falls* $\{e_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \subseteq V$ *eine Basis für* V *ist und* $\{\varepsilon^i\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \subseteq V^*$ *die duale Basis für* V^**, dann ist*

$$\left\{ e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_s} \mid i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, n\} \right\} \tag{1.10}$$

eine Basis für $T_s^r(V)$ *und somit ist* $\dim T_s^r(V) = n^{r+s}$.

Beweis. [AMR01, Proposition 6.1.2] □

Damit kann also jeder Tensor $t \in T_s^r(V)$ geschrieben werden als

$$t = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_r,\\ j_1,\dots,j_s\in\{1,\dots,n\}}} t(\varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}) e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s} \tag{1.11}$$

mit den Koeffizienten

$$t^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} := t(\varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}). \tag{1.12}$$

Unter Verwendung der Tatsache, dass V^{**} mit V identifiziert werden kann und der Aussage aus [AMR01, Proposition 2.2.9], bestimmt man folgende Spezialfälle

$$T_0^1(V) = V, \qquad T_2^0(V) = L(V; V^*), \tag{1.13}$$
$$T_1^0(V) = V^*, \qquad T_1^1(V) = L(V; V). \tag{1.14}$$

Um später den Hodge-$*$-Operator einführen zu können, wird noch der Begriff des *assoziierten Tensors.* benötigt.

Angenommen V sei ein n-dimensionaler Vektorraum, ausgestattet mit einem inneren Produkt $\langle, \rangle = g \colon V \times V \to \mathbb{R}$ und $\{e_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \subseteq V$ sei eine Basis für V, mit zugehöriger dualer Basis $\{\varepsilon^i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$. Dann kann mit Hilfe des inneren Produkts g für beliebiges $v \in V$ folgender Isomorphismus $\hat{g}\colon V \to V^*$ etabliert werden

$$\hat{g}(v)(w) = g(v,w) \quad \text{für } w \in V. \tag{1.15}$$

Man stellt fest, dass $\hat{g}$ tatsächlich injektiv ist, denn $\hat{g}(v) = 0$ für $v \in V$ impliziert

$$0 = \hat{g}(v)(v) = \langle v, v\rangle, \tag{1.16}$$

woraus wiederum $v = 0$ folgt. Aus Dimensionsgründen ist $\hat{g}$ daher bijektiv. Für $g \in T^0_2(V)$ kann man schreiben $g = \sum_{i,j} g_{ij}\varepsilon^i \otimes \varepsilon^j$, wobei $g_{ij} = g(e_i, e_j)$. Somit gilt

$$\hat{g}(v)(w) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij} v^i w^j, \tag{1.17}$$

woraus folgt, dass der Kovektor $\hat{g}(v)$ die Darstellung

$$\hat{g}(v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij} v^i \varepsilon^j \tag{1.18}$$

besitzt. Für gewöhnlich schreibt man für die Komponenten des Kovektors $\hat{g}(v)$

$$\hat{g}(v) = \sum_{j=1}^{n} v_j \varepsilon^j, \quad \text{wobei } v_j = \sum_{i=1}^{n} g_{ij} v^i. \tag{1.19}$$

Daher sagt man auch, dass man $\hat{g}(v)$ aus v erhält, indem man den *Index erniedrigt*. Gelegentlich wird auch die Notation $v^\flat$ für $\hat{g}(v)$ verwendet.

Es soll nun die inverse Abbildung $\hat{g}^{-1}\colon V^* \to V$ betrachtet werden. Falls $[g_{ij}]$ die Matrix für g bezüglich der Basis $\{e_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ darstellt[1], dann wird die hierzu inverse Matrix durch $[g^{ij}]$ notiert. Da g ein Isomorphismus ist, existiert $[g^{ij}]$ und $[g^{ij}]$ ist somit die Matrixdarstellung von $\hat{g}^{-1}$. Man erhält also

$$\sum_{j=1}^{n} g^{ij} g_{jk} = \sum_{j=1}^{n} g_{kj} g^{ji} = \delta^i_k. \tag{1.20}$$

Wie oben stellt man fest, dass für $\omega \in V^*$, der Vektor $\hat{g}^{-1}(\omega)$ die Darstellung besitzt

$$\hat{g}^{-1}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega^i e_i, \quad \text{wobei } \omega^i = \sum_{j=1}^{n} g^{ij} \omega_j. \tag{1.21}$$

$\hat{g}^{-1}(\omega)$ wird meistens auch durch $\omega^\sharp$ notiert. Damit kann man nun, wie in der theoretischen Physik üblich, Indizes heben und senken. Sei zum Beispiel $t \in T^0_2(V)$, dann

[1] Es soll die Notation verwendet werden, dass $[A_{ij}]$ für die Matrix steht, deren (i,j)-ter Eintrag gleich A_{ij} ist, also $[A_{ij}] = (A_{ij})_{i\in\{1,\dots,k\},j\in\{1,\dots,l\}}$

definiert man den assoziierten Tensor $t' \in T^1_1(V)$ durch

$$t'(e,\alpha) = t(e,\alpha^\sharp) \quad \text{für } e \in V, \alpha \in V^*. \tag{1.22}$$

Die Komponenten sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned}(t')_i{}^j &= t'(e_i,\varepsilon^j) = t\Big(e_i,(\varepsilon^j)^\sharp\Big)\\ &= t\left(e_i,\sum_{k=1}^n((\varepsilon^j)^\sharp)^k e_k\right) = t\left(e_i,\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n g^{kl}(\varepsilon^j)_l e_k\right)\\ &= \sum_{k=1}^n g^{kj}t(e_i,e_k) = \sum_{k=1}^n g^{jk}t_{ik}.\end{aligned} \tag{1.23}$$

Man beachte die Indexstellung in $(t')_i{}^j$ im Gegensatz zu $(t')^j{}_i$, was aus $t'(\alpha,e) = t(\alpha^\sharp,e)$ hervorgeht. Im Allgemeinen muss nicht $t(e,\alpha^\sharp) = t(\alpha^\sharp,e)$ gelten, was im nächsten Abschnitt näher beleuchtet wird. Um ein tiefer gehendes Verständnis der Thematik, wie dem Heben und Senken von Indizes unter Beachtung der jeweiligen Indexposition, sei auf die reichhaltige Darstellung dieses Sachverhaltes in [Lee09, Abschnitt 7.1] und [Lee09, Abschnitt 7.6] verwiesen.

Gelegentlich wird im Folgenden einfach nur von „Tensoren“ gesprochen und man meint eigentlich damit kovariante Tensoren, um sie willkürlich gegenüber den kontravarianten auszuzeichnen. Kontravariante Tensoren spielen erst wieder bei der Behandlung von Riemannschen Mannigfaltigkeiten eine Rolle.

1.3 Symmetrische und alternierende Tensoren

Für $k \in \mathbb{N}$ sei S_k die Gruppe aller Permuationen der Menge $\{1,\dots,k\}$. Eine Permutation der Menge $A := \{1,\dots,k\}$ ist eine Bijektion $\sigma\colon A \to A$. Es sei daran erinnert, dass jede Permuation als eine Komposition von Transpositionen geschrieben werden kann. Die Transposition, welche i und j miteinander vertauscht, wird als (i,j) notiert. Darüber hinaus gilt sogar, dass jede Permutation als Komposition von Transpositionen des Types $(i,i+1)$ geschrieben werden kann. Die Transposition $(i,i+2)$ lässt sich etwa zerlegen in $(i,i+2) = (i,i+1)\circ(i+1,i+2)\circ(i,i+1)$. Somit kann das *Signum* $\operatorname{sgn}(\sigma)$ einer Permuation $\sigma \in S_k$ festgelegt werden:

$$\operatorname{sgn}\colon S_k \to \{\pm 1\}, \tag{1.24}$$

ist ein Homomorphismus, also $\operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\circ\operatorname{sgn}(\tau)$, welche jede Transposition auf -1 abbildet. Ist demnach das Signum einer Permuation negativ, dann zerfällt die Permuation in eine ungerade Anzahl von Transpositionen.

Definition 1.3.1 . Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum. Ein kovarianter k-Tensor f auf V heißt *symmetrisch*, falls für jede endliche Familie $\{v_i\}_{i\in\{1,\dots,k\}} \subseteq V$ gilt

$$(\sigma f)(v_1,\dots,v_k) := f(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}) = f(v_1,\dots,v_k) \tag{1.25}$$

für alle Permutationen $\sigma \in S_k$. $f \in T^0_k(V)$ heißt *alternierend*, falls für jede endliche Familie $\{v_i\}_{i\in\{1,\ldots,k\}} \subseteq V$ gilt

$$f(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)}) = (\operatorname{sgn}\sigma)f(v_1,\ldots,v_k) \tag{1.26}$$

für alle $\sigma \in S_k$.

Der Vektorraum aller alternierenden (bzw. symmetrischen), k-multilinearen Abbildungen wird durch $A_k(V)$ (bzw. $\Sigma_k(V)$) symbolisiert. Die Elemente des Raumes $A_k(V)$ werden ausgezeichnet und nennt diese *k-Kovektoren* oder auch *Multikovektoren vom Grad k*.

Der Raum $T^0_k(V)$ zerfällt also in zwei disjunkte Räume, bestehend aus symmmetrischen und aus alternierenden k-Tensoren. Es besteht die Möglichkeit mit Hilfe von Abbildungen einen k-Tensor auf den jeweiligen Raum zu projizieren. Das heißt, man definiert einen Symmetrisierungsoperator $\mathrm{S}\colon T^0_k(V) \to \Sigma_k(V)$ für $f \in T^0_k(V)$

$$\mathrm{S}f = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\sigma f. \tag{1.27}$$

Der Alternierungsoperator $\mathrm{A}\colon T^0_k(V) \to A_k(V)$ ist für $f \in T^0_k(V)$ definiert durch

$$\mathrm{A}f = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma f. \tag{1.28}$$

Bei der Definition des jeweiligen Projektionsoperators ist Vorsicht geboten. Es herrschen unterschiedliche Konventionen vor, die sich später auf die Definition des Keilproduktes auswirken. Wir folgen hier der Konvention von [Lee12] entgegen der von [Tu10], welche den Vorteil hat, dass $\mathrm{A}f = f$ genau dann, wenn $f \in A_k(V)$ und entsprechendes für den Symmetrisierungsoperator S. Letztlich folgen jedoch beide Werke der sogenannten *Determinantenkonvention* (siehe hierzu (1.39) und die Erklärung hierfür auf [Lee12, Seite 358]).

Die Abbildungen A und S erfüllen unter anderem folgende Eigenschaft:

Satz 1.3.2 . *Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum V und $f \in T^0_k(V)$, dann gilt*

(1) *Die k-multilineare Funktion $\mathrm{S}f$ ist symmetrisch.*

(2) *Die k-multilineare Funktion $\mathrm{A}f$ ist alternierend.*

Beweis. [Tu10, Proposition 3.12] □

Bevor nun näher auf die Konstruktion der äußeren Algebra eingegangen werden soll, sei noch das *symmetrische Produkt* erwähnt; seien $f \in \Sigma_k(V)$ und $f \in \Sigma_l(V)$, dann ist das symmetrische Produkt der $(k+l)$-Tensor fg, gegeben durch

$$fg = \mathrm{S}(f \otimes g). \tag{1.29}$$

Als Spezialfall, falls f und g Kovektoren sind, gilt

$$fg = \tfrac{1}{2}(f \otimes g + g \otimes f). \tag{1.30}$$

1.4 Algebra der alternierenden Tensoren

Es soll nun das Keilprodukt

$$\wedge\colon A_k(V) \times A_l(V) \to A_{k+l}(V) \tag{1.31}$$

definiert werden. Wenn etwa $k = l = 1$, dann ist $(f \wedge g)(v, v') = f(v)g(v') - g(v)f(v')$. Das Keilprodukt soll so beschaffen sein, dass es nicht aus dem Vektorraum der alternierenden Tensoren herausführen soll.

Definition 1.4.1 . Sei $f \in A_k(V)$ und $g \in A_l(V)$, dann ist deren *Keilprodukt* $f \wedge g$ als der $(k + l)$-Kovektor definiert zu

$$f \wedge g = \frac{(k + l)!}{k!l!} \mathrm{A}(f \otimes g) \tag{1.32}$$

Lemma 1.4.2 . *Wenn $f \in A_k(V)$ und $g \in A_l(V)$, dann ist $f \wedge g \in A_{k+l}(V)$.*

Beweis. [Tu10, Proposition 3.12] □

Die auftretenden Faktoren in (1.32) sind sehr unhandlich. Man erkennt jedoch, dass man Redundanzen in der Definition des Keilproduktes vermeiden kann. Dazu sei das Keilprodukt noch einmal explizit ausgeschrieben

$$(f \wedge g)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\operatorname{sgn} \sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}). \tag{1.33}$$

Dabei fällt auf, dass jede Indexwahl z.B. in $f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$ durch Vertauschung in eine streng wachsende Anordnung der Indizes gebracht werden kann. Da es $k!$ Vertauschungen sind, die sich einzig auf die Argumente von f auswirken und die Argumente von g unberührt lassen, sind es stets $k!$ Indexauswahlen, die stets durch Vertauschung zu einer strikt wachsenden Indexanordnung umgeformt werden können. Mit der folgenden Definition wird sich die Berechnung des Keilproduktes vereinfachen.

Definition 1.4.3 . Eine (k, l)-*Verschiebung* $\sigma \in S_{k+l}$ ist eine Permuation von $\{1, \ldots, k + l\}$ mit der Eigenschaft

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(k) \quad \text{und} \quad \sigma(k + 1) < \cdots < \sigma(k + l). \tag{1.34}$$

Die Menge aller (k, l)-Verschiebungen wird mit $S(k, l)$ bezeichnet. Es ist klar, dass eine (k, l)-Verschiebung eindeutig festgelegt ist durch die Angabe der Menge $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(k)\}$ und somit ist die Kardinalität von $S(k, l)$ gleich $n!/k!(n - k)!$.

Folgerung 1.4.4 . *Für $f \in A_k(V)$ und $g \in A_l(V)$ gilt*

$$(f \wedge g)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S(k,l)} (\operatorname{sgn} \sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}). \tag{1.35}$$

Mit dieser Folgerung ist ersichtlich, dass $f \wedge g$ nun nur noch eine Summe von $\binom{k+l}{k}$ Termen ist, statt $(k+l)!$-Termen.

Satz 1.4.5 (Eigenschaften des Keilproduktes). *Seien f, f',g, g' und h Multikovektoren eines endlichdimensionalen Vektorraums V.*

(1) Bilinearität: *Für $a, a' \in \mathbb{R}$ gilt*

$$(af + a'f') \wedge g = a(f \wedge g) + a'(f' \wedge g), \tag{1.36a}$$
$$f \wedge (ag + a'g') = a(f \wedge g) + a'(f \wedge g'). \tag{1.36b}$$

(2) Antikommutativität: *Für $f \in A_k(V)$ und $g \in A_l(V)$, gilt*

$$f \wedge g = (-1)^{kl} g \wedge f. \tag{1.37}$$

(3) Assoziativität: *Für $f \in A_k(V)$, $g \in A_l(V)$ und $h \in A_m(V)$, gilt*

$$f \wedge (g \wedge h) = (f \wedge g) \wedge h. \tag{1.38}$$

(4) *Für eine endliche Familie $\{\varepsilon^i\}_{i \in \{1,\dots,k\}} \subseteq V^*$ von Kovektoren und einer endlichen Familie $\{v_i\}_{i \in \{1,\dots,k\}} \subseteq V$ von Vektoren gilt*

$$(\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^k)(v_1, \dots, v_k) = \det[\varepsilon^i(v_j)]. \tag{1.39}$$

Beweis. Die Bilinearität des Keilproduktes ergibt sich sofort aus der Definition 1.4.1. Die restlichen Aussagen sind mit einem eher technischen Aufwand verbunden, daher der Verweis [Tu10, Proposition 3.12] für (2), [Tu10, Proposition 3.25] für (3) und [Tu10, Proposition 3.27] für (4). □

Man beachte, dass die Assoziativität des Keilproduktes es gestattet, statt $(f \wedge g) \wedge h$ einfach $f \wedge g \wedge h$ zu schreiben. Diese Aussage lässt sich auf beliebig viele Faktoren verallgemeinern und somit ist die Teilaussage (4) des Satzes 1.4.5 auch tatsächlich wohldefiniert. Des Weiteren gestattet diese Teilaussage, folgendes Lemma zu formulieren.

Lemma 1.4.6 . *Seien $\{\varepsilon^i\}_{i \in \{1,\dots,k\}} \subseteq V^*$ Kovektoren für einen n-dimensionalen Vektorraum V. Dann sind äquivalent:*

(a) $(\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^k) \neq 0$

(b) *Die endliche Familie $\{\varepsilon^i\}_{i \in \{1,\dots,k\}}$ ist linear unabhängig.*

Beweis. Die Richtung $(a) \Rightarrow (b)$ wird indirekt gezeigt. Das heißt angenommen die Familie $\{\varepsilon^i\}_{i\in\{1,\ldots,k\}}$ ist linear abhängig, dann ist einer der Kovektoren eine Linearkombination der anderen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit, darf man annehmen, dass

$$\varepsilon^k = \sum_{i=1}^{k-1} c_i \varepsilon^i. \tag{1.40}$$

In dem Keilprodukt $\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{k-1} \wedge (\sum_{i=1}^{k-1} c_i \varepsilon^i)$ treten in jedem Term sich wiederholende Indizes auf. Aus der Eigenschaft alternierend zu sein, ist daher

$$(\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^k) = 0. \tag{1.41}$$

Damit folgt (b) aus (a).

Es möge nun (b) gelten. Man kann die linear unabhängige Familie $\{\varepsilon^i\}_{i\in\{1,\ldots,k\}}$ zu einer Basis $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^k, \ldots, \varepsilon^n$ von V^* erweitern. Sei $\{v_i\}_{i\in\{1,\ldots,k\}} \subseteq V$ die hierzu duale Basis, dann gilt nach Teilaussage (4) des Satzes 1.4.5

$$(\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^k)(v_1, \ldots, v_k) = \det[\varepsilon^i(v_j)] = \det[\delta^i_j] = 1. \tag{1.42}$$

Damit ist $(\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^k) \neq 0$, da $(\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^k)$ als k-multilineare Funktion durch Wirkung auf die Basis eindeutig festgelegt ist. Damit folgt (a) aus (b). □

Eine Algebra A über einem Körper K mit der Multiplikation $\mu\colon A \times A \to A$ wird als *graduiert* bezeichnet, sofern sie als eine direkte Summe $A = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A_k$ von Vektorräumen A_k über K geschrieben werden kann und für die Multiplikation μ gilt $\mu(A_k, A_l) \subseteq A_{k+l}$. Die Schreibweise $A = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A_k = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} A_k$ bedeutet, dass

$$\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} A_k = \left\{ \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_{k\in\mathbb{N}} A_k \;\middle|\; a_k = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } k \right\} \tag{1.43}$$

und

$$\prod_{k\in\mathbb{N}} A_k = \left\{ \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \;\middle|\; a_k \in A_k \right\}. \tag{1.44}$$

Damit kann also jedes von Null verschiedene Element a aus A eindeutig als ein endliches Tupel geschrieben werden

$$a = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}), \quad \text{wobei } a_{i_j} \neq 0 \in A_{i_j}. \tag{1.45}$$

Meistens wird $a \in A$ nicht als endliches Tupel $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_m})$ geschrieben, sondern als eine endliche Summe $a_{i_1} + \cdots + a_{i_m}$. Die Vektorraumstruktur auf A wird dann komponentenweise erklärt und das Produkt μ ist distributiv bezüglich dieser Addition. Eine graduierte Algebra $A = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A_k$ ist *antikommutativ*, falls für alle $a \in A_k$ und $b \in A_l$ gilt

$$\mu(a, b) = (-1)^{kl} \mu(b, a). \tag{1.46}$$

Elementen des Vektorraums A_k wird der *Grad* k zugesprochen. Ein *Homomorphismus von graduierten Algebren* ist damit ein Algebrahomomorphismus, der den Grad erhält.

Für einen n-dimensionalen Vektorraum V gilt, dass $A_k(V) = 0$ falls $k > \dim V$. In der Tat, sei $\{e_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ eine Basis für V und sei $f \in A_k(V)$ mit $k > n$. Mittels der Multilinearität erkennt man

$$f(v_1, \ldots, v_k) = f\left(\sum_{i=1}^{n} (v_1)^i e_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} (v_k)^i e_i\right) = \sum_J v^J f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}), \tag{1.47}$$

wobei $v^J = (v_1)^{j_1} \cdots (v_k)^{j_k}$. Nach Voraussetzung gilt $k > n$ und somit existiert für jeden Summanden mindestens eine Wiederholung unter den Elementen $e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}$ und nach Definition 1.3.1 ist $f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = 0$ für jede Indexwahl J.

Im folgenden Sinne kann

$$A_*(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} A_k(V) = \bigoplus_{k=0}^{n} A_k(V) \tag{1.48}$$

als graduierte Algebra aufgefasst werden. Es ist klar, dass $A_k(V)$ einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bildet. Das kann man z.B. mit dem Alternierungsoperator $\mathrm{A} : T_k^0(V) \to A_k(V)$ einsehen. Das Keilprodukt aus Definition 1.4.1 besitzt die Eigenschaft eine Abbildung von $A_k(V) \times A_l(V)$ nach $A_{k+l}(V)$ darzustellen. Dabei soll vereinbart werden, dass $A_0(V) = \mathbb{R}$ gesetzt wird und mittels der Vektorraumstruktur auf $A_l(V)$ kann das Keilprodukt für $A_0(V) \times A_l(V)$ erweitert werden. Mit dem Keilprodukt der Multikovektoren als Produkt und den Teilaussagen (1), (2) und (3) des Satzes 1.5.2 hat man fast alles in der Hand, um $A_*(V)$ als eine antikommutative, graduierte Algebra zu identifizieren. Das Keilprodukt auf $A_*(V) \times A_*(V) \to A_*(V)$ wird nun so erklärt, dass es bilinear ist und damit dem Distributivitätsgesetz genügt. Das heißt also für $f, g \in A_*(V)$ mit

$$f = f_1 + \cdots + f_k, \quad f_i \in A_{r_i}(V) \text{ und } g = g_1 + \cdots + g_l, \quad g_l \in A_{s_l}(V) \tag{1.49}$$

setzt man (siehe hierzu [Boo86, Folgerung 6.7])

$$f \wedge g := \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} f_i \wedge g_j. \tag{1.50}$$

Mit dieser Festlegung kann man nun schlussendlich erkennen:

Folgerung 1.4.7 . *Der Vektorraum $A_*(V) = \bigoplus_{k=0}^n A_k(V)$ bildet mit dem Keilprodukt eine antikommutative, graduierte Algebra über $\mathbb{R}$, die auch als die alternierende Algebra bezüglich V bezeichnet wird.*

1.5 Eine Basis für k-Kovektoren

Sei $\{e_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ eine Basis für einen n-dimensionalen Vektorraum V über $\mathbb{R}$ und $\{\varepsilon^i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ die hierzu duale Basis in V^*. Es wurde bereits herausgestellt, dass $\bigoplus_{k=0}^n A_k(V)$ eine ganz spezielle Algebrastruktur trägt. Es wäre nun wünschenswert zudem eine Basis für $A_k(V)$ angeben zu können. Aus Lemma 1.4.6 gehen mögliche Kandidaten hierfür hervor.

Es soll folgende Schreibweise verwendet werden. Es bezeichne für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$

$$I \in I_{k,n} := \Big\{ \{i_1, \ldots, i_k\} \,\Big|\, \forall j \in \{1, \ldots, k\} \colon i_j \in \{1, \ldots, n\} \Big\} \tag{1.51}$$

einen *Multiindex der Länge k* und zusätzlich für einen *streng wachsend angeordneten Multiindex der Länge k*

$$\vec{I} \in \vec{I}_{k,n} := \Big\{ \{i_1, \ldots, i_k\} \in I_{k,n} \,\Big|\, i_1 < \cdots < i_k \Big\}. \tag{1.52}$$

Mit dieser Notation steht e_I abkürzend für $\{e_{i_j}\}_{i_j \in I}$, wobei $I \in I_{k,n}$. ε^I steht stellvertretend für $\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k}$, wobei $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \in I_{k,n}$.

Lemma 1.5.1 . *Sei $\{e_i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ eine Basis für einen Vektorraum V und $\{\varepsilon^i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ bezeichne die hierzu duale Basis für den Dualraum V^*. Dann gilt für alle $\vec{I}, \vec{J} \in \vec{I}_{k,n}$*

$$\varepsilon^{\vec{I}} e_{\vec{J}} = \delta^{\vec{I}}_{\vec{J}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \vec{I} = \vec{J}, \\ 0 & \text{falls } \vec{I} \neq \vec{J}. \end{cases} \tag{1.53}$$

Beweis. Für $\vec{I} = \vec{J} \in \vec{I}_{k,n}$ folgt die Aussage aus (1.39), wonach $[\varepsilon^i(e_j)]$ die Einheitsmatrix darstellt, deren Determinante gleich 1 ist.

Im Fall $\vec{I} \neq \vec{J} \in \vec{I}_{k,n}$ existiert ein $i_{l'}$, so dass

$$i_1 = j_1, \ \ldots, i_{l-1} = j_{l-1}, \ i_{l'} \neq j_l, \ \ldots . \tag{1.54}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann nun angenommen werden, dass $i_{l'} < j_l$. Aufgrund der streng wachsenden Anordnung der Indizes ist $i_{l'} \neq j_l$ für alle $l \in \{1, \ldots, k\}$ und nach (1.39) ist die l'-te Zeile der Matrix $[\varepsilon^i(e_j)]$ ausschließlich durch Nullen besetzt. Somit folgt $\det[\varepsilon^i(e_j)] = 0$. □

Es soll folgende modifizierte Summe eingeführt werden, um eine kompakte Notation zu gewährleisten

$$\sum_I{}' c_I \varepsilon^I := \sum_{\vec{I} \in \vec{I}_{k,n}} c_{\vec{I}}\, \varepsilon^{\vec{I}}. \tag{1.55}$$

Satz 1.5.2 (Basis für k-Kovektoren). *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum. Die endliche Familie $\{e_i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ sei eine Basis für V und $\{\varepsilon^i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ bezeichne die hierzu duale Basis. Dann gilt für $k \leq n$, dass die Familie*

$$\mathfrak{E} := \{\varepsilon^{\vec{I}}\}_{\vec{I} \in I_{k,n}} = \{\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k}\}_{\{i_1,\ldots,i_k\} \in \vec{I}_{k,n}} \tag{1.56}$$

eine Basis für den Vektorraum $A_k(V)$ bildet.

Beweis. Es soll zunächst die lineare Unabhängigkeit gezeigt werden. Angenommen es gilt $\sum_I' c_I \varepsilon^I = 0$ für $c_{\vec{I}} \in \mathbb{R}$. Wendet man beide Seiten der Gleichungen auf $e_{\vec{J}}$ an und nutzt die Aussage des Lemmas 1.5.1, so erhält man

$$0 = \sum_I{}' c_I \varepsilon^I(e_{\vec{J}}) = \sum_I{}' c_I \delta^I_{\vec{J}} = c_{\vec{J}}. \tag{1.57}$$

Dies beweist die lineare Unabhängigkeit der $\varepsilon^{\vec{I}}$. Es soll gezeigt werden, dass die $\varepsilon^{\vec{I}}$ den Raum $A_k(V)$ erzeugen. Dazu sei $f \in A_k(V)$. Die Behauptung ist, dass

$$f = \sum_I{}' f(e_I)\varepsilon^I. \tag{1.58}$$

Sei des Weiteren $g = \sum_I' f(e_I)\varepsilon^I$. Es gilt nun für alle $\vec{J} \in \vec{I}_{k,n}$, dass

$$g(e_{\vec{J}}) = \sum_I{}' f(e_I)\varepsilon^I(e_J) = \sum_I{}' f(e_I)\delta^I_J = f(e_{\vec{J}}). \tag{1.59}$$

Daraus folgt $f = g = \sum_I' f(e_I)\varepsilon^I$, da f und g als k-multilineare Funktionen eindeutig durch die Wirkung auf alle k-Tupel $e_{\vec{J}}$ festgelegt sind. □

Folgerung 1.5.3 . *Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und* $\dim V = n$, *dann gilt*

$$\dim A_k(V) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.60}$$

Beweis. Ein streng wachsender Multiindex $\vec{I} = \{i_1, \dots, i_k\} \in \vec{I}_{k,n}$ wird festgelegt, indem man eine Teilmenge von k Zahlen aus $1, \dots, n$ auswählt. Dies kann auf $(n!/k!(n-k)!)$-Wegen vollzogen werden. □

2 Differentielle 1-Formen

In diesem Kapitel wird sich in der Notation und Inhalt an [Tu10, Kapitel 17] orientiert. Grundlegende Definitionen und Resultate im Hinblick auf Mannigfaltigkeiten und Vektorfeldern sind etwa [Tu10] zu entnehmen und werden an dieser Stelle vorausgesetzt. Es soll betont werden, dass in dieser Arbeit mit einer *Mannigfaltigkeit* stets eine glatte oder auch C^∞-Mannigfaltigkeit gemeint ist.

2.1 Differential einer Funktion

Es soll auf eine zwar triviale, aber äußerst wichtige Tatsache hingewiesen werden, die immer dann von Bedeutung ist, wenn lokal auf einer Karte einer Mannigfaltigkeit eine Eigenschaft etabliert soll, die aber eine Mannigfaltigkeit voraussetzt.

Satz 2.1.1 . *Jede offene Teilmenge und damit auch jede Koordinatenumgebung auf einer Mannigfaltigkeit M ist selbst auch wieder eine Mannigfaltigkeit.*

Beweis. [Tu10, Beispiel 5.12] □

Definition 2.1.2 . Seien M, N zwei Mannigfaltigkeiten und $F\colon N \to M$ eine C^∞-Abbildung. Für jeden Punkt $p \in N$ wird entsprechend [Tu10, Abschnitt 8.1] die Abbildung $F_*\colon T_pN \to T_{F(p)}M$ als das *Differential der Abbildung F im Punkt p* definiert durch

$$(F_*(X_p))\, f = X_p(f \circ F) \in \mathbb{R} \quad \text{für } f \in C^\infty_{F(p)}(M). \tag{2.1}$$

Es soll betont werden, dass F_* eine Abbildungsvorschrift für jeden Punkt $p \in N$ darstellt und gelegentlich diese Abhängigkeit durch $F_{p,*}$ hervorgehoben wird.

Man spricht von der linearen Abbildung $\omega_p\colon T_pM \to \mathbb{R}$ als 1-*Form im Punkt $p \in M$ der Mannigfaltigkeit M*, also falls $\omega_p \in (T_pM)^*$. Eine 1-*Form auf M* ist eine Abbildung ω auf M, die jedem $p \in M$ einen Kovektor $\omega_p \in (T_pM)^*$ zuordnet. Dieser Begriff wird in Abschnitt 2.3 noch besser formalisiert.

Definition 2.1.3 . Sei M eine Mannigfaltigkeit und die Abbildung $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion, dann wird deren *Differential df* als die 1-Form auf M für alle $p \in M$ und alle $X_p \in T_pM$ erklärt durch

$$(df)_p\,(X_p) = X_pf. \tag{2.2}$$

In der Definition 2.1.2 wurde ebenfalls das Differential einer Funktion eingeführt. Es soll nun gezeigt werden, dass die beiden Definitionen 2.1.2 und 2.1.3 in einem gewissen Sinne zueinander äquivalent sind.

Satz 2.1.4 . *Sei M eine Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Abbildung, dann gilt für alle $p \in M$ und alle $X_p \in T_pM$*

$$\underbrace{f_*(X_p)}_{\in T_{f(p)}\mathbb{R}} = \underbrace{(df)_p(X_p)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\left.\frac{d}{dt}\right|_{f(p)}}_{\in T_{f(p)}\mathbb{R}}. \tag{2.3}$$

Beweis. Aus der Definition von f_* folgt, dass ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, mit der Eigenschaft

$$f_*(X_p) = a \left.\frac{d}{dt}\right|_{f(p)}. \tag{2.4}$$

Aufgabe ist es nun dieses a zu berechnen. Dies erhält man, indem man beide Seiten aus 2.4 auf die identische Abbildung $\mathrm{id}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ anwendet. Damit gilt

$$a = f_*(X_p)(t) = X_p(t \circ f) = X_p f = (df)_p(X_p). \tag{2.5}$$

Damit ist die Aussage gezeigt. □

Mit der Aussage des Satzes 2.1.4 kann f_* und df in folgendem Sinne miteinander identifiziert werden:

$$\begin{tikzcd} & T_pM \arrow[dl, "f_{p,*}"'] \arrow[dr, "(df)_p"] & \\ T_{f(p)}\mathbb{R} \arrow[rr, shift right, "\mathcal{I}"'] & & \mathbb{R} \arrow[ll, shift right, "\mathcal{I}^{-1}"'] \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

Hierbei lässt sich mittels der Bijektion $\mathcal{I}\colon T_{f(p)}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{I}\left(a \left.\frac{d}{dt}\right|_{f(p)}\right) = a \tag{2.7}$$

der Tangentialraum $T_{f(p)}\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}$ identifizieren. In Gestalt dieser Umstände ist es daher gerechtfertigt, beide Abbildungen f_* und df als das Differential von f zu bezeichnen.

2.2 Lokale Darstellung einer 1-Form

Es sei $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ eine Karte auf einer Mannigfaltigkeit M der Dimension n. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ wird $x^i\colon M \to \mathbb{R}$ mit $x^i = u^i \circ \phi$ als die i-te *Koordinatenfunktion* bezeichnet, wobei u^i die Projektion auf den i-ten kanonischen Einheitsvektor darstellt. Die i-te Koordinatenfunktion ist Element der Menge $C^\infty(M, \mathbb{R})$, da $u^i \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $\phi \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ und die Verknüpfung von C^∞-Abbildungen wieder C^∞ ist (siehe hierzu [Tu10, Proposition 6.9]). Somit ist $\{dx^i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ eine endliche Familie von 1-Formen auf U.

Satz 2.2.1 . *Es sei* $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ *eine Karte auf einer* n*-dimensionalen Mannigfaltigkeit* M*. Für jeden Punkt* $p \in U$ *ist die Familie der Kovektoren* $\{(dx^i)_p\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ *eine Basis für den Raum* $(T_pM)^*$*, welche dual ist zu der Basis* $\{\partial/\partial x^i|_p\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ *des Raumes* T_pM*.*

Beweis. Mit der Aussage [Tu10, Proposition 6.22] folgt die Dualitätseigenschaft

$$(dx^i)_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p x^i = \delta^i_j. \tag{2.8}$$

Mit der Linearität von $(df)_p$ ergibt sich für $X_p = \sum_{i=1}^n (X_p x^i) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in T_pM$

$$(df)_p(X_p) = \sum_{i=1}^n (X_p x^i)\left[(df)_p\Big(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\Big)\right] = \sum_{i=1}^n \left[(df)_p\Big(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\Big)\right](dx^i)_p(X_p) \tag{2.9}$$

und da $X_p \in T_pM$ beliebig ist

$$(df)_p = \sum_{i=1}^n \left[(df)_p\Big(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\Big)\right](dx^i)_p, \tag{2.10}$$

was zeigt, dass $\{(dx^i)_p\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ den Raum $(T_pM)^*$ erzeugt. Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, wird die Dualitätseigenschaft herangezogen. Sei also $\sum_{i=1}^n c_i(dx^i)_p = 0$ für $\{c_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \subseteq \mathbb{R}$ und wendet man beide Seiten der Gleichung auf $\partial/\partial x^j|_p$ an, so erhält man

$$0 = \sum_{i=1}^n c_i \delta^i_j = c_j \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, n\}. \tag{2.11}$$

Damit ist also die Familie $\{(dx^i)_p\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ linear unabhängig. □

Folgerung 2.2.2 . *Sei* $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$*. Dann kann nach Satz 2.2.1 die* 1*-Form* df *auf einer Karte* $(U, x^1, \dots, x^n)$ *lokal dargestellt werden mit*

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i. \tag{2.12}$$

2.3 Kotangentialbündel

Für eine Mannigfaltigkeit M nennt man die disjunkte Vereinigung

$$T^*M := \bigsqcup_{p\in M} (T_pM)^* := \bigcup_{p\in M} (\{p\} \times (T_pM)^*) \tag{2.13}$$

das *Kotangentialbündel der Mannigfaltigkeit* M. Das übliche Vorgehen besteht nun darin T^*M als C^∞-Mannigfaltigkeit zu identifizieren, welche mit einer kanonischen Topologie ausgestattet ist. Dies soll im Folgenden kurz angedeutet werden und es soll sich in der Darstellung der Thematik an [Tu10, Abschnitt 17.3] orientiert werden.

2.3.1 Topologie des Kotangentialbündels

Der erste Schritt besteht darin, eine *natürliche* Topologie auf T^*M zu konstruieren. Sei dazu M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ eine Koordinatenumgebung auf M. Des Weiteren sei

$$T^*U = \bigsqcup_{p \in U} (T_pU)^* \overset{(*)}{=} \bigsqcup_{p \in U} (T_pM)^*, \tag{2.14}$$

wobei die Umformung $(*)$ aus [Tu10, Remark 8.3] folgt. Laut der Aussage des Satzes 2.2.1 kann jedes $\alpha \in (T_pM)^*$ eindeutig als Linearkombination

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i(\alpha)(dx^i)_p \tag{2.15}$$

geschrieben werden kann. Es existiert eine natürliche Abbildung $\pi\colon T^*M \to M$, gegeben durch $\pi(\alpha) = p$, falls $\alpha \in T^*M$. Dies gibt nun Anlass folgende Abbildung zu definieren

$$\tilde{\phi}\colon T^*U \to \phi(U) \times \mathbb{R}^n, \tag{2.16a}$$

$$\alpha \mapsto (\phi(p), c_1(\alpha), \ldots, c_n(\alpha)) = (\phi \circ \pi, c_1, \ldots, c_n)(\alpha). \tag{2.16b}$$

Die Inverse von $\tilde{\phi}$ kann explizit angegeben werden

$$\tilde{\phi}^{-1}\colon \phi(U) \times \mathbb{R}^n \to T^*U, \tag{2.17a}$$

$$(\phi(p), c_1(\alpha), \ldots, c_n(\alpha)) \mapsto \sum_{i=1}^{n} c_i(\alpha)(dx^i)_p \tag{2.17b}$$

und $\tilde{\phi}$ ist somit eine Bijektion. Damit kann eine Topologie auf T^*U erklärt werden: eine Menge A ist genau dann offen in T^*U, falls $\tilde{\phi}(A)$ offen in $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$ ist, wobei $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$ als offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{2n}$ die Teilraumtopologie besitzt.[1]

Das heißt also, falls $\tilde{\mathcal{B}}_\alpha$ die Topologie auf der Teilmenge $\phi(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$ bezeichne, wobei U_α jeweils eine Karte aus dem maximalen Atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ von M darstellt, dann ist $\mathcal{B}_\alpha := \tilde{\phi}^{-1}(\tilde{\mathcal{B}}_\alpha)$ eine Topologie für T^*U_α, da das Urbild einer Topologie wieder eine Topologie ist. Per Definition ist T^*U_α, mit der von $\tilde{\phi}$ induzierten Topologie, homöomorph zu $\phi(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$. Falls V offen und $V \subseteq U$, dann ist $\phi(V) \times \mathbb{R}^n$ offen und $\phi(V) \times \mathbb{R}^n \subseteq \phi(U) \times \mathbb{R}^n$. Damit gilt für die Teilraumtopologie auf T^*V, aufgefasst als Teilmenge von T^*U, dass diese Topologie gleich ist zur derjenigen, induziert durch die Bijektion $\tilde{\phi}|_{T^*V}\colon T^*V \to \phi(V) \times \mathbb{R}^n$.

Es bezeichne $\mathcal{B}$ die Vereinigung aller offenen Teilmengen aus T^*U_α für den maximalen Atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ von M:

$$\mathcal{B} := \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{B}_\alpha \tag{2.18}$$

[1] Der $\mathbb{R}^{2n}$ besitzt die Standardtopologie und für eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ bezeichnet man $U \subseteq S$ als offen in S, falls eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ existiert mit $U = V \cap S$.

Lemma 2.3.1 . *Sei M eine Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

(1) $T^*M = \cup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{B}_\alpha$

(2) *Seien U_α und U_β offene Koordinatenumgebungen von M. Falls $A \in \mathcal{B}_\alpha$ und $B \in \mathcal{B}_\beta$, dann ist $A \cap B \in \mathcal{B}_\gamma$, wobei $U_\gamma = U_\alpha \cap U_\beta$.*

Beweis. Zu (1): Sei $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ der maximale Atlas von M, dann gilt

$$T^*M = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} T^*U_\alpha \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A \subseteq T^*M, \tag{2.19}$$

und damit gilt in jeder Umformung die Gleichheit.
Zu (2): Aus der Definition von T^*U_γ folgt, dass T^*U_γ eine Teilmenge von T^*U_α ist. Sei $A \in \mathcal{B}_\alpha$, dann ist nach Definition der Teilraumtopologie $A \cap T^*U_\gamma$ offen in T^*U_γ bzw. $A \cap T^*U_\gamma \in \mathcal{B}_\gamma$. Gleichermaßen gilt für $B \in \mathcal{B}_\beta$, dass $B \cap T^*U_\gamma$ offen in T^*U_γ ist bzw. $B \cap T^*U_\gamma \in \mathcal{B}_\gamma$. Es gilt, dass

$$A \cap B \subset T^*U_\alpha \cap T^*U_\beta = T^*U_\gamma. \tag{2.20}$$

Somit erhält man

$$A \cap B = A \cap B \cap T^*U_\gamma = (A \cap T^*U_\gamma) \cap (B \cap T^*U_\gamma), \tag{2.21}$$

was bedeutet, dass $A \cap B$ offen in T^*U_γ ist, also $A \cap B \in \mathcal{B}_\gamma$. $\square$

Nach [Tu10, Proposition A.8] folgt aus der Aussage des Lemmas 2.3.1, dass $\mathcal{B}$ die Bedingungen dafür erfüllt, eine Basis für eine Topologie auf T^*M darzustellen. Die Topologie auf T^*M soll so gewählt sein, dass diese von der Basis $\mathcal{B}$ aus (2.18) erzeugt wird.

Lemma 2.3.2 . *Eine Mannigfaltigkeit M besitzt eine abzählbare Basis, bestehend aus offenen Koordinatenumgebungen.*

Beweis. [Tu10, Lemma 12.2] $\square$

Satz 2.3.3 . *Das Kotangentialbündel T^*M einer Mannigfaltigkeit M als topologischer Raum, besitzt eine abzählbare Basis.*

Beweis. Nach Lemma 2.3.2 existiert eine abzählbare Basis $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq M$ für den topologischen Raum M, wobei jedes U_i eine offene Koordinatenumgebung ist. Sei ϕ_i die zu U_i zugehörige Koordinatenabbildung. Wie bereits erkannt, ist T^*U_i homöomorph zu zu der offenen Teilmenge $\phi(U_i) \times \mathbb{R}^{2n}$ des Raums $\mathbb{R}^{2n}$ und man kann zeigen, dass jede Teilmenge eines Euklidischen Raumes ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis ist (siehe hierzu [Tu10, Proposition A.14]). Damit ist auch T^*U_i ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis. Somit kann für jeden Index $i \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Basis $\{B_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq T^*U_i$ des topologischen Raumes T^*U_i ausgewählt werden. Insgesamt stellt dann die Familie von Mengen $\{B_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}} \subseteq T^*M$ eine abzählbare Basis für das Kotangentialbündel T^*M dar. $\square$

Satz 2.3.4 . *Das Kotangentialbündel T^*M einer Mannigfaltigkeit M erfüllt die Hausdorff-Eigenschaft.*

Beweis. Seien $(p, c) \neq (q, d)$ unterschiedliche Punkte aus T^*M.

1. Fall: $p \neq q$. M als eine Mannigfaltigkeit trägt per Voraussetzung die Hausdorff-Eigenschaft und die Punkte p und q können somit durch disjunkte Umgebungen $U \subseteq M$ und $V \subseteq M$ getrennt werden. Dann gilt aber auch $T^*U \cap T^*V = \emptyset$ und $(p, c) \in T^*U$ und $(q, d) \in T^*V$, was die Hausdorff-Eigenschaft in diesem Fall beweist.

2. Fall: $p = q$ Sei (U, ϕ) eine Koordinatenumgebung für $p \in M$. (p, c) und (p, d) sind unterschiedliche Punkte aus T^*U. Da T^*U homöomorph zu der offenen Teilmenge $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$ des Raums $\mathbb{R}^{2n}$ ist und jede Teilmenge eines Hausdorff-Raumes wieder die Hausdorff-Eigenschaft trägt (siehe hierzu [Tu10, Proposition A.19]), ist somit auch T^*U ein Hausdorff-Raum. (p, c) und (p, d) können also durch zwei disjunkte offenen Mengen aus T^*U getrennt werden. □

2.3.2 Mannigfaltigkeitsstruktur des Kotangentialbündels

In der Definition einer C^∞-Mannigfaltigkeit wird sich auf [Tu10, Definition 5.9] berufen. Mit den bisherigen Feststellungen ist es nun möglich folgenden Satz zu beweisen.

Satz 2.3.5 . *Für jede n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit M ist das Kotangentialbündel T^*M eine $2n$-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit.*

Beweis. In Satz 2.3.3 wurde bewiesen, dass die Topologie des Kotangentialbündels eine abzählbare Basis besitzt. Die Behauptung ist nun, falls $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ ein C^∞-Atlas für M ist, dann ist $(T^*U_\alpha, \tilde{\phi}_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ ein C^∞-Atlas für T^*M.

Es gilt, dass $T^*M = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} T^*U_\alpha$ und somit besitzt jeder Punkt $(p, c) \in T^*M$ eine Umgebung T^*U_α und einen Homöomorphismus $\tilde{\phi}$ von T^*U_α auf eine offene Menge $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$ des $\mathbb{R}^{2n}$. Es verbleibt nun lediglich zu zeigen, dass $\tilde{\phi}_\alpha$ und $\tilde{\phi}_\beta$ C^∞-kompatibel auf $T^*U_\alpha \cap T^*U_\beta$ sind.

Man betrachtet hierzu zwei Karten $(U, x^1, \ldots, x^n)$ und $(V, y^1, \ldots, y^n)$, womit für jeden Punkt $p \in U \cap V$ die Mengen $\{(dx^j)_p\}_{j \in \mathbb{N}}$ und $\{(dy^i)_p\}_{i \in \mathbb{N}}$ Basen des Raumes $(T_pM)^*$ darstellen. Damit kann jede 1-Form $\alpha \in (T_pM)^*$ durch Linearkombination bezüglich der beiden Basen dargestellt werden:

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_j (dx^j)_p = \sum_{i=1}^{n} b_i (dy^j)_p. \tag{2.22}$$

Durch Anwenden der beiden Seiten auf $\partial/\partial x^k|_p$ und Nutzen der Dualitätseigenschaft (2.8) erhält man

$$a_k = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j (dx^j)_p \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_p \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i (dy^i)_p \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_p \right) = \sum_{i=1}^{n} b_i \, \frac{\partial y^i}{\partial x^k}\bigg|_p . \tag{2.23}$$

Es muss nachgewiesen werden, dass die Kartenwechsel innerhalb von $(T^*U_\alpha, \tilde{\phi}_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ die C^∞-Eigenschaft besitzen. Falls $\phi_\alpha = (x^1, \ldots, x^n)$ und $\phi_\beta = (y^1, \ldots, y^n)$, dann ist die Abbildung

$$\tilde{\phi}_\alpha \circ \tilde{\phi}_\beta^{-1} \colon \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \tag{2.24}$$

gegeben durch

$$\Big(\phi_\beta(p), b_1, \ldots, b_n\Big) \xmapsto{\tilde{\phi}_\beta^{-1}} \left(p, \sum_{i=1}^n b_i (dy^i)_p\right) \xmapsto{\tilde{\phi}_\alpha} \Big((\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})(\phi_\beta(p)), a_1, \ldots, a_n\Big), \tag{2.25}$$

wobei nach (2.23) gilt

$$a_k = \sum_{i=1}^n b_i \left.\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\right|_p \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^n b_i \left.\frac{\partial(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})^i}{\partial r^k}\right|_{\phi_\alpha(p)}. \tag{2.26}$$

Die Umformung $(*)$ gilt nach [Tu10, Beispiel 6.24] mit r^k als die Projektion auf den k-ten kanonischen Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$. Per Definition ist $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ eine C^∞-Funktion und somit ist insgesamt auch $\tilde{\phi}_\alpha \circ \tilde{\phi}_\beta^{-1}$ eine C^∞-Funktion. Damit ist gezeigt, dass T^*M eine C^∞-Mannigfaltigkeit ist, mit $(T^*U_\alpha, \tilde{\phi}_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ als C^∞-Atlas. □

2.3.3 Vektorbündel

In der bisherigen Konstruktion des Kotangentialbündels T^*M war auffällig, dass unter Berücksichtigung der natürlichen Koordinaten T^*M als eine Mannigfaltigkeit aufgefasst werden konnte, die sich lokal wie ein kartesisches Produkt aus der Mannigfaltigkeit M und dem $\mathbb{R}^n$ verhält. Solche Strukturen treten häufiger auf—eine Familie von Vektorräumen, wobei jedes Familienmitglied mit einem Punkt auf der Mannigfaltigkeit assoziiert ist und sich die Mitglieder der Familie „zusammengesetzt“, wie das kartesische Produkt aus M und $\mathbb{R}^n$ verhalten, aber global eher „verdreht“ erscheinen. Im üblichen Sprachgebrauch heißen Strukturen mit dieser Eigenschaft *Vektorbündel* und Gegenstand der Untersuchung in diesem Abschnitt sein.

Die entwickelten Ideen zu diesem Abschnitt beziehen sich auf [Tu10, Abschnitt 12.3] und [Lee12, Kapitel 10].

Definition 2.3.6 . Sei M ein topologischer Raum. Ein *(reelles) Vektorbündel über M vom Rang k* ist ein topologischer Raum E und eine surjektive, stetige Abbildung $\pi \colon E \to M$, die folgenden Eigenschaften genügt

(i) Für jedes $p \in M$ trägt die Faser $E_p := \pi^{-1}(p)$ die Struktur eines k-dimensionalen Vektorraumes.

(ii) Für jedes $p \in M$ existiert eine Umgebung U von p in M und ein Homöomorphismus $\Phi \colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ (die *lokale Trivialisierung von E über U* genannt), die folgenden Eigenschaften genügt:

- $\pi_U \circ \Phi = \pi$ (wobei $\pi_U \colon U \times \mathbb{R}^k \to U$ die Projektion darstellt)
- für jedes $q \in U$ ist die Einschränkung von Φ auf E_q ein Vektorraumisomorphismus von E_q nach $\{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$

Für das Vektorbündel über M vom Rang k hat man folgende graphische Visualisierung als kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} E \supseteq \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^k \arrow[d, "\pi_U"] \\ & U \subseteq M \end{tikzcd} \tag{2.27}$$

Für gewöhnlich bezeichnet man E als den *Totalraum des Bündels*, M man als dessen *Basis* und π als dessen *Projektion*.

Falls M und E jeweils C^∞-Mannigfaltigkeiten sind, π eine C^∞-Abbildung und die lokalen Trivialisierungen zudem Diffeomorphismen, dann bezeichnet man E als ein C^∞-Vektorbündel. In diesem Fall wird jede lokale Trivialisierung, die einen Diffeomorphismus auf ihr Bild darstellt, auch *lokale C^∞-Trivialisierung* genannt.

Es herrschen einige übliche abkürzende Sprechweisen für ein Vektorbündel vor und so spricht man meistens von dem Tripel (E, M, π) bzw. $\pi\colon E \to M$ als dem „Vektorbündel E über M".

Satz 2.3.7 . *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, T^*M das zugehörige Kotangentialbündel. Mit der natürlichen Projektionsabbildung, der natürlichen Vektorraumstruktur auf jeder Faser, der induzierten Topologie auf T^*M und der C^∞-Struktur, wie sie in Satz 2.3.5 konstruiert wurde, kann T^*M als ein C^∞-Vektorbündel über M vom Rang n aufgefasst werden.*

Beweis. Sei eine beliebige offene Koordinatenumgebung $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ auf M gegeben, dann definiert man eine Abbildung $\Phi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ durch

$$\Phi\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i (dx^i)_p\Big) = (p, c_1, \ldots, c_n). \tag{2.28}$$

Diese Abbildung ist offensichtlich linear auf jeder Faser und erfüllt $\pi_U \circ \Phi = \pi$. Man stellt fest, dass die komposite Abbildung

$$\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\Phi} U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\phi \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \phi(U) \times \mathbb{R}^n \tag{2.29}$$

gerade die Koordinatenabbildung $\tilde{\phi}$ aus (2.16) darstellt. Nach [Tu10, Proposition 6.10] sind Koordinatenabbildungen Diffeomorphismen und da die Abbildung $\phi \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ ebenfalls ein Diffeomorphismus ist, muss auch Φ ein Diffeomorphismus sein. Somit sind alle Bedingungen aus der Definition 2.3.6 erfüllt, damit Φ eine lokale C^∞-Trivialisierung ist. □

Korrekterweise ist mit den neuen Begriffen das Kotangentialbündel einer Mannigfaltigkeit M eigentlich das Tripel (T^*M, M, π) gemeint, doch dies wird meist einfach zu T^*M abgekürzt.

Definition 2.3.8 . Sei $\pi\colon E \to M$ ein Vektorbündel. Ein *Schnitt in* E ist eine Abbildung $s\colon M \to E$, so dass gilt $\pi \circ s \to \mathrm{id}_M$. Falls M eine C^∞-Mannigfaltigkeit ist und E ein C^∞-Vektorbündel, dann bezeichnet man einen Schnitt als C^∞, falls dieser eine C^∞-Abbildung von seinem Definitionsbereich nach E darstellt.

Es wurden damit die notwendigen Voraussetzungen getroffen, um eine 1-Form auf einer Mannigfaltigkeit M formal zu charakterisieren.

Definition 2.3.9 . Eine 1-*Form auf der Mannigfaltigkeit* M ist ein Schnitt ω in das Kotangentialbündel T^*M, also eine Abbildung $\omega\colon M \to T^*M$ mit der Eigenschaft $\pi \circ \omega = \mathrm{Id}_M$. Eine 1-Form ω nennt man C^∞, falls diese C^∞ ist als Abbildung von M nach T^*M mit (T^*M, M, π) als C^∞-Vektorbündel.

Es soll noch ein verallgemeinerter Basisbegriff für ein Vektorbündel eingeführt werden;

Definition 2.3.10 . Für ein Vektorbündel $\pi\colon E \to M$ ist der *Rahmen über einer offenen Menge* $U \subseteq M$ eine Familie von Schnitten $\{s_i\}_{i\in\{1,\ldots,r\}}$ mit $s_i\colon U \to E$, so dass die Familie $\{s_i(p)\}_{i\in\{1,\ldots,r\}}$ für jedes $p \in U$ eine Basis für die Faser $E_p = \pi^{-1}(p)$ bildet. Ein Rahmen $\{s_i\}_{i\in\{1,\ldots,r\}}$ für M über U wird C^∞ genannt, falls jedes Familienmitglied der Familie $\{s_i\}_{i\in\{1,\ldots,r\}}$ einen C^∞-Schnitt darstellt.

Für das Objekt des stetigen bzw. glatten Rahmens, gilt folgende äquivalente Charakterisierung, die sich bei der Einführung des Begriffs der Orientierung einer Mannigfaltigkeit von großer Bedeutung erweisen wird.

Satz 2.3.11 . *Sei (E, M, π) ein C^∞-Vektorbündel ist und $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge der Mannigfaltigkeit M. Angenommen die Familie $\{s_i\}_{i\in\{1,\ldots,r\}}$ ist ein C^∞-Rahmen für E über U, dann ist ein Schnitt $s = \sum_{j=1}^r c^j s_j\colon U \to E$ in E genau dann C^∞, wenn alle Koeffizienten c^i C^∞-Funktionen auf U sind.*

Beweis. [Tu10, Proposition 12.12] □

2.4 Eigenschaften für glatte 1-Formen

Ausgehend von der Definition 2.3.9 sollen nun „handlichere" Charakterisierungen einer 1-Form $\omega\colon M \to T^*M$ C^∞ zu sein, ausgearbeitet werden. Die Menge aller C^∞ 1-Formen auf einer Mannigfaltigkeit M bildet einen Vektorraum, welcher durch das Symbol $\Omega^1(M)$ belegt werden soll. In einer Koordinatenumgebung $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M kann nach Satz 2.2.1 der Wert einer 1-Form ω in einem Punkt $p \in U$ folgendermaßen dargestellt werden

$$\omega_p = \sum_{i=1}^n a_i(p)(dx^i)_p. \tag{2.30}$$

Wenn p in der Umgebung U variiert, erkennt man in dieser Darstellung, dass die Koeffizienten a_i dann zu Funktionen auf U werden. Man kann nun Bedingungen an die Koeffizienten a_i stellen, damit eine 1-Form C^∞ ist. Dem Abschnitt 2.3.1 entnimmt man, dass die Karte (U, ϕ) auf M eine Karte

$$(T^*U, \tilde{\phi}) = \Big(T^*U, \big(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, c_1, \dots, c_n\big)\Big) \tag{2.31}$$

auf T^*M induziert, wobei $\tilde{x}^i = x^i \circ \pi$ und die Koeffizienten c_i definiert sind durch

$$\alpha = \sum_{i=1}^n c_i(\alpha)(dx^i)_p, \quad \alpha \in (T_pM)^*. \tag{2.32}$$

(2.30) und (2.32) geben nun Anlass ω_p in zwei Wegen aufzufassen

$$\omega_p = \sum_{i=1}^n a_i(p)(dx^i)_p. = \sum_{i=1}^n c_i(\omega_p)(dx^i)_p, \tag{2.33}$$

womit man $a_i = c_i \circ \omega$ erhält als Funktion auf U erhält. Damit kann folgendes Lemma formuliert werden.

Lemma 2.4.1 . *Sei $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ eine Karte auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Eine 1-Form $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx^i$ auf U ist genau dann C^∞, wenn alle Koeffizientenfunktionen a_i C^∞ sind.*

Beweis. Wie bereits erwähnt sind nach nach [Tu10, Proposition 6.10] Koordinatenabbildungen Diffeomorphismen und somit insbesondere C^∞. $\omega \colon U \to T^*U$ ist also genau dann C^∞, falls $\tilde{\phi} \circ \omega \colon U \to U \times \mathbb{R}^n$ C^∞ ist, wobei $\tilde{\phi} \colon T^*U \to U \times \mathbb{R}^n$ als Karte nach [Tu10, Proposition 6.10] C^∞ ist. Für $p \in U$ gilt nach (2.33)

$$\begin{aligned} (\tilde{\phi} \circ \omega)(p) = \tilde{\phi}(\omega_p) &= \big(x^1(p), \dots, x^n(p), c_1(\omega_p), \dots, c_n(\omega_p)\big) \\ &= \big(\phi(p), a_1(p), \dots, a_n(p)\big) \end{aligned} \tag{2.34}$$

Nach [Tu10, Proposition 6.13] ist die Koordinatenfunktionen x^i eine C^∞-Funktion auf U und somit folgt mit [Tu10, Proposition 6.13], dass $\tilde{\phi} \circ \omega$ genau dann C^∞ ist, falls alle a_i C^∞-Funktionen auf U sind. □

Satz 2.4.2 (C^∞-Charakterisierung einer 1-Form). *Sei ω eine 1-Form auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Dann sind äquivalent:*

(a) *Die 1-Form $\omega \colon M \to T^*M$ ist C^∞ auf M.*

(b) *Die Mannigfaltigkeit M besitzt einen Atlas, so dass auf jeder Karte (U, ϕ) des Atlas' die Koeffizienten a_i bezüglich des Rahmens $\{dx^i\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$ mit $\omega = \sum_{i=1}^n a_i\, dx^i$ glatt sind.*

(c) *Auf jeder beliebigen Karte (U, ϕ) der Mannigfaltigkeit M, sind die Koeffizienten a_i bezüglich des Rahmens $\{dx^i\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$ mit $\omega = \sum_{i=1}^n a_i\, dx^i$ glatte Funktionen.*

Beweis. [Tu10, Proposition 17.6] bzw. [Tu10, Proposition 14.2] □

Folgerung 2.4.3 . *Falls $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion ist, dann ist dessen Differential $df \in \Omega^1(M)$, also eine C^∞-Abbildung.*

Beweis. Nach Folgerung 2.2.2 ist bekannt, dass df auf der Karte (U, ϕ) lokal geschrieben werden kann als

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i. \tag{2.35}$$

Die Aussage folgt nun aus (c) des Satzes 2.4.2. □

Falls $\omega\colon M \to T^*M$ eine 1-Form auf M ist und $X\colon M \to TM$ ein Vektorfeld auf M ist, dann soll die Funktion $\omega(X)\colon M \to \mathbb{R}$ auf M punktweise erklärt werden:

$$\omega(X)_p = \omega_p(X_p). \tag{2.36}$$

Satz 2.4.4 . *Sei $\omega\colon M \to T^*M$ eine 1-Form auf einer Mannigfaltigkeit M. Ist $f\colon M \to \mathbb{R}$ und $X\colon M \to TM$ ein Vektorfeld auf M, dann gilt $\omega(fX)) = f\omega(X)$.*

Beweis. Für jeden Punkt $p \in M$ gilt mit der Linearität von ω_p

$$\left(\omega\left(fX\right)\right)_p = \omega_p\left(f(p)X_p\right) = f(p)\omega_p(X_p) = \Big(f\omega(X)\Big)_p. \tag{2.37}$$

Dies zeigt die Aussage. □

Satz 2.4.5 . *Sei $\omega\colon M \to T^*M$ eine 1-Form auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Dann sind äquivalent:*

(a) $\omega \in \Omega^1(M)$

(b) *Für jedes C^∞-Vektorfeld $X\colon M \to TM$ ist die Funktion $\omega(X)\colon M \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion.*

Beweis. Es möge (a) gelten. Sei dazu X ein C^∞-Vektorfeld $X\colon M \to TM$ und $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ eine Karte auf M. Auf der Umgebung U gilt dann lokal

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i\, dx^i \text{ und } X = \sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{2.38}$$

Nach Satz 2.4.2 sind die Funktionen $a_i\colon M \to \mathbb{R}$ glatt und nach [Tu10, Proposition 14.2] sind die Funktionen $b^j\colon M \to \mathbb{R}$ glatt. Mit Hilfe der Linearitätseigenschaft aus dem Satz 2.4.4 und der Dualität aus Satz 2.2.1 gilt folgende Rechnung

$$\omega(X) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, dx^i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b^j \delta^i_j = \sum_{i=1}^{n} a_i b^i. \tag{2.39}$$

Somit ist also $\omega(X)$ eine glatte Funktion auf U. Da U beliebig gewählt war, ist $\omega(X)\colon M \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion. Damit folgt (b) aus (a).

Es soll nun (b) gelten. Sei $p \in M$ und $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ eine Koordinatenumgebung um p, dann gilt lokal $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i\, dx^i$ für Funktionen $a_i\colon M \to \mathbb{R}$.

Fixiert man ein $j \in \{1, \ldots, n\}$, dann kann man Hilfe von [Tu10, Proposition 14.4] das C^∞-Vektorfeld $X = \partial/\partial x^j \colon U \to TU$ zu einem C^∞-Vektorfeld $\tilde{X}M \to TM$ auf ganz M fortgesetzt werden, für welches gilt $X_q = \tilde{X}_q$ für alle $q \in V_p^j$ mit V_p^j ist Umgebung von p und $V_p^j \subseteq U$. Auf der Umgebung V_p^j gilt

$$\omega \tilde{X} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i dx^i \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = a_j. \tag{2.40}$$

Da (b) gilt, ist also a_j glatt auf der Umgebung V_p^j. Auf der Menge $V_p := \bigcap_{j \in 1,\ldots,n} V_p^j$ sind alle a_j glatt. Nach Lemma 2.4.1 folgt, dass ω auf V_p glatt ist. Damit kann für jedes $p \in M$ eine Umgebung V_p angegeben werden auf der ω glatt ist. (a) folgt dann aus (b) mit Hilfe von Satz 2.4.2. □

2.5 Pullback einer 1-Form

Für eine C^∞-Abbildung $F \colon N \to M$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten N und M wurde für jeden Punkt $p \in N$ in der Definition 2.1.2 das Differential $F_{*,p} \colon T_pN \to T_{F(p)}M$ erklärt. Dies stellt eine lineare Abbildung dar, welche Tangentialvektoren aus T_pM nach „vorn schickt“ (engl. *push forward*). Es soll der *Pullback* definiert werden.

Definition 2.5.1 . Sei $F \colon N \to M$ eine C^∞-Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten N und M und $\omega \colon M \to T^*M$ eine 1-Form auf M. Dann ist der *Pullback von ω unter F*, als die Abbildung $F^*\omega \colon N \to T^*N$ für alle $p \in N$ und für alle $v \in T_pN$ erklärt durch

$$\left(F^*\omega\right)_p (v) = \omega_{F(p)} \left(F_* v\right). \tag{2.41}$$

Mit den folgenden beiden Sätzen kann die Frage beantwortet werden, ob der Pullback einer glatten 1-Form unter einer glatten Abbildung wieder glatt ist.

Satz 2.5.2 (Pullback kommutiert mit d). *Sei $F \colon N \to M$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten N und M. Dann gilt für jede Funktion $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, dass*

$$F^*(dh) = d(F^*h), \tag{2.42}$$

wobei $F^*h := h \circ F \in C^\infty(N, \mathbb{R})$.

Beweis. Für jeden Punkt $p \in N$ und jeden Tangentialvektor $X_p \in T_pN$ muss gezeigt werden

$$\left(F^*(dh)\right)_p (X_p) = \left(dF^*h\right)_p (X_p) \tag{2.43}$$

Für die linke Seite ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(F^*(dh)\right)_p (X_p) &= (dh)_{F(p)} \left(F_* (X_p)\right) && \text{(Definition 2.5.1 des Pullbacks)} \\ &= \left(F_* (X_p)\right) h && \text{(Definition 2.1.3 von } dh\text{)} \\ &= X_p(h \circ F) && \text{(Definition 2.1.2 von } F_*\text{)} \end{aligned} \tag{2.44}$$

und für die rechte Seite

$$\begin{aligned}\left(dF^*h\right)_p(X_p) &= X_p(F^*h) && \text{(Definition von } d \text{ nach 2.1.3)}\\ &= X_p(h\circ F) && \text{(Definition von } F^* \text{ für eine Funktion).}\end{aligned} \tag{2.45}$$

Damit ist die Aussage bewiesen. □

Satz 2.5.3 . *Sei $F\colon N\to M$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten N und M. Falls $\omega,\tau\in\Omega^1(M)$ und $g\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ dann gilt*

(1) $F^*(\omega+\tau)=F^*\omega+F^*\tau$

(2) $F^*(g\omega)=(F^*g)(F^*\omega)$.

Beweis. Zu (1): Sei $p\in N$ und $X_p\in T_pN$, dann gilt für die linke Seite mit Hilfe der Definition 2.5.1 des Pullbacks und $\Omega^1(M)$ als Vektorraum

$$\begin{aligned}\left(F^*(\omega+\tau)\right)_p(X_p) &= (\omega+\tau)_{F(p)}\left(F_*(X_p)\right)\\ &= \omega_{F(p)}\left(F_*(X_p)\right)+\tau_{F(p)}\left(F_*(X_p)\right)\\ &= (F^*\omega)_p(X_p)+(F^*\tau)_p(X_p).\end{aligned} \tag{2.46}$$

Zu (2): Sei $p\in N$ und $X_p\in T_pN$, dann gelten folgende Umformungen

$$\begin{aligned}\left(F^*(g\omega)\right)_p &= (g\omega)_{F(p)}\left(F_*\left(X_p\right)\right)\\ &= g\left(F(p)\right)\left[\omega_{F(p)}\left(F_*\left(X_p\right)\right)\right]\\ &= (g\circ F)(p)\left[(F^*\omega)_p\left(X_p\right)\right]\\ &= (F^*g)_p\left[(F^*\omega)_p\left(X_p\right)\right]\end{aligned}$$

□

Satz 2.5.4 (Pullback einer C^∞ 1-Form). *Seien N und M jeweils n- und m-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Wenn $\omega\colon M\to T^*M$ glatt und die Abbildung $F\colon N\to M$ glatt ist, dann ist auch $F^*\omega\colon N\to T^*N$ glatt.*

Beweis. Sei $p\in N$ und $(V,\psi)=(V,y^1,\ldots,y^m)$ eine beliebige Karte auf M um $F(p)$. Nach [Lee12, Proposition 2.4] ist jede C^∞-Abbildung auch stetig und somit existiert für F eine Karte $(U,\phi)=(U,x^1,\ldots,x^n)$ auf N um p, so dass $F(U)\subset V$. Lokal gilt auf der Umgebung V, dass $\omega=\sum_{i=1}^m a_i dy^i$, wobei $a_i\in C^\infty(V,\mathbb{R})$. Auf der Umgebung U gilt lokal

$$\begin{aligned}F^*\omega &= \sum_{i=1}^m (F^*a_i)F^*(dy^i) && \text{(Satz 2.5.3)}\\ &= \sum_{i=1}^m (F^*a_i)dF^*y^i && \text{(Satz 2.5.2)}\\ &= \sum_{i=1}^m (a_i\circ F)d(y^i\circ F) && \text{(Definition 2.1.2 von } F_*)\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \underbrace{(a_i \circ F) \frac{\partial F^i}{\partial x^j}}_{=:C_{i,j}} dx^j \quad \text{(Definition 2.1.3 von } d \text{ und } F(U) \subset V) \tag{2.47}$$

Da die Koeffizienten $C_{i,j}$ alle C^∞ sind, ist nach Lemma 2.4.1 $F^*\omega$ glatt auf U und somit auch im Punkt p. Da $p \in N$ beliebig gewählt war, ist $F^*\omega$ in jedem Punkt auf N glatt und damit ist der Pullback $F^*\omega$ glatt auf N. □

3 Differentielle k-Formen

In Kapitel 2 wurde der Dualraum $(T_pM)^*$ einer Mannigfaltigkeit M für $p \in M$ untersucht. Dabei spielte das Differential df einer C^∞-Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine besonders wichtige Rolle, denn damit konnte auf jeder Karte U von M eine Basis für den Dualraum $(T_pM)^*$ angegeben werden und ermöglichte eine lokale Darstellung für Elemente aus $(T_pM)^*$. Mit dieser lokalen Darstellung ließ sich das Kotangentialbündel T^*M selbst als eine Mannigfaltigkeit auffassen. Hatte man diesen Schritt vollzogen, wurden 1-Formen als Schnitte in das Kotangentialbündel T^*M definiert. Besonderes Augenmerk wurde dabei auf glatte 1-Formen gelegt.

In diesem Kapitel soll die in Kapitel 2 entwickelte Prozedur auf den Vektorraum $A_k(T_pM)$ übertragen werden. [Tu10, Kapitel 18] gilt als Leitfaden für die hier entwickelte Darstellung des Sachverhaltes.

3.1 Lokale Darstellung einer k-Form

Sei $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ Karte einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Für jeden Punkt $p \in U$ ist die Menge $\{\partial/\partial x^i|_p\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ eine Basis für den Raum T_pU. Laut Satz 2.2.1 ist die Menge $\{(dx^i)_p\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ eine Basis für den Raum $(T_pU)^*$. Es kommen nun die in Kapitel 1 ausgearbeiteten Aussagen zum Tragen. Wendet man die Aussage des Satzes 1.5.2 auf die vorliegende Situation an, so erkennt man, dass die Familie aller

$$(dx^{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx^{i_k})_p, \text{ mit } 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n \tag{3.1}$$

eine Basis für den Raum $A_k(T_pU)$ bildet. Ist also $\omega_p \in A_k(T_pU)$, dann gilt

$$\omega_p = \sum_I{}' \, a_{i_1,\dots,i_k}(p) \, (dx^{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx^{i_k})_p, \tag{3.2}$$

wobei die Schreibweise aus (1.55) verwendet wurde und $I = \{i_1, \dots, i_k\} \in I_{k,n}$ ein Multiindex der Länge k ist. Eine differentielle k-Form ist nun eine Abbildung ω die jedem Punkt $p \in M$ einen k-Kovektor $\omega_p \in A_k(T_pM)$ zuordnet und somit kann ω lokal auf der Umgebung U geschrieben werden als

$$\omega = \sum_I{}' \, a_{i_1,\dots,i_k} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1,\dots,i_k} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \tag{3.3}$$

oder noch kompakter

$$\omega = \sum_I{}' \, a_I \, dx^I, \tag{3.4}$$

wobei die Koeffizienten $a_{i_1,\ldots,i_k}$ dann Funktionen auf U darstellen.

Falls ω eine k-Form auf einer Mannigfaltigkeit M ist und $\{X_i\}_{i\in\{1,\ldots,k\}}$ eine endliche Familie von Vektorfeldern, dann ist $\omega(X_1,\ldots,X_k)$ als Funktion auf M für jedes $p\in M$ definiert durch

$$(\omega(X_1,\ldots,X_k))(p)=\omega_p((X_1)_p,\ldots,(X_k)_p). \tag{3.5}$$

Das Resultat aus Lemma 1.5.1 für streng wachsend angeordnete Multiindizes $\vec{I},\vec{J}\in\vec{I}_{k,n}$ übersetzt sich nun in der vorliegenden Situation lokal auf der Karte $(U,x^1,\ldots,x^n)$ zu

$$\begin{aligned} dx^{\vec{I}}(\partial/\partial x^{\vec{J}}) &= dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\left(\partial/\partial x^{j_1},\ldots,\partial/\partial x^{j_k}\right)\\ &= \delta^{\vec{I}}_{\vec{J}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \vec{I}=\vec{J},\\ 0 & \text{falls } \vec{I}\neq\vec{J}. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Vielfach wird später auch die Aussage des folgenden Satzes seine Anwendung finden.

Satz 3.1.1 . *Sei $(U,\phi)=(U,x^1,\ldots,x^n)$ eine Koordinatenumgebung einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M und $\{f^i\}_{i\in\{1,\ldots,k\}}\subseteq C^\infty(U,\mathbb{R})$ eine Familie von Funktionen auf U. Dann gilt*

$$df^1\wedge\cdots\wedge df^k=\sum_{I\in\vec{I}_{k,n}}\left(\det\left[\frac{\partial f^i}{\partial x^{i_j}}\right]\right)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} \tag{3.7}$$

Beweis. Auf U gilt mit den Funktionen $c_{\vec{J}}$ und dem streng wachsenden Multiindex $\vec{J}\in\vec{I}_{k,n}$ der Länge k

$$df^1\wedge\cdots\wedge df^k={\sum_J}' c_J\,dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}. \tag{3.8}$$

Wendet man nun beide Seiten dieser Gleichung auf das Vektorfeld $(\partial/\partial x^{i_1},\ldots,\partial/\partial x^{i_1})$ mit $\vec{I}:=\{i_1,\ldots,i_k\}\in\vec{I}_{k,n}$ an, dann erhält man für die linke Seite mittels (1.39)

$$(df^1\wedge\cdots\wedge df^k)(\partial/\partial x^{i_1},\ldots,\partial/\partial x^{i_1})=\det\left[\frac{\partial f^i}{\partial x^{i_j}}\right] \tag{3.9}$$

und für die rechte Seite mittels der Dualitätseigenschaft aus (3.6)

$${\sum_J}' c_J\,dx^J(\partial/\partial x^{i_1},\ldots,\partial/\partial x^{i_1})={\sum_J}' c_J\delta^J_{\vec{I}}=c_{\vec{I}} \tag{3.10}$$

Also ist insgesamt $c_{\vec{I}}$ die Determinante der Jacobi-Matrix $(\partial f^i/\partial x^{i_j})_{i\in\{1,\ldots,k\},i_j\in\vec{I}}$. □

3.2 Betrachtungen mittels des Vektorbündels

Ganz analog zu dem Abschnitt 2.3 kann die Menge

$$\Lambda^k(T^*M) := \bigsqcup_{p\in M} A_k(T_pM) \tag{3.11}$$

aller k-Kovektoren im Punkt p der Mannigfaltigkeit M selbst als eine Mannigfaltigkeit beschrieben werden. Es soll hier nur grob der Zugang erklärt werden, da die notwendigen Schritte ganz analog zu Abschnitt 2.3 verstanden werden können, lediglich die Notation muss angepasst werden;

Es existiert wieder eine natürliche Projektionsabbildung $\pi\colon \Lambda^k(T^*M) \to M$ gegeben durch $\pi(\alpha) = p$ für $\alpha \in A_k(T_pM)$. Sei nun $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ eine Karte auf M und $p \in U$, dann kann nach (3.2) jedes $\omega_p \in A_k(T_pM)$ eindeutig geschrieben werden als

$$\omega_p = \sum_I{}' a_{i_1,\ldots,i_k}(p)\,(dx^{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx^{i_k})_p. \tag{3.12}$$

Damit liegt nun wieder die Idee für eine Bijektion $\tilde{\phi}$ vor

$$\tilde{\phi}\colon \Lambda^k(T^*U) \to \phi(U) \times \mathbb{R}^{\binom{n}{k}} \tag{3.13}$$

$$\alpha \in \Lambda^k(T^*U) \mapsto \Big(\phi(p), \{c_{\vec{I}}(\alpha)\}_{\vec{I}\in\vec{I}_{k,n}}\Big), \tag{3.14}$$

wobei $\alpha = \sum_I{}' c_I(\alpha)(dx^I)_p$ und sich die Dimension $n!/k!(n-k)!$ aus der Folgerung 1.5.3 ergibt. In diesem Sinne kann auf $\Lambda^k(T^*M)$ eine natürliche Topologie konstruiert und zudem eine differenzierbare Struktur gewonnen werden.

Resultat dieser Überlegungen ist, dass : $\Lambda^k(T^*M) \to M$ ein C^∞-Vektorbündel vom Rang $n!/k!(n-k)!$ ist und eine differentielle k-Form $\omega\colon M \to \Lambda^k(T^*M)$ auf M ein Schnitt in dieses Bündel darstellt. Man spricht von einer glatten k-Form $\omega\colon M \to \Lambda^k(T^*M)$ auf M, falls ω als Schnitt glatt ist. Die Menge aller glatten Schnitte in das C^∞-Vektorbündel $(\Lambda^k(T^*M), M, \pi)$ wird durch das Symbol $\Omega^k(M)$ belegt.

3.3 Eigenschaften für glatte k-Formen

Auch in diesem Abschnitt können ganz analoge Charakterisierungen für eine k-Form, wie in Abschnitt 2.4 angegeben werden. Die Sätze sollen deshalb hier nur lediglich aufgeführt werden, da die Beweise analog geführt werden. Der einzige Unterschied besteht in der Notation; tauchen in Abschnitt 2.4 lediglich einfache Indizes $i \in \{1, \ldots, n\}$ auf, so hat man es jetzt mit streng wachsenden Multiindizes $\vec{I} \in \vec{I}_{k,n}$ der Länge k zu tun.

Satz 3.3.1 . *Sei $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ eine Karte auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Eine k-Form $\omega = \sum_I{}' a_I\, dx^I$ auf U ist genau dann glatt, wenn alle Koeffizientenfunktionen a_I glatt sind, wobei $I \in I_{k,n}$.*

Satz 3.3.2 (C^∞-Charakterisierung von k-Formen). *Sei ω eine k-Form auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Dann sind äquivalent:*

(a) *Die k-Form $\omega\colon M \to \Lambda^k(T^*M)$ ist C^∞ auf M.*

(b) *Die Mannigfaltigkeit M besitzt einen Atlas, so dass auf jeder Karte (U, ϕ) des Atlas' die Koeffizienten a_I bezüglich des Rahmens $\{dx^{\vec{I}}\}_{\vec{I}\in\vec{I}_{k,n}}$ mit $\omega = \sum_I{}' \, a_I \, dx^I$ glatt sind.*

(c) *Auf jeder beliebigen Karte (U, ϕ) der Mannigfaltigkeit M, sind die Koeffizienten a_I bezüglich des Rahmens $\{dx^{\vec{I}}\}_{\vec{I}\in\vec{I}_{k,n}}$ mit $\omega = \sum_I{}' \, a_I \, dx^I$ glatte Funktionen.*

(d) *Für eine beliebige Familie $\{ X_i \}_{i\in\{1,\dots,k\}} \subseteq \mathfrak{X}(M)$ ist die Funktion $\omega(X_1, \dots, X_k) \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$.*

Es soll noch kurz kurz auf einen Zusammenhang von Objekten aufmerksam gemacht werden. In Kapitel 1 wurden 0-Kovektoren als Konstanten definiert, das heißt, es wurde $A_0(V) = \mathbb{R}$ gesetzt. Mit dieser Vereinbarung ist das Bündel $\Lambda^0(T^*M) = M \times \mathbb{R}$ und eine 0-Form auf M ist dann einfach eine Funktion auf M. Und damit gilt, in der hier verwendeten Notation $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Eine sehr wichtige Technik zur glatten Fortsetzung von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten stellt der nächste Satz bereit, dessen Beweis die Existenz einer glatten Sprungfunktion nutzt.

Satz 3.3.3 . *Sei $\tau\colon U \to T^*U$ eine glatte k-Form auf einer Umgebung U von $p \in M$, mit M als n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $V \subset U$ eine abgeschlossene Teilmenge, die ganz in U enthalten ist. Dann existiert eine glatte k-Form $\tilde{\tau}\colon M \to \Lambda^k(T^*M)$ mit der Eigenschaft $\tau_q = \tilde{\tau}_q$ für alle $q \in V$.*

Beweis. Es mögen die Voraussetzungen aus dem Satz gelten. Nach der Aussage in [Lee12, Proposition 2.25] existiert eine sogenannte C^∞-Sprungfunktion $\rho\colon M \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften, dass

$$\operatorname{supp}(\rho) = \overline{\{ q \in M\colon \rho(q) \neq 0 \}} \subseteq U \tag{3.15}$$

und $\rho(q) = 1$ für alle $q \in V$. Man setzt

$$\tilde{\tau}_q := \begin{cases} \rho(q)\tau_q & \text{falls } q \in U, \\ 0 & \text{falls } q \neq U. \end{cases} \tag{3.16}$$

Damit gilt, $\tilde{\tau}|_V = \tau$. Die Behauptung ist nun, dass $\tilde{\tau} \in \Omega^k(M)$.

Sei dazu $q \in U$, dann ist $\tilde{\tau}_q$ als Produkt mit der C^∞-Funktion ρ und der k-Form τ wieder C^∞. Das sieht man etwa so, indem man auf der Karte $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ die k-Form τ lokal ausdrückt und die Vektorraumstruktur von $A_k(T_pU)$ nutzt, also erhält man mit den C^∞-Funktionen $a_I\colon U \to \mathbb{R}$ und $I \in I_{k,N}$

$$\tilde{\tau}_q = \sum_I{}' \rho(p) a_I(p) \, (dx^I)_p. \tag{3.17}$$

Da das Produkt der Funktionen $\rho(p)a_I(p)$ wieder C^∞ ist, ist nach Satz 3.3.1 auch $\tilde{\tau}$ wieder C^∞ auf U und somit auch in q.

Sei nun $q \neq U$, dann ist $q \neq \operatorname{supp}(\rho)$ und da $\operatorname{supp}(\rho)$ eine abgeschlossene Menge ist, existiert eine offene Menge, die q enthält, auf welcher $\tilde{\tau} = 0$. Damit ist gezeigt, dass die k-Form $\tilde{\tau}$ in jedem Punkt $q \in M$ eine Element von $\Omega^k(M)$ ist. □

Satz 3.3.3 wird immer dann von großem Nutzen sein, wenn eine lokale Rechnung auf einer Karte ausgeführt wird, gewisse Operationen jedoch einen Definitionsbereich auf der ganzen Mannigfaltigkeit M benötigen. In solchen Situation ist dann eine glatte Fortsetzung mit gewissen Eigenschaften auf ganz M garantiert.

3.4 Pullback von k-Formen

Definition 3.4.1 . Sei $F\colon N \to M$ eine C^∞-Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten N und M und $\omega\colon M \to T^*M$ eine k-Form auf M. Dann ist der *Pullback von ω unter F*, als die Abbildung $F^*\omega\colon N \to T^*N$ für alle $p \in N$ und jede Familie $\{v_i\}_{i\in\{1,\ldots,k\}} \subseteq T_pN$ erklärt durch

$$(F^*\omega)_p\,(v_1,\ldots,v_k) = \omega_{F(p)}\,(F_*v_1,\ldots,F_*v_k)\,. \tag{3.18}$$

Satz 3.4.2 . *Seien N und M Mannigfaltigkeiten und $F\colon N \to M$ eine C^∞-Abbildung. Falls ω,τ jeweils k-Formen auf M sind und $g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, dann gilt*

(1) $F^*(\omega+\tau) = F^*\omega + F^*\tau$

(2) $F^*(g\omega) = (F^*g)(F^*\omega)$

Beweis. Zu (1): Sei $p \in N$ und $v_i \in T_pN$, dann gilt mit der Vektorraumstrukturen in $A_k(T_{F(p)}M)$

$$\begin{aligned} F^*(\omega+\tau)_p(v_1,\ldots,v_k) &= F^*\Big((\omega+\tau)_{F(p)}\Big)\,(v_1,\ldots,v_k)\\ &= (\omega+\tau)_{F(p)}\,(F_{*,p}v_1,\ldots,F_{*,p}v_k)\\ &= \omega_{F(p)}\,(F_{*,p}v_1,\ldots,F_{*,p}v_k) + \tau_{F(p)}\,(F_{*,p}v_1,\ldots,F_{*,p}v_k)\\ &= (F^*\omega)_p(v_1,\ldots,v_k) + (F^*\tau)_p(v_1,\ldots,v_k) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Zu (2): Mit den selben Voraussetzungen wie in (1) und Nutzen der Vektorraumstruktur in $A_k(T_{F(p)}M)$:

$$\begin{aligned} F^*(g\omega)_p(v_1,\ldots,v_k) &= F^*\Big((g\omega)_{F(p)}\Big)\,(v_1,\ldots,v_k)\\ &= (g\omega)_{F(p)}\,(F_{*,p}v_1,\ldots,F_{*,p}v_k)\\ &= g\Big(F(p)\Big)\omega_{F(p)}\,(F_{*,p}v_1,\ldots,F_{*,p}v_k)\\ &= (F^*g)(F^*\omega)_p(v_1,\ldots,v_k) \end{aligned} \tag{3.20}$$

□

Und ganz ähnlich zu Kapitel 2 stellt sich auch hier wieder die Frage, ob der Pullback unter einer glatten Funktion wieder glatt ist. Um diese Frage zu beantworten, wird zunächst ein Zusammenhang zwischen dem Keilprodukt und dem Pullback benötigt.

3.5 Keilprodukt

In der Definition 1.4.1 wurde das Keilprodukt erklärt. Es ist vollkommen klar, dass dieses sich punktweise auch für Differentialformen $\omega\colon M \to \Lambda^k(T^*M)$ und $\tau\colon M \to \Lambda^l(T^*M)$ auf einer Mannigfaltigkeit M definieren lässt:

$$\omega \wedge \tau\colon M \to \Lambda^{k+l}(T^*M) \tag{3.21a}$$

$$(\omega \wedge \tau)_p = \omega_p \wedge \tau_p. \tag{3.21b}$$

Satz 3.5.1 . *Falls ω und τ jeweils glatte Differentialformen auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M sind, dann ist auch $\omega \wedge \tau$ glatt auf M.*

Beweis. Sei $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ eine Karte auf M. Lokal gilt auf U

$$\omega = \sum_I{}' a_I \, dx^I, \quad \tau = \sum_J{}' b_J \, dx^J, \tag{3.22}$$

wobei $a_I, b_J \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Mit Hilfe der Bilinearität des Keilproduktes aus (1.36a) gilt auf U

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \tau &= \left(\sum_I{}' a_I \, dx^I\right) \wedge \left(\sum_J{}' b_J \, dx^J\right) \\
&= \sum_I{}' \sum_J{}' a_I b_J \, dx^I \wedge dx^J \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{\vec{K}} \Bigg(\sum_{\substack{\vec{I} \cup \vec{J} = \vec{K} \\ \vec{I} \cap \vec{J} = \emptyset}} \pm a_{\vec{I}} b_{\vec{J}} \Bigg) dx^{\vec{K}}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

In $(*)$ sind die Keilprodukte $dx^{\vec{I}} \wedge dx^{\vec{J}}$ gerade dann 0, falls die streng wachsenden Multiindizes $\vec{I}, \vec{J}$ irgendeinen Index gemeinsam haben. Daher tragen nur solche Multiindizes $K = \vec{I} \cup \vec{J}$ bei mit $I \cap J = \emptyset$. Jeder Multiindex K kann streng wachsend angeordnet werden, was das Vorzeichen $dx^{\vec{I}} \wedge dx^{\vec{J}} = \pm dx^K$ erklärt. Letztlich liest man in (3.23) ab, dass alle Koeffizienten von $\omega \wedge \tau$ glatt auf U sind. Damit ist nach Satz 3.3.2 $\omega \wedge \tau$ auch glatt auf M. □

Satz 3.5.2 (Pullback eines Keilproduktes). *Seien $\omega\colon M \to \Lambda^k(T^*M)$ und $\tau\colon M \to \Lambda^l(T^*M)$ Differentialformen auf einer Mannigfaltigkeit M und $F\colon N \to M$ eine glatte Abbildung zwischen den Mannigfaltigkeiten N und M, dann gilt*

$$F^*(\omega \wedge \tau) = F^*\omega \wedge F^*\tau \tag{3.24}$$

Beweis. Sei $p \in N$ und $v_i \in T_pN$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
(F^*(\omega \wedge \tau))_p(v_1, \dots, v_k, \dots, v_{k+l}) &= F^*\left((\omega \wedge \tau)_{F(p)}\right)(v_1, \dots, v_k, \dots, v_{k+l}) \\
&= (\omega \wedge \tau)_{F(p)}(F_{*,p}v_1, \dots, F_{*,p}v_k, \dots, F_{*,p}v_{k+l}) \\
&\overset{(1.35)}{=} \sum_{\sigma \in S(k,l)} \Big[(\operatorname{sgn} \sigma) \omega_{F(p)}(F_{*,p}v_{\sigma(1)}, \dots, F_{*,p}v_{\sigma(k)})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad \times \tau_{F(p)}\big(F_{*,p}v_{\sigma(k+1)}, \dots, F_{*,p}v_{\sigma(k+l)}\big)\Big] \\
&= \sum_{\sigma \in S(k,l)} \Big[(\operatorname{sgn}\sigma)(F^*\omega)_p\big(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}\big) \\
&\qquad \times (F^*\tau)_p\big(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}\big)\Big] \\
&= (F^*\omega)_p \wedge (F^*\tau)_p(v_1, \dots, v_k, \dots, v_{k+l})
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

Damit ist die Aussage bewiesen. □

Satz 3.5.3 . *Seien N und M jeweils n- und m-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Wenn $\omega\colon M \to \Lambda^k(T^*M)$ glatt und die Abbildung $F\colon N \to M$ glatt ist, dann ist auch $F^*\omega\colon N \to \Lambda^k(T^*N)$ glatt.*

Beweis. Sei $p \in N$ und $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^m)$ eine beliebige Karte auf M um $F(p)$. Nach [Lee12, Proposition 2.4] ist jede C^∞-Abbildung auch stetig und somit existiert für F eine Karte $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ auf N um p, so dass $F(U) \subset V$. Lokal gilt auf der Umgebung V, dass

$$
\omega = \sum_I{}' a_I \, dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}, \tag{3.26}
$$

wobei $a_I \in C^\infty(V, \mathbb{R})$. Auf der Umgebung U gilt lokal

$$
\begin{aligned}
F^*\omega &= \sum_I{}' (F^*a_I)\, F^*\left(dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}\right) && \text{(Satz 3.4.2)} \\
&= \sum_I{}' (F^*a_I)\, F^*dy^{i_1} \wedge \dots \wedge F^*dy^{i_k} && \text{(Satz 3.5.2)} \\
&= \sum_I{}' (F^*a_I)\, dF^*y^{i_1} \wedge \dots \wedge dF^*y^{i_k} && \text{(Satz 2.5.2)} \\
&= \sum_I{}' (F^*a_I)\, dF^{i_1} \wedge \dots \wedge dF^{i_k} && (F^*y^i = y^i \circ F = F^i) \\
&= \sum_J{}' \sum_I{}' (a_I \circ F) \left(\det \left[\frac{\partial F^{i_k}}{\partial x^{j_l}}\right]\right) dx^J && (\text{Satz 3.1.1 und } F(U) \subset V)
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

Insgesamt sind die Funktionen $(a_I \circ F)$ und die Jacobi-Matrix $[\partial F^{i_k}/\partial x^{j_l}]$ alle C^∞ auf U und somit ist nach 3.3.1 $F^*\omega$ auf ganz M ebenfalls C^∞. □

Ganz im Sinne von Folgerung 1.4.7 kann nun mit dem Keilprodukt aus (3.21)

$$
\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M) \tag{3.28}
$$

als eine antikommutative, graduierte Algebra über $C^\infty(M, \mathbb{R})$ verstanden werden. Elementen des Vektorraums $\Omega^k(M)$ wird der *Grad k* zugesprochen.

Ist zudem $F\colon N \to M$ eine C^∞-Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten N und M, dann bildet der Pullback $F^*\colon \Omega^*(M) \to \Omega^*(N)$ k-Formen auf k-Formen ab

(Erhaltung des Grades) und ist darüber hinaus nach Satz 3.5.2 ein Homomorphismus von Algebren.

3.6 Äußere Ableitung

In diesem Abschnitt soll ein Ableitungsoperator für glatte Differentialformen definiert werden, der in gewisser Weise eine Verallgemeinerung des Differentials einer Funktion aus Definition 2.1.3 in sich bürgt. Dabei soll der Weg skizziert werden, wie man es schafft, solch einen Ableitungsoperator für glatte Differentialformen auf einer Mannigfaltigkeit zu definieren.

Definition 3.6.1 . Sei $A = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A^k$ eine graduierte Algebra über einem Körper K mit dem Produkt $\mu\colon A \times A \to A$. Eine *Antiderivation* einer graduierten Algebra A ist eine K-lineare Abbildung $D\colon A \to A$, so dass für jedes $\omega \in A^K$ und $\tau \in A^l$ gilt

$$D(\mu(\omega,\tau)) = \mu(D\omega,\tau) + (-1)^k \mu(\omega, D\tau). \tag{3.29}$$

Falls $D(A^k) \subseteq A^{k+m}$, spricht man von einer Antiderivation vom *Grad m*.

3.6.1 Äußere Ableitung auf dem $\mathbb{R}^n$

Nach [Tu10, Beispiel 5.11] kann der Euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ selbst als Mannigfaltigkeit aufgefasst werden, der durch eine einzige Karte $(\mathbb{R}^n, r^1, \dots, r^n)$ beschrieben wird. Hierbei ist, wie üblich, r^i der i-te kanonische Koordinatenvektor des $\mathbb{R}^n$. Der Notation wegen wird für r^i auch x^i geschrieben.

Definition 3.6.2 . Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\omega = \sum_I{}' \, a_I dx^I \in \Omega^k(U)$, dann ist

$$d\colon \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U) \tag{3.30a}$$

$$d\omega = \sum_I{}' \, da_I \wedge dx^I \tag{3.30b}$$

die *äußere Ableitung* einer glatten k-Form auf der offenen Teilmenge U des $\mathbb{R}^n$.

Es soll betont werden, dass diese Definition für $k = 0$ ganz im Einklang zu Definition 2.1.3 steht. Denn glatte 0-Formen sind nichts anderes als glatte, reellwertige Funktionen und (3.30b) reduziert sich in diesem Fall zu

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \tag{3.31}$$

Für die so definierte äußere Ableitung auf dem $\mathbb{R}^n$ gelten nun folgende Eigenschaften:

Satz 3.6.3 . *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\omega \in \Omega^k(U)$, $\tau \in \Omega^l(U)$, dann gilt für $d\colon \Omega^*(U) \to \Omega^*(U)$*

(1) *d ist eine Antiderivation vom Grad* 1*:*

$$d(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge d\tau. \tag{3.32}$$

(2) $d \circ d = 0$

(3) *Falls $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ und $X \in \mathfrak{X}(U)$, dann gilt $(df)(X) = Xf$*

Beweis. Striktes Ausrechnen, nachzuschlagen in [Tu10, Proposition 4.7] □

Die Eigenschaft (3) aus diesem Satz mutet künstlich an, ist das doch gerade die Definition 2.1.3 eines Differentials einer glatten Funktion resultierend in einer 1-Form. Aber man kann zeigen, dass die drei Eigenschaften aus Satz 3.6.3 die äußere Ableitung d eindeutig charakterisieren. Das heißt jede andere äußere Ableitung $D\colon \Omega^*(U) \to \Omega^*(U)$, die ebenfalls diese Eigenschaft erfüllt muss $d = D$ gewährleisten. (Beweis dieser Aussage [Tu10, Proposition 4.8])

3.6.2 Äußere Ableitung auf einer Koordinatenumgebung

Definition 3.6.4 . Sei $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ Karte einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\omega \in \Omega^k(M)$. Auf U gilt lokal $\omega = \sum_I{}' a_I dx^I$ für $a_I \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Die Abbildung

$$d_U \colon \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U) \tag{3.33a}$$

$$d_U \omega = \sum_I{}' da_I \wedge dx^I \tag{3.33b}$$

nennt man die *äußere Ableitung* einer glatten k-Form auf der offenen Teilmenge U der Mannigfaltigkeit M.

Man kann zeigen, dass $d_U\colon \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ die gleichen Eigenschaften wie in Satz 3.6.3 besitzt und dadurch eindeutig festgelegt ist.

3.6.3 Äußere Ableitung auf einer Mannigfaltigkeit

Definition 3.6.5 . Sei $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ Karte einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\omega \in \Omega^k(M)$. Auf U gilt lokal $\omega = \sum_I{}' a_I dx^I$ für $a_I \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Die Abbildung

$$d\colon \Omega^*(M) \to \Omega^*(M) \tag{3.34a}$$

$$(d\omega)_p = (d_U \omega)_p \tag{3.34b}$$

nennt man die *äußere Ableitung* einer glatten k-Form auf der Mannigfaltigkeit M.

Die Definition für d bezieht sich explizit auf eine Koordinatenumgebung, in der der Punkt $p \in M$ liegt. Deswegen muss die Definition für d auf Wohldefiniertheit hin überprüft werden, das heißt es muss gezeigt werden, dass d unabhängig ist von der Wahl der Koordinatenumgebung, die den Punkt $p \in M$ enthält.

Sei dazu $(V, \psi) = (V, y^1, \ldots, y^n)$ eine weitere Karte die den Punkt $p \in M$ enthält und damit $\omega = \sum_J{}' b_J dy^J$ für $b_J \in C^\infty(V, \mathbb{R})$. Auf $U \cap V$ gilt dann

$$\sum_I{}' a_I dx^I = \sum_J{}' b_J dy^J \tag{3.35}$$

Nach den bisherigen Ausführungen ist klar, dass auf $U \cap V$ eine eindeutige äußere Ableitung

$$d_{U\cap V} \colon \Omega^*(U \cap V) \to \Omega^*(U \cap V) \tag{3.36}$$

existiert. Mit der Definition von $d_{U\cap V}$ gilt auf $U \cap V$ wegen (3.35)

$$d_{U\cap V}\left(\sum_I{}' a_I dx^I\right) = d_{U\cap V}\left(\sum_J{}' b_J dy^J\right) \tag{3.37}$$

und somit

$$\sum_I{}' da_I \wedge dx^I = \sum_J{}' db_J \wedge dy^J. \tag{3.38}$$

Und damit auch insbesondere im Punkt $p \in U \cap V \subseteq M$

$$\left(\sum_I{}' da_I \wedge dx^I\right)_p = \left(\sum_J{}' db_J \wedge dy^J\right)_p, \tag{3.39}$$

was die Wohldefiniertheit von $(d\omega)_p = (d_U\omega)_p$ beweist. Die Abbildung $d \colon \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ erfüllt ebenfalls wieder punktweise auf der Mannigfaltigkeit M die drei Eigenschaften aus Satz 3.6.3.

Es gilt folgende, tiefliegende Eigenschaft:

Satz 3.6.6 . *Auf jeder beliebigen Mannigfaltigkeit M existiert eine äußere Ableitung $d \colon \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$, die durch die Eigenschaften aus Satz 3.6.3 eindeutig festgelegt ist.*

Beweis. Die Existenz wurde bereits mit Definition 3.6.5 erklärt, es verbleibt lediglich die Eindeutigkeit zu zeigen. Dies nutzt massiv das Resultat aus Satz 3.3.3, wie eine Differentialform glatt auf der ganzen Mannigfaltigkeit fortgesetzt werden kann. Des Weiteren werden Aussagen über d als *lokalen Operator* benötigt, die hier nicht zur Verfügung gestellt werden können und deswegen sei an dieser Stelle auf [Tu10, Abschnitt 19.2 und 19.4] verwiesen, um den Beweis der Eindeutigkeit durchführen zu können. □

Satz 3.6.7 (Pullback kommutiert mit d). *Sei $F \colon N \to M$ eine C^∞ Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten N und M. Falls $\omega \in \Omega^k(M)$, dann gilt*

$$dF^*\omega = F^* d\omega. \tag{3.40}$$

Beweis. Geht man zu der Darstellung von ω auf einer Karte in M über, folgt die Aussage mittels striktem Ausrechnen unter Verwendung der Aussagen aus Satz 3.5.2 und dem Spezialfall in Satz 2.5.2. Auf die rechentechnischen Details sei darum auf [Tu10, Proposition 19.5] verwiesen. $\square$

4 Orientierung einer Mannigfaltigkeit

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass ein endlich dimensionaler Vektorraum V genau 2 Orientierungen besitzt. Man spricht dabei von einer Äquivalenzklasse von geordneten Basen als eine *Orientierung von V*. Zwei geordnete Basen u, v von V werden als äquivalent angesehen, falls deren Übergangsmatrix A eine positive Matrix besitzt, das heißt für $u = Av$ gilt

$$u \sim v : \iff \det A > 0. \tag{4.1}$$

Falls μ eine (positive) Orientierung für V ist, dann soll die entgegengesetzte Orientierung durch $-\mu$ symbolisiert werden.

Damit liegt eine erste Idee vor, wie man eine Mannigfaltigkeit M orientieren könnte; Man betrachtet in jedem Punkt $p \in M$ den Tangentialraum T_pM und spricht diesem eine Orientierung im Sinne eines endlichen dimensionalen Vektorraums zu. Es wäre wünschenswert, wenn dies in einem „stetigen Sinne“ gelingen würde und sich die Orientierung nicht sprunghaft ändert.

Auf diesen einleitenden Worten aufbauend wird es nun Ziel dieses Kapitels sein, ausgehend von dem Tangentialraum, einen Orientierungsbegriff für eine Mannigfaltigkeit festzulegen. Aus dieser ersten Definition heraus werden zwei äquivalente Betrachtungsweisen entwickelt; einerseits kann eine Charakterisierung der Orientierung einer Mannigfaltigkeit mit Hilfe von Differentialformen gelingen und andererseits mit Hilfe eines *orientierten Atlas'*.

In den folgenden Betrachtungen soll der Fall einer 0-dimensionalen Mannigfaltigkeit stets ausgeschlossen werden, da dieser eine gesonderten Betrachtung bedarf, die hier nicht von Interesse ist. Es wird daher angenommen, dass die zugrunde liegende Mannigfaltigkeit stets von Dimension $n \in \mathbb{N}$ ist.

Vorlage für die Aussagen dieses Kapitels war [Tu10, Kapitel 21].

NOTATION: Eine Orientierung für einen n-dimensionalen Vektorraum ist eine Äquivalenzklasse von geordneten Basen $\{v_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \subseteq V$. Die Äquivalenzklasse einer Orientierung wird durch $[\{v_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}]$ notiert.

4.1 Orientierung mittels Tangentialräume

Für die folgenden Betrachtungen wird sich folgendes Lemma als überaus wichtig erweisen, dessen Beweis eher technisch erscheint.

Lemma 4.1.1 . *Seien* $\{u_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}, \{v_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ *endliche Familien von Vektoren aus einem Vektorraum* V*. Es möge gelten, dass*

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} a^i{}_j v_i \ \textit{ für alle } \ j \in \{1,\dots,n\}, \tag{4.2}$$

wobei $A = [a^i{}_j]$ *eine Matrix von reellen Zahlen ist. Falls* $\beta \in A_n(V)$*, dann gilt*

$$\beta(u_1,\dots,u_n) = (\det A)\beta(v_1,\dots,v_n). \tag{4.3}$$

Beweis. [Tu10, Lemma 21.1] □

In der Definition 2.3.10 wurde festgelegt, dass die endliche Familie $\{X_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ von Schnitten, definiert auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ einer Mannigfaltigkeit M, genau dann einen *Rahmen* für M über U darstellt, wenn für alle $p \in U$ gilt, dass die Familie $\{X_{i,p}\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ eine Basis für den Tangentialraum T_pM ist. Ein *globaler Rahmen* ist ein Rahmen, der auf der ganzen Mannigfaltigkeit M definiert ist und ein *lokaler Rahmen* um $p \in M$ ist ein Rahmen, der auf einer Umgebung von p definiert ist. Für Rahmen auf U, kann eine Äquivalenzrelation erklärt werden:

$$\{X_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \sim \{Y_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}} :\iff \forall p \in U\colon \{X_{i,p}\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \overset{(*)}{\sim} \{Y_{i,p}\}_{i\in\{1,\dots,n\}}, \tag{4.4}$$

wobei $(*)$ in (4.1) definiert wurde. (4.4) besagt also, falls $Y_j = \sum_{i=1}^n a^i_j X_i$, dann ist $\{X_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \sim \{Y_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ genau dann, wenn die Transformationsmatrix $[a^i_j]$ in jedem Punkt auf U eine positive Determinante besitzt.

Definition 4.1.2 . Eine *punktweise Orientierung* auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M ordnet jedem Punkt $p \in M$ eine Orientierung μ_p des Tangentialraums T_pM zu, das heißt eine Äquivalenzklasse von möglicherweise nicht-stetigen Rahmen auf M.

Falls $\{X_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ ein lokaler Rahmen für M über U ist, dann sagt man $\{X_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ ist *(positiv) orientiert*, falls für jeden Punkt $p \in U$ $\{X_{i,p}\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ eine positiv orientierte Basis für T_pM ist. Ein *negativ orientierter* Rahmen ist analog definiert.

Man nennt eine punktweise Orientierung μ auf M *stetig im Punkt* $p \in M$, falls p eine Umgebung U besitzt, in der μ durch einen *stetigen Rahmen* repräsentiert wird. Dies bedeutet, es existiert eine Familie von Vektorfeldern $\{Y_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$, die stetig sind auf U und $\mu_q = [\{Y_{i,q}\}_{i\in\{1,\dots,n\}}]$ für alle $q \in U$. Eine punktweise Orientierung μ ist *stetig auf* M, falls sie in jedem Punkt $p \in M$ stetig ist.

Eine stetige, punktweise Orientierung auf M, heißt eine *Orientierung auf* M und M ist *orientierbar*, falls M eine Orientierung besitzt. Eine Mannigfaltigkeit, auf der eine Orientierung definiert ist, bezeichnet man als *orientiert*.

Satz 4.1.3 . *Eine zusammenhängende, orientierbare Mannigfaltigkeit* M *besitzt genau zwei Orientierungen.*

Beweis. Der vollständige Beweis macht einerseits Gebrauch von der Charakterisierung stetiger Rahmen und andererseits von topologischen Eigenschaften eines zusammenhängenden Raumes, die hier nicht bewiesen werden können. Die grobe Beweisidee wäre, dass man von zwei Orientierungen μ und ν auf M ausgeht. Da T_pM gerade ein endlich dimensionaler Vektorraum ist, muss in jedem Punkt $p \in M$ dann gelten, dass entweder $\mu_p = \nu_p$ oder $\mu_p = -\nu_p$. Diese Aussage würde man nun gern zunächst auf eine Umgebung $U \subseteq M$ von p ausdehnen wollen und letztlich auf ganz M, was Gebrauch von Eigenschaften eines zusammenhängenden Raums macht. Der vollständige Beweis ist [Tu10, Proposition 21.3] zu entnehmen. □

4.2 Orientierung mittels Differentialformen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass sich die Stetigkeitsbedingung einer punktweisen Orientierung in geeigneter Weise in eine C^∞-Bedingung an eine Differentialform höchsten Grades übersetzen lässt.

Lemma 4.2.1 . *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann sind äquivalent:*

(a) *Die punktweise Orientierung $[\{X_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}]$ auf M ist stetig.*

(b) *Für jeden Punkt $p \in M$ existiert eine Koordinatenumgebung $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$, auf der die Funktion*

$$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(X_1, \dots, X_n) \colon U \to \mathbb{R} \tag{4.5}$$

strikt positiv ist.

Beweis. Angenommen $\mu = [\{X_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}]$ sei eine stetige, punktweise Orientierung auf M. Aus der Definition 4.1.2 folgt, dass um $p \in M$ eine Umgebung W existiert, auf der μ durch einen stetigen Rahmen $\{Y_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ repräsentiert wird. Wählt man eine zusammenhängende Koordinatenumgebung $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ von p mit $U \subseteq W$ und vereinbart man $\partial_i = \partial/\partial x^i$, dann gilt $Y_j = \sum_{i=1}^n b^i_j \partial_i$, wobei die Matrix $[b^i_j]$ invertierbar ist, da sie einen Basiswechsel vermittelt. Da jede C^∞-Abbildung auch stetig ist, gilt nach Satz 2.3.11, dass $[b^i_j] \colon U \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eine stetige Matrix-Funktionen auf U sein muss. Nach Lemma 4.1.1 gilt

$$\begin{aligned}(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(Y_1, \dots, Y_n) &= (\det[b^i_j])(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(\partial_1, \dots, \partial_n)\\ &= (\det[b^i_j]) \neq 0.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass $(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(Y_1, \dots, Y_n)$ als stetige, nirgends verschwindende, reellwertige Funktion, entweder positiv oder negativ auf einer zusammenhängenden Menge U ist. Falls sie negativ ist, kann erreicht werden, dass durch Setzen von $\tilde{x}^1 = -x^1$, folgendes auf der Karte $(U, \tilde{\phi}) = (U, \tilde{x}^1, \dots, x^n)$ gilt

$$(d\tilde{x}^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(Y_1, \dots, Y_n) > 0. \tag{4.7}$$

Man ist geneigt, $\tilde{x}^1$ wieder zu x^1 umzubenennen. Auf der Umgebung U gilt, dass $\{X_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \sim \{Y_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$. Das heißt, dass nach Definition 4.1.2 eine Matrix $C = [c^i_j]$ existiert, mit $X_j \sum_{i=1}^n c^i_j Y_i$, welche eine positive Determinante besitzt. Aus Lemma 4.1.1 folgt, dass auf U gilt

$$(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(X_1, \dots, X_n) = \det C(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(Y_1, \dots, Y_n) > 0. \tag{4.8}$$

Damit folgt (b) aus (a).

Angenommen es gilt nun (b), dann ist $X_j = \sum_{i=1}^n a^i_j \partial_i$ auf der Karte $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ um $p \in M$ und somit wieder

$$\begin{aligned} 0 < (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(X_1, \dots, X_n) &= (\det[a^i_j])(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(\partial_1, \dots, \partial_n) \\ &= \det[a^i_j]. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Nach Satz 2.3.11 ist $\{\partial_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ ein stetiger Rahmen über U und es wurde gezeigt, dass $\det[a^i_j] > 0$, also ist die punktweise Orientierung μ, stetig um den Punkt p. Da p beliebig gewählt war, ist μ überall stetig. Damit folgt (a) aus (b). □

In dem Beweis des folgenden, sehr wichtigen Satzes, wird zum ersten Mal die Technik der Zerlegung der Eins herangezogen.

Satz 4.2.2 . *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann sind äquivalent:*

(a) *Die Mannigfaltigkeit M ist orientierbar.*

(b) *Es existiert eine C^∞ differentielle n-Form $\omega\colon M \to \Lambda^n(T^*M)$, so dass für alle $p \in M$ gilt*
$$\omega_p \neq 0. \tag{4.10}$$

Beweis. Es möge (a) gelten. Sei dazu $[\{X_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}]$ eine Orientierung auf M. Nach Lemma 4.2.1 existiert für jeden Punkt $\alpha \in M$ eine Umgebung $(U_\alpha, \phi_\alpha) = (U_\alpha, x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha)$, auf der gilt

$$(dx^1_\alpha \wedge \dots \wedge dx^n_\alpha)(X_1, \dots, X_n) > 0. \tag{4.11}$$

Sei $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in M} = \{(U_\alpha, x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha)\}_{\alpha\in M}$ die Familie all jener Karten, mit der Eigenschaft (4.11). Diese Familie überdeckt M ganz und sei weiter $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in M}$ eine C^∞-Zerlegung der Eins bezüglich der offenen Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha\in M}$. Aufgrund der Eigenschaft der Zerlegung der Eins ist die n-Form

$$\omega = \sum_{\alpha\in M} \rho_\alpha (dx^1_\alpha \wedge \dots \wedge dx^n_\alpha) \tag{4.12}$$

lokal endlich und damit wohldefiniert und zudem nach Satz 3.3.2 sogar C^∞ auf M. Man fixiere ein beliebiges $p \in M$, dann ist $\rho_\alpha(p) \geq 0$ für alle $\alpha \in M$ und für mindestens ein $\alpha' \in M$ muss nach (4.12) $\rho_{\alpha'}(p) > 0$. Dies bedeutet aber, dass ω eine glatte, nirgends verschwindende n-Form auf M ist. Damit folgt (b) aus (a).

Angenommen es gilt (b), dann kann für jeden Punkt $p \in M$ eine Basis $\{X_{i,p}\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ für T_pM so ausgewählt werden, dass insbesondere nach Voraussetzung gilt

$$\omega_p(X_{1,p},\dots,X_{n,p}) > 0. \tag{4.13}$$

Sei $p \in M$ beliebig aber fest und $(U,\phi) = (U, x^1,\dots,x^n)$ eine zusammenhängende Koordinatenumgebung für p. Auf U besitzt die n-Form ω die Darstellung

$$\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{4.14}$$

mit einer glatten und nirgends verschwindenden Funktion f auf U. Man argumentiert wie im Beweis von Lemma 4.2.1 (a) $\Rightarrow$ (b), dass f entweder positiv oder negativ auf U ist. Falls $f > 0$, dann gilt auf U

$$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(X_1,\dots,X_n) > 0. \tag{4.15}$$

Falls $f < 0$ wird wieder wie im Beweis von Lemma 4.2.1 (a) $\Rightarrow$ (b) x^1 durch $-x^1$ ersetzt. In beiden Fällen folgt (a) aus (b), da die Orientierung $\mu = [\{X_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}]$ nach Lemma 4.2.1 eine stetige, punktweise Orientierung auf M ist. □

Seien $\omega, \omega' \in \Omega^n(M)$ auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M, das heißt Formen höchstens Grades, dann muss gelten $\omega = f\omega'$ für $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$. Lokal, auf einer Karte $(U,\phi) = (U,x^1,\dots,x^n)$, lässt sich schreiben $\omega = hdx^1 \wedge \cdots dx^n$ und $\omega' = gdx^1 \wedge \cdots dx^n$ für $h,g \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ und $f,g \neq 0$. Daher gilt mit $f = h/g$, dass auch $f \neq 0$ auf U. Da U beliebig ist, muss $f \neq 0$ auf ganz M gelten. Falls M zusammenhängend ist, kann wieder der Zwischenwertsatz herangezogen werden, um zu argumentieren, dass entweder $f > 0$ und $f < 0$ auf M ist. In diesem Sinne lässt sich die Menge der nirgends verschwindenden n-Formen auf einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M in genau zwei Äquivalenzklassen partitionieren, wobei die Äquivalenzrelation gegeben ist durch

$$\omega \sim \omega' : \iff \quad \omega = f\omega' \text{ mit } f > 0. \tag{4.16}$$

Die Reflexivität ergibt sich daraus, dass $1 > 0$ auf M. Falls $f > 0$, dann auch $1/f > 0$, was die Symmetrie erklärt und falls $f,g > 0$, dann auch $fg > 0$, was die Transitivität beweist.

Satz 4.2.3 . *Sei M eine n-dimensionale, orientierbare, zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Sei $\mu = [\{X_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}]$ eine Orientierung für M, so dass diese auf jeder Umgebung $U \subseteq M$ durch einen stetigen, positiv orientierten, lokalen Rahmen repräsentiert wird. Sei $\omega \in \Omega^n(M)$ so definiert, dass*

$$\omega(X_1,\dots,X_n) > 0. \tag{4.17}$$

Dann existiert eine 1-zu-1 Korrespondenz zwischen der Menge der Orientierungen auf M und der Menge der Äquivalenzklassen nirgends verschwindender n-Formen auf M, *also*

$$\{\mu, -\mu\} \underset{l}{\overset{k}{\rightleftarrows}} \{[\omega], [-\omega]\}, \tag{4.18}$$

wobei gilt

$$\mu \overset{k}{\mapsto} [\omega], \qquad -\mu \overset{k}{\mapsto} [-\omega], \tag{4.19a}$$

$$[\omega] \overset{l}{\mapsto} \mu, \qquad [-\omega] \overset{l}{\mapsto} -\mu. \tag{4.19b}$$

Beweis. Man muss zeigen, dass, falls die Abbildungen k und l existieren, diese auch wohldefiniert sind, also nicht vom jeweiligen Repräsentanten abhängen. Es mögen die Bezeichnungen aus der Voraussetzung des Satzes gelten.

Für eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit M kann jeder Orientierung $\mu = [\{X_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}]$ auf M eine nicht verschwindende, glatte n-Form ω auf M zugeordnet werden, für die gilt $\omega(X_1, \ldots, X_n) > 0$. Solch ein ω muss nach Beweis von Satz 4.2.2 (a) $\Rightarrow$ (b) existieren. Es ist zu zeigen, dass diese Zuordnung wohldefiniert ist, also unabhängig vom Repräsentanten.

Sei hierzu $\{X_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}} \sim \{Y_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ auf M, dann wird beiden Orientierungen auf M jeweils eine n-Form ω und ω' zugeordnet, mit der Eigenschaft $\omega(X_1, \ldots, X_n) > 0$ und $\omega'(Y_1, \ldots, Y_n) > 0$. Nach (4.4) gilt für $Y_j = \sum_{i=1}^n a^i_j X_i$, dass $\det A > 0$ und damit nach Lemma 4.1.1:

$$0 < \omega'(Y_1, \ldots, Y_n) = (\det A)\omega'(X_1, \ldots, X_n), \tag{4.20}$$

also insbesondere $\omega'(X_1, \ldots, X_n) > 0$. Somit gilt bezüglich des Rahmens $\{X_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$, dass $\omega'(X_1, \ldots, X_n) = f\omega(X_1, \ldots, X_n)$ für ein $f > 0$ auf M. Dadurch sind die Differentialformen ω und ω' jedoch eindeutig festgelegt und es gilt insgesamt $\omega' = f\omega$ für $f > 0$, also $\omega' \sim \omega$.

Sei $\omega \in [\omega]$, dann gilt nach Satz 4.2.2 $(b) \Rightarrow (a)$, dass $l(\omega) = \{X_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}} \in \mu$.

Seien $\omega', \omega \in [\omega]$, das heißt, es existiert ein $f > 0$ auf M, so dass $\omega' = f\omega$. ω' wird ein Rahmen $\{Y_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ auf M so zugeordnet, dass $\omega'(Y_1, \ldots, Y_n) > 0$ und entsprechendes für ω, also $\omega(X_1, \ldots, X_n) > 0$. Aufgrund der Eigenschaft eines Rahmens auf M, muss gelten $Y_j = \sum_{i=1}^n a^i_j X_i$. Wieder kann Lemma 4.1.1 angewendet werden und man erhält:

$$0 < \omega'(Y_1, \ldots, Y_n) = (\det A)\omega(X_1, \ldots, X_n), \tag{4.21}$$

also $\det A > 0$ und somit $[\{Y_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}] = [\{X_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}]$.

□

In diesem Sinne ist es gerechtfertigt davon zu sprechen, dass eine nirgends verschwindende n-Form ω auf M mit $\omega(X_1, \ldots, X_n) > 0$, die Orientierung $[\{X_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}]$ *festlegt* und man solch ein ω eine *Orientierungsform* nennt.

Beispiel 4.2.4 (Orientierung für $\mathbb{R}^n$). Die Orientierung des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ ist eindeutig durch die nirgends verschwindende n-Form $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ festgelegt. Man nennt sie auch die *Standardorientierung des* $\mathbb{R}^n$.

Jeder topologische Raum wird durch seine Zusammenhangskomponenten partitioniert (siehe etwas [Tu10, Korollar A.46]). Man kann einsehen, dass die Bijektion aus Satz 4.2.3 auch für nicht-zusammenhängende, orientierbare Mannigfaltigkeiten gilt, indem jede Zusammenhangskomponente einzeln betrachtet wird.

Eine orientierte Mannigfaltigkeit kann als ein Paar $(M, [\omega])$ aufgefasst werden. Damit lässt sich folgende Definition formulieren:

Definition 4.2.5 . Ein Diffeomorphismus $F\colon (N, [\omega_N]) \to (M, [\omega_M])$ zwischen orientierten Mannigfaltigkeiten wird als *orientierungserhaltend* bezeichnet, falls

$$[F^*\omega_M] = [\omega_N] \tag{4.22a}$$

und als *orientierungsumkehrend*, falls

$$[F^*\omega_M] = [-\omega_N]. \tag{4.22b}$$

Satz 4.2.6 . *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$, jeweils mit der Standardorientierung ausgestattet, vererbt durch den $\mathbb{R}^n$ und $F\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus. Dann sind äquivalent:*

(a) *F ist orientierungserhaltend.*

(b) *Die Jacobi-Determinante* $\det[\partial F^i/\partial x^j]$ *ist strikt positiv auf U.*

Beweis. Seien $x^1, \dots, x^n$ und $y^1, \dots, y^n$ die Standardkoordinaten auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} F^*(dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n) &= d(F^*y^1) \wedge \cdots \wedge d(F^*y^n) && \text{(Satz 3.5.2 und Satz 2.5.2)} \\ &= d(y^1 \circ F) \wedge \cdots \wedge d(y^n \circ F) && \text{(Pullback einer Funktion)} \\ &= d(F^1) \wedge \cdots \wedge d(F^n) \\ &= \det\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right] (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) && \text{(Satz 3.1.1).} \end{aligned} \tag{4.23}$$

Somit ist F orientierungserhaltend genau dann, wenn $\det[\partial F^i/\partial x^j] > 0$ auf U. □

4.3 Orientierung mittels Atlanten

Der Satz 4.2.6 gibt einen ersten Hinweis, wie man eine Orientierung auf einer Mannigfaltigkeit mit Hilfe von Atlanten beschreiben kann.

Definition 4.3.1 . Ein Atlas auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M heißt *orientiert*, falls für alle Karten des Atlas' $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ und $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^n)$, mit $U \cap V \neq \emptyset$, die Jacobi-Determinante des Kartenwechsels $\psi \circ \phi^{-1}\colon \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ strikt positiv auf U ist, das heißt, falls $\det[\partial y^i/\partial x^j] > 0$ auf $U \cap V$.

Satz 4.3.2 . *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann sind äquivalent:*

(a) *Die Mannigfaltigkeit M ist orientierbar.*

(b) *Es existiert ein orientierter Atlas auf M.*

Beweis. Angenommen es gilt (a). Dazu sei $\mu = [\{X_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}]$ eine Orientierung der Mannigfaltigkeit M. Nach dem Lemma 4.2.1 existiert für jeden Punkt $\alpha \in M$ eine Koordinatenumgebung $(U_\alpha, \phi_\alpha) = (U_\alpha, x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha)$ existiert, auf welcher gilt

$$(dx^1_\alpha \wedge \cdots \wedge dx^n_\alpha)(X_1, \dots, X_n) > 0. \tag{4.24}$$

Die Behauptung ist nun, dass die Familie $\mathfrak{U} := \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in M}$ einen orientierten Atlas ergibt.

Seien dazu $(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathfrak{U}$ und $(U_\beta, \phi_\beta) \in \mathfrak{U}$ zwei miteinander überlappende Karten aus dem Atlas $\mathfrak{U}$, dann gilt auf $U_\alpha \cap U_\beta$

$$(dx^1_\alpha \wedge \cdots \wedge dx^n_\alpha)(X_1, \dots, X_n) > 0 \quad \text{und} \quad (dx^1_\beta \wedge \cdots \wedge dx^n_\beta)(X_1, \dots, X_n) > 0. \tag{4.25}$$

Nach Satz 3.1.1 gilt

$$dx^1_\beta \wedge \cdots \wedge dx^n_\beta = (\det[\partial x^i_\beta / \partial x^j_\alpha]) dx^1_\alpha \wedge \cdots \wedge dx^n_\alpha \tag{4.26}$$

und setzt man (4.26) in (4.25) ein, dann folgt $\det[\partial x^i_\beta / \partial x^j_\alpha] > 0$ auf $U_\alpha \cap U_\beta$. Damit folgt (b) aus (a).

Es möge (b) gelten. Dazu sei $\{(U, \phi)\} = \{(U, x^1, \dots, x^n)\}$ ein orientierter Atlas. Für jedes $p \in (U, x^1, \dots, x^n)$ soll μ_p als Äquivalenzklasse der Basis $\{\partial/\partial x^i|_p\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ des Raums T_pM definiert werden. Die so getroffene Zuordnungsvorschrift für μ_p, hängt von der Wahl der jeweiligen Karte um p ab. μ_p muss daher auf Wohldefiniertheit hin überprüft werden.

Falls zwei Karten $\{(U, x^1, \dots, x^n)\}$ und $\{(V, y^1, \dots, y^n)\}$ aus dem orientierten Atlas beide den Punkt p beinhalten, dann gilt nach Annahme, dass $\det[\partial y^i / \partial x^j] > 0$. Dies bedeutet aber gerade, dass $\{\partial/\partial x^i|_p\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ äquivalent ist zu $\{\partial/\partial y^i|_p\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$, da nach [Tu10, Proposition 8.11] die Matrix $[\partial y^i / \partial x^j]$ den Basiswechsel zwischen diesen Basen vermittelt. Damit ist die Abbildung μ auch wirklich wohldefiniert auf M und hängt nicht von der Wahl der Umgebung im Punkt p ab.

Die so gefundene punktweise Orientierung μ auf M ist zudem stetig, da sie in jeder Umgebung $\{(U, x^1, \dots, x^n)\}$ eines Punktes $p \in M$ durch $\mu = [\{\partial/\partial x^i|_p\}_{i\in\{1,\dots,n\}}]$ repräsentiert wird, was einen stetigen Rahmen auf U darstellt. Damit folgt (a) aus (b). □

Definition 4.3.3 . Zwei orientierte Atlanten $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ und $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ einer Mannigfaltigkeit M sind *äquivalent*, falls die Vereinigung der beiden Atlanten einen orientierten Atlas auf M darstellt.

Dies ist eine Äquivalenzrelation. Die Reflexivität und Symmetrie ergeben sich direkt aus der Definition 4.3.1. Lediglich die Transitivität ist etwas technisch aufwendiger; Seien $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ und $\{(R_\gamma, \lambda_\gamma)\}$ drei Atlanten auf M, wobei gelten soll

$$\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\} \sim \{(V_\beta, \psi_\beta)\} \quad \text{und} \quad \{(V_\beta, \psi_\beta)\} \sim \{(R_\gamma, \lambda_\gamma)\}. \tag{4.27}$$

Zu zeigen ist, dass die Jacobi-Matrix J der Übergangsfunktion

$$\lambda_\gamma \circ \phi_\alpha^{-1} \colon \phi_\alpha(R_\gamma \cap U_\alpha) \to \lambda_\gamma(R_\gamma \cap U_\alpha) \tag{4.28}$$

eine positive Determinante für alle γ, α besitzt. Dazu wählt man einen Punkt $p \in R_\gamma \cap U_\alpha$. p besitzt eine Umgebung V_β, so dass $S := R_\gamma \cap U_\beta \cap U_\alpha \neq \emptyset$. Auf S gilt jedoch

$$\lambda_\gamma \circ \phi_\alpha^{-1} = (\lambda_\gamma \circ \psi_\beta^{-1}) \circ (\psi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}). \tag{4.29}$$

Die Jacobi-Matrix J genügt der Kettenregel, also erhält man auf S

$$J(\lambda_\gamma \circ \phi_\alpha^{-1}) = J(\lambda_\gamma \circ \psi_\beta^{-1}) J(\psi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}) \tag{4.30}$$

und damit nach (4.27)

$$\det J(\lambda_\gamma \circ \phi_\alpha^{-1}) = \Big(\det J(\lambda_\gamma \circ \psi_\beta^{-1})\Big)\Big(\det J(\psi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})\Big) > 0. \tag{4.31}$$

Da $p \in R_\gamma \cap U_\alpha$ beliebig gewählt, ist $\det J(\lambda_\gamma \circ \phi_\alpha^{-1}) > 0$ auf $R_\gamma \cap U_\alpha$. Analoges zeigt man für $\phi_\alpha \circ \lambda_\gamma^{-1}$ und damit ist die Transitivität gezeigt.

Wie in Abschnitt 4.2 argumentiert man, dass die Äquivalenzrelation aus Definition die Menge aller orientierten Atlanten auf einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M in genau zwei Äquivalenzklassen partitioniert. Dies kann mit den folgenden beiden Lemmata eingesehen werden.

Lemma 4.3.4 . *Seien $\mathfrak{U} := \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ und $\mathfrak{V} := \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ zwei orientierte Atlanten einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M. Falls ein Punkt $p \in U_\alpha \cap V_\beta \subseteq M$ mit $\det J(\psi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})|_p > 0$ existiert, dann sind beide Atlanten zueinander äquivalent.*

Beweis. Man definiere zunächst die beiden Mengen

$$S_1 := \left\{ p \in M \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\, (U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathfrak{U} \wedge \exists (V_\beta, \psi_\beta) \in \mathfrak{V} \colon \\ U_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset \wedge \det J(\psi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})|_p > 0 \end{array} \right\} \tag{4.32}$$

und

$$S_2 := \left\{ p \in M \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\, (U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathfrak{U} \wedge \exists (V_\beta, \psi_\beta) \in \mathfrak{V} \colon \\ U_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset \wedge \det J(\psi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})|_p < 0 \end{array} \right\} \tag{4.33}$$

Für den Fall, dass $\det J(\psi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})|_p = 0$ ist, existiert kein $p \in M$, da $\psi_\beta \circ \phi_\alpha$ auf dem Schnitt $U_\alpha \cap V_\beta$ ein Diffeomorphismus ist.

Die Behauptung ist nun, dass $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Angenommen es existiert ein $p \in S_1 \cap S_2$, das heißt einerseits $p \in U_{\alpha_1} \cap V_{\beta_1}$ und andererseits $p \in U_{\alpha_2} \cap V_{\beta_2}$, so dass $\det J(\psi_{\beta_1} \circ \phi_{\alpha_1}^{-1})|_p > 0$ und $\det J(\psi_{\beta_2} \circ \phi_{\alpha_2}^{-1})|_p < 0$. Nach Voraussetzung ist also $\det J(\psi_{\beta_1} \circ \phi_{\alpha_1}^{-1})|_p > 0$, es gilt jedoch auch

$$\begin{aligned} \det J(\psi_{\beta_1} \circ \phi_{\alpha_1}^{-1})|_p &= (\det J(\psi_{\beta_1} \circ \psi_{\beta_2}^{-1})|_p)(\det J(\psi_{\beta_2} \circ \phi_{\alpha_2}^{-1})|_p)(\det J(\phi_{\alpha_2} \circ \phi_{\alpha_1}^{-1})|_p) \\ &< 0. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Dies stellt einen Widerspruch dar. Also ist $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Andererseits ist $S_1 \cup S_2 = M$. Offensichtlich gilt $S_1 \cup S_2 \subseteq M$ und falls $p \in M$, dann existieren $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ und $V_\beta \in \mathfrak{V}$, so dass $p \in U_\alpha \cap V_\beta$ und dann ist entweder $\det J(\psi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})|_p > 0$ oder $\det J(\psi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})|_p < 0$, also $M \subseteq S_1 \cup S_2$. Man fixiere jeweils α und β. Da $(-\infty, 0)$ und $(0, +\infty)$ offene Mengen in $\mathbb{R}$ sind, sind die Urbilder der stetigen Funktionen det und $J(\psi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})$, ebenfalls wieder offen in $U_\alpha \cap V_\beta$ und damit in M, da U_α und V_β offen in M sind. S_1 und S_2 lassen sich als Vereinigung solcher Urbilder schreiben und damit sind S_1 und S_2 offen in M.

Nach Annahme existiert jedoch ein Punkt $p \in M$, indem beide Atlanten übereinstimmen, also $S_1 \neq \emptyset$. Da M aber zusammenhängend sein soll, muss $S_2 = \emptyset$. □

Lemma 4.3.5 . *Seien $\mathfrak{U} := \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ und $\mathfrak{V} := \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ zwei orientierte Atlanten einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M. Falls ein Punkt $p \in U_\alpha \cap V_\beta \subseteq M$ mit $\det J(\psi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})\big|_p < 0$ existiert, dann ist*

$$M = \left\{ p \in M \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\,(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathfrak{U} \wedge \exists (V_\beta, \psi_\beta) \in \mathfrak{V}\colon \\ U_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset \wedge \det J(\psi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})|_p < 0 \end{array} \right\}. \tag{4.35}$$

Beweis. Der Beweis kann analog zu Lemma 4.3.4 geführt werden. □

Für eine orientierte, n-dimensionale Mannigfaltigkeit M, wird die gleiche Mannigfaltigkeit mit entgegengesetzter Orientierung durch $-M$ gekennzeichnet. $-M$ geht aus M folgendermaßen hervor; Sei $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A} = \{(U_\alpha, x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)\}_{\alpha \in A}$ ein Atlas für M, so dass für jedes U_α der lokale Rahmen $\{\partial/\partial x_\alpha^i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ positiv orientiert ist. Dann wird durch $\{(U_\alpha, \tilde{\phi}_\alpha\}_{\alpha \in A} = \{(U_\alpha, -x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)\}_{\alpha \in A} =: -\mathfrak{U}$ gerade die Orientierung von $-M$ spezifiziert.

Satz 4.3.6 . *Sei M eine orientierbare, zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Sei $\mu = [\{X_i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}]$ eine Orientierung für M, so dass diese auf jeder Umgebung $U \subseteq M$ durch einen stetigen, positiv orientierten, lokalen Rahmen repräsentiert wird. Sei $\mathfrak{U} := \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A} = \{(U_\alpha, x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)\}_{\alpha \in A}$ ein Atlas für M, so dass für jedes U_α aus $\mathfrak{U}$ der lokale Rahmen $\{\partial/\partial x_\alpha^i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ positiv orientiert ist. Dann existiert eine 1-zu-1 Korrespondenz zwischen der Menge der Orientierungen auf M und der Menge der Äquivalenzklassen orientierter Atlanten für M, also*

$$\{\mu, -\mu\} \underset{l}{\overset{k}{\rightleftarrows}} \Big\{[\mathfrak{U}], [-\mathfrak{U}]\Big\}, \tag{4.36}$$

wobei gilt

$$\mu \overset{k}{\mapsto} [\mathfrak{U}], \qquad -\mu \overset{k}{\mapsto} [-\mathfrak{U}], \tag{4.37a}$$

$$[\mathfrak{U}] \overset{l}{\mapsto} \mu, \qquad [-\mathfrak{U}] \overset{l}{\mapsto} -\mu. \tag{4.37b}$$

Beweis. Man muss zeigen, dass falls die Abbildungen k und l existieren, diese auch wohldefiniert sind, also nicht vom jeweiligen Repräsentanten abhängen. Es mögen die Bezeichnungen aus der Voraussetzung des Satzes gelten.

Nach dem Beweis des Satzes 4.3.2 $(a) \Rightarrow (b)$ wird der Orientierung μ ein orientierter Atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in M}$ zugeordnet, für welchen auf einer Karte $(U_\alpha, \phi_\alpha) = (U_\alpha, x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ gilt

$$(dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n)(X_1, \dots, X_n) > 0. \tag{4.38}$$

Des Weiteren gilt auch

$$(dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n)\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}\right) > 0 \tag{4.39}$$

und somit folgt aus Lemma 4.1.1, dass $\{X_i\}_{i \in \{1,\dots,n\}} \sim \{\partial/\partial x_\alpha^i\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$ auf U_α. Also gilt $k(\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in M}) \in [\mu]$.

Zur Wohldefiniertheit von k; Seien nun $\{X_i\}_{i \in \{1,\dots,n\}}, \{Y_i\}_{i \in \{1,\dots,n\}} \in \mu$ Orientierungen auf M. Der Orientierung $\{X_i\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$ wird der orientierte Atlas $\{(U, x^1, \dots, x^n)\}$, mit

$$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(X_1, \dots, X_n) > 0 \text{ auf } U, \tag{4.40}$$

zugeordnet und der Orientierung $\{Y_i\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$ der orientierte Atlas $\{(V, y^1, \dots, y^n)\}$, mit

$$(dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n)(Y_1, \dots, Y_n) > 0 \text{ auf } V. \tag{4.41}$$

Es gilt mit der Rahmeneigenschaft $Y_j = \sum_{i=1}^n a_j^i X_i$ und nach Voraussetzung $\det[a_j^i] > 0$. Daraus folgt unter Heranziehung des Satzes 3.1.1, dass folgende Aussagen auf $U \cap V \neq \emptyset$ gelten

$$\begin{aligned} 0 < (dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n)(Y_1, \dots, Y_n) &= \Big\{\det[a_j^i] \times && \text{(Lemma 4.1.1)} \\ &\quad (dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n)(X_1, \dots, X_n)\Big\} \\ &= \Big\{\det[a_j^i] \det\left[\frac{\partial y^l}{\partial x^i}\right] \times && \text{(Satz 3.1.1)} \\ &\quad \underbrace{(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(X_1, \dots, X_n)}_{>0}\Big\} && (4.42) \end{aligned}$$

Also ist $\det[\partial y^i/\partial x^j] > 0$ auf $U \cap V$ und somit$\{(U, x^1, \dots, x^n)\} \sim \{(V, y^1, \dots, y^n)\}$. Damit ist die Abbildung k wohldefiniert.

Dem Beweis von Satz 4.3.2 entnimmt man, dass einem Atlas $\{(U, x^1, \dots, x^n)\} \in [\mathfrak{U}]$ auf M eine Orientierung $U \ni p \mapsto [\{\partial/\partial x^i|_p\}_{i \in \{1,\dots,n\}}]$ zugeordnet wird. Diese Zuordnung ist wohldefiniert, hängt also nicht von der jeweiligen Karte um p ab. Sei

$$\{(U, x^1, \dots, x^n)\} \sim \{(V, y^1, \dots, y^n)\} \tag{4.43}$$

und $V \ni p \mapsto [\{\partial/\partial y^i|_p\}_{i \in \{1,\dots,n\}}]$. Auf $U \cap V$ gilt $\partial/\partial x^j = \sum_{i=1}^n (\partial y^i/\partial x^j)\partial/\partial y^i$ und nach Voraussetzung ist $\det[\partial y^i/\partial x^j] > 0$ auf $U \cap V$, also ist

$$[\{\partial/\partial x^i\Big|_p\}_{i \in \{1,\dots,n\}}] \sim [\{\partial/\partial y^i\Big|_p\}_{i \in \{1,\dots,n\}}]. \tag{4.44}$$

Damit ist l wohldefiniert. $\square$

Lemma 4.3.7 . *Sei M eine n-dimensionale, orientierte Mannigfaltigkeit mit orientiertem Atlas $\mathfrak{U} := \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in A} = \{(U_\alpha, x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, welcher die stetige, punktweise Orientierung $[\{X_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}]$ auf M spezifiziert. ω sei die zugehörige Orientierungsform, so dass $\omega(X_1, \dots, X_n) > 0$. Dann gilt für jede lokale Darstellung von ω auf einer Karte U_α aus $\mathfrak{U}$, mit $\omega = f_\alpha\, dx^1_\alpha \wedge \dots \wedge dx^n_\alpha$, dass $f_\alpha > 0$ auf U_α.*

Beweis. Mit den Voraussetzungen aus der Aussage, muss gezeigt werden, dass $f_\alpha(p) > 0$ für jeden Punkt $p \in U_\alpha$. Sei $p \in U_\alpha$ beliebig, dann existiert nach Lemma 4.2.1 eine eine Koordinatenumgebung $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^n) \in \mathfrak{U}$, so dass

$$(dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n)(X_1, \dots, X_n) > 0 \text{ auf } V. \tag{4.45}$$

Auf $U_\alpha \cap V$ gilt nach Satz 3.1.1

$$dx^1_\alpha \wedge \dots \wedge dx^n_\alpha = \left(\det\left[\frac{\partial x^i_\alpha}{\partial y^j}\right]\right) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \tag{4.46}$$

und für die Determinante gilt, $\det[\partial x^i_\alpha/\partial y^j] > 0$, da $\mathfrak{U}$ ein orientierter Atlas ist und damit die Jacobi-Determinante der Kartenwechsel strikt positiv ist. Damit gilt für $q \in U_\alpha \cap V$:

$$0 < \omega(X_1, \dots, X_n)_q = f_\alpha(q) \underbrace{\det\left[\frac{\partial x^i_\alpha}{\partial y^j}\right]\bigg|_q}_{>0} \underbrace{(dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n)(X_1, \dots, X_n)_q}_{>0}, \tag{4.47}$$

also ist insbesondere $f_\alpha(q) > 0$. Da $p \in U_\alpha$ beliebig gewählt war, folgt die Aussage. □

Zusammenfassend kann man konstatieren, dass ein orientierter Atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ $= \{(U_\alpha, x^1_\alpha, \dots, x^1_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ die Orientierung einer Mannigfaltigkeit $(M, [\sigma])$ festlegt, falls für jedes $\alpha \in A$ ein $f_\alpha \in C^\infty(U_\alpha, \mathbb{R})$ existiert mit $f_\alpha > 0$ auf U_α, so dass gilt

$$\sigma = f_\alpha\, dx^1_\alpha \wedge \dots \wedge dx^n_\alpha. \tag{4.48}$$

Für spätere Zwecke wird noch folgendes Lemma benötigt.

Lemma 4.3.8 . *Sei $F\colon (N, [\omega_N]) \to (M, [\omega_M])$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus zwischen zwei n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten N und M. Wenn $\mathfrak{V} := \{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A} = \{(V_\alpha, y^1_\alpha, \dots, y^1_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ein orientierter Atlas für M ist, welcher die Orientierung für M festlegt, dann ist $F^*\mathfrak{V} := \{(F^{-1}(V_\alpha), F^*\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ $= \{(F^{-1}(V_\alpha), F^1_\alpha, \dots, F^1_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ein orientierter Atlas, welcher die Orientierung für N spezifiziert, wobei $F^i_\alpha = y^i_\alpha \circ F$.*

Beweis. Da F ein Diffeomorphismus ist, stellt $F^*\mathfrak{V}$ einen Atlas auf N dar. Seien $(F^{-1}(V_\alpha), F^*\psi_\alpha)$ und $(F^{-1}(V_\beta), F^*\psi_\beta)$ zwei Karten aus $F^*\mathfrak{V}$, dann gilt für die Jacobi-Determinante der Übergangsabbildung, dass

$$\det J\Big(F^*\psi_\alpha \circ (F^*\psi_\beta)^{-1}\Big) = \det J\Big(\psi_\alpha \circ F \circ (\psi_\beta \circ F)^{-1}\Big)$$

$$= \det J\Big(\psi_\alpha \circ F \circ F^{-1} \circ \psi_\beta^{-1}\Big) = \det J\Big(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}\Big)$$
$$> 0. \tag{4.49}$$

Also ist $F^*\mathfrak{V}$ ein orientierter Atlas.

Die Behauptung ist, dass der Atlas $\{(F^{-1}(V_\alpha), F_\alpha^1, \dots, F_\alpha^1)\}_{\alpha\in A}$ die Orientierung $F^*\omega_M$ auf N festlegt, falls ω_M eine Orientierungsform auf M ist. Dazu sei lokal auf V_α, $\omega = f_\alpha dy_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dy_\alpha^n$ und somit ist auf $F^{-1}(V_\alpha)$

$$F^*\omega = (F^* f_\alpha)\,(dF_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dF_\alpha^n) \tag{4.50}$$

Man muss zeigen, dass $(F^* f_\alpha)(q) > 0$ für jeden Punkt $q \in F^{-1}(V_\alpha)$. Dazu sei $[\{X_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}]$ eine stetige, punktweise Orientierung auf N, festgelegt durch ω_N, also $\omega_N(X_1, \dots, X_n) > 0$ auf N. Nach Annahme ist $[F^*\omega_M] = [\omega_N]$ und damit folgt

$$(F^*\omega)\,(X_1, \dots, X_n) > 0 \text{ auf } N. \tag{4.51}$$

Gemäß dem Lemma 4.3.7 ist damit $(F^* f_\alpha) > 0$ auf $F^{-1}(V_\alpha)$. $\square$

5 Mannigfaltigkeiten mit Rand

Ist man daran interessiert die Integrationstheorie auf Mannigfaltigkeiten umso reichhaltiger erscheinen zu lassen, so ist es von Nöten, den Begriff einer Mannigfaltigkeit zu erweitern. Dies wird insbesondere den *Rand* einer Mannigfaltigkeit betreffen. Prototyp einer Mannigfaltigkeit mit Rand ist der *abgeschlossene obere Halbraum*

$$\mathbb{H}^n = \{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0 \}, \tag{5.1}$$

welcher die Teilraumtopologie $\mathfrak{T}(\mathbb{H}^n)$ trägt, vererbt durch die Standardtopologie $\mathfrak{T}(\mathbb{R}^n)$ des $\mathbb{R}^n$.[1] Für die Menge aller inneren Punkte und die Menge aller Randpunkte sollen folgende Symbole verwendet werden

$$(\mathbb{H}^n)^\circ = \{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0 \} \tag{5.2}$$

$$\partial(\mathbb{H}^n) = \{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n = 0 \}. \tag{5.3}$$

Dieses Kapitel ist [Tu10, Kapitel 22] entlehnt.

5.1 Vorbetrachtungen

Zunächst müssen einige Hürden genommen werden, was die Definition von C^∞-Funktionen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand anbelangt. Dazu muss der Differenzierbarkeitsbegriff auf beliebige Mengen ausgedehnt werden.

Definition 5.1.1 . Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge. Eine Funktion $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ ist glatt in einem Punkt $p \in S$, falls eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von p existiert und eine glatte Funktion $\tilde{f}\colon U \to \mathbb{R}^n$, so dass $\tilde{f} = f$ auf $U \cap S$ gilt. Die Funktion f ist glatt auf S, falls sie in jedem Punkt von S glatt ist.

Der nächste Satz wird als Hilfsmittel dienen, um zu erkennen, dass innere und äußere Punkte des $\mathbb{H}^n$ invariant unter Diffeomorphismen sind.

Satz 5.1.2 . *Sei $U \in \mathfrak{T}(\mathbb{R}^n)$, $S \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge und $f\colon U \to S$ ein Diffeomorphismus. Dann ist $S \in \mathfrak{T}(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Der Beweis ist im Rahmen dieser Arbeit einigermaßen aufwendig und ist stattdessen vollständig [Tu10, Theorem 22.3] zu entnehmen. □

[1] $\mathfrak{T}(\Omega)$ bezeichne eine Topologie auf einer Menge Ω.

Es soll die Aussage des Satzes 5.1.2 explizit hervorgehoben werden; Der Diffeomorphismus f vermittelt lediglich zwischen offenen Mengen der Teilraumtopologie, also zwischen

$$U' \in \mathfrak{T}(U) := \{\, D \in U \;\Big|\; D = A \cap U \text{ für eine Menge } A \in \mathfrak{T}(\mathbb{R}^n) \,\} \tag{5.4}$$

und $V' \in \mathfrak{T}(V)$. Das bemerkenswerte des Satzes ist nun aber, dass man schlussfolgern kann, dass S sogar Element von $\mathfrak{T}(\mathbb{R}^n)$ ist.

Für eine Menge $U \subseteq \mathbb{H}^n$, bezeichne $U^\circ := (\mathbb{H}^n)^\circ \cap U$ und $\partial U := \partial(\mathbb{H}^n) \cap U$.

Satz 5.1.3 . *Seien $U, V \in \mathfrak{T}(\mathbb{H}^n)$ und $f\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt*

$$f(U^\circ) = f(V^\circ) \quad \textit{und} \quad f(\partial U) = f(\partial V). \tag{5.5}$$

Beweis. Sei $p \in (\mathbb{H}^n)^\circ \cap U$, dann existiert ein $B \in \mathfrak{T}(\mathbb{H}^n)$, so dass $p \in B$. Es gilt sogar, dass $B \in \mathfrak{T}(\mathbb{R}^n)$, da p innerer Punkt von $\mathbb{H}^n$ ist. Nach Aussage des Satzes 5.1.2 ist $f(B) \in \mathfrak{T}(\mathbb{R}^n)$ und nicht nur $f(B) \in \mathfrak{T}(\mathbb{H}^n)$. Damit ist aber gezeigt, dass $f(B) \subset (\mathbb{H}^n)^\circ$. Da $f(p) \in f(B)$ gilt, ist $f(p)$ ein innerer Punkt des oberen Halbraumes $\mathbb{H}^n$.

Sei $p \in \partial(\mathbb{H}^n) \cap U$, dann ist $f^{-1}(f(p))$ ein Randpunkt. $f^{-1}\colon V \to U$ ist jedoch nach Voraussetzung ein Diffeomorphismus und angenommen $f(p)$ wäre ein innerer Punkt, dann müsste nach dem eben Bewiesenen, auch p ein innerer Punkt sein, was jedoch einen Widerspruch darstellt. Also muss $f(p)$ ein Randpunkt von $\mathbb{H}^n$ sein. □

5.2 Mannigfaltigkeiten mit Rand

In dem oberen Halbraum $\mathbb{H}^n$ treten genau zwei Typen von offenen Mengen $B, B' \in \mathfrak{T}(\mathbb{H}^n)$ auf. Entweder $B \in \mathfrak{T}(\mathbb{H}^n)$ impliziert $B \in \mathfrak{T}(\mathbb{R}^n)$ oder aus $B' \in \mathfrak{T}(\mathbb{H}^n)$ folgt nicht $B' \in \mathfrak{T}(\mathbb{R}^n)$. Karten einer Mannigfaltigkeit sind lediglich homöomorph zu den Mengen des Typs $B \in \mathfrak{T}(\mathbb{R}^n)$. Für Mannigfaltigkeiten mit Rand reicht dies nicht aus. Es wird daher gesetzt, einen topologischen Raum M *lokal* $\mathbb{H}^n$ zu nennen, falls jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung U besitzt, die homöomorph ist zu einer offenen Menge aus $\mathfrak{T}(\mathbb{H}^n)$.

Definition 5.2.1 . Eine *topologische n-Mannigfaltigkeit mit Rand* ist ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis, der zudem die Hausdorff-Eigenschaft erfüllt und lokal $\mathbb{H}^n$ ist.

Man hält zunächst fest, dass eine Mannigfaltigkeit mit Rand mindestens die Dimension 1 besitzt (siehe dazu [Tu10, Beispiel 5.13]). Für den Fall $n = 1$ muss jedoch eine leichte Modifizierung vorgenommen werden. Hier dürfen zwei lokale Modelle erlaubt sein, einerseits die *rechte Halblinie* $\mathbb{H}^1$ und die *linke Halblinie*

$$\mathbb{L}^1 := \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \,\}. \tag{5.6}$$

In der Dimension 1 besteht eine Karte (U, ϕ) aus einer offenen Menge $U \in \mathfrak{T}(M)$ und einem Homöomorphismus $\phi\colon U \to B$, wobei entweder $B \in \mathfrak{T}(\mathbb{H}^1)$ oder $B \in \mathfrak{T}(\mathbb{L}^1)$

ist. Damit konnte nun erreicht werden, dass, falls $(U, x^1, \dots, x^n)$ eine Karte einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit Rand ist, dann ist auch $(U, -x^1, \dots, x^n)$ eine Karte, da die Multiplikation mit einer konstanten Funktion eine stetige Abbildung ist.

Eine Familie $\{(U, \phi)\})$ von Karten stellt einen C^∞-Atlas dar, falls für zwei beliebige Karten (U, ϕ) und (V, ψ), die Übergangsabbildung

$$\psi \circ \phi^{-1} \colon \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V) \subset \mathbb{H}^n \tag{5.7}$$

einen Diffeomorphismus ist. Man bedenke, dass diese Sprechweise im Sinne der Definition 5.1.1 wohldefiniert ist. Somit ist eine *C^∞-Mannigfaltigkeit mit Rand* eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand, ausgestattet mit einem maximalen C^∞-Atlas.

Ein Punkt $p \in M$ heißt *innerer Punkt*, falls in einer Karte (U, ϕ) der Punkt $\phi(p) \in (\mathbb{H}^n)^\circ$, also ein innerer Punkt von $\mathbb{H}^n$ ist. Gleichermaßen nennt man einen Punkt $p \in M$ einen *äußeren Punkt*, falls $\phi(p) \in \partial(\mathbb{H}^n)$, also ein äußerer Punkt von $\mathbb{H}^n$ ist. Dieser Sprachgebrauch ist wohldefiniert, hängt also nicht von der Wahl der Karte ab, denn falls (V, ψ) eine weitere Karte ist, dann bildet der Diffeomorphismus $\psi \circ \phi^{-1}$ den Punkt $\phi(p)$ auf $\psi(p)$ ab und nach Satz 5.1.3 ist $\psi(p)$ entweder innerer oder äußerer Punkt. Die Menge aller äußeren Punkte bzw. der Randpunkte wird mit ∂M bezeichnet und die der inneren mit M°.

Letztlich soll noch darauf hingewiesen werden, dass die meisten für Mannigfaltigkeiten eingeführten Konzepte, auch weiterhin für Mannigfaltigkeiten mit Rand Bestand haben. So arbeitet etwa das Lehrbuch [Lee12] konsistent von Beginn an mit dem Begriff der Mannigfaltigkeit mit Rand. Der einzige wirklich wesentliche Unterschied besteht darin, dass stets ein veränderter Differenzierbarkeitsbegriff im Sinne von Definition 5.1.1 herangezogen werden muss.

Im Beweis von Lemma 4.2.1 war es notwendig, dass man die Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ durch die Karte $(U, -x^1, \dots, x^n)$ ersetzen konnte, dies wäre für den Fall $n = 1$ nicht möglich gewesen, würde man den $\mathbb{L}^1$ nicht als lokales Modell für eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit mir Rand zulassen.

5.3 Rand einer Mannigfaltigkeit mit Rand

Sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension n mit dem Rand ∂M. Ist (U, ϕ) eine Karte auf M, dann soll $\phi' := \phi|_{U \cap \partial M}$ die Einschränkung der Koordinatenabbildung ϕ auf den Rand bezeichnen. Es ist klar, dass Randpunkte bzw. äußere Punkte unter der Abbildung ϕ auf Randpunkte abgebildet werden. Demnach ist

$$\phi' \colon U \cap \partial M \to \phi(U) \cap \partial(\mathbb{H}^n) \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \tag{5.8}$$

insbesondere ein Homöomorphismus. Denn nach [Tu10, Folgerung A.27] ist auch jede eingeschränkte stetige Funktion auf eine beliebige Teilmenge ihres Definitionsbereiches stetig bezüglich der jeweiligen Teilraumtopologie. Es vererben sich die Eigenschaften von einer abzählbaren Basis in ∂M (siehe [Tu10, Proposition A.14]) und die des Hausdorff-Raumes (siehe [Tu10, Proposition A.19]) auf ∂M, als Teilraum von M. Betrachtet man des Weiteren auf ∂M die durch M induzierte Teilraumtopologie, so kann ∂M als eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ ohne Rand verstanden werden. Denn Karte für den $\mathbb{R}^{n-1}$ ist insbesondere die identische Abbildung id: $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ und somit ist $\partial\mathbb{R}^{n-1} = \emptyset$ bzw. $\partial(\partial\mathbb{H}^n) = \emptyset$. Daraus ergibt sich $\partial(\partial M) = \emptyset$.

Darüber hinaus ist für zwei beliebige Karten (U, ϕ) und (V, ψ) die Abbildung

$$\psi' \circ (\phi')^{-1} \colon \phi'(U \cap V \cap \partial M) \to \psi'(U \cap V \cap \partial M) \tag{5.9}$$

sogar C^∞.

Somit ist Folgendes ersichtlich; Ein Atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ für M induziert einen Atlas $\{(U_\alpha \cap \partial M, \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial M})\}$ für ∂M und ∂M kann als eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ ohne Rand verstanden werden.

5.4 Nach außen zeigende Vektorfelder

Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand, dann ist ∂M eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Damit gibt es also für $p \in \partial M$ Tangentialvektoren X_p, für die gilt $X_p \in T_pM$ und $X_p \notin T_p(\partial M)$. Damit ist folgende Definition sinnvoll.

Definition 5.4.1 . Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand und $p \in \partial M$. Ein Tangentialvektor $X_p \in T_pM$ heißt *nach innen zeigend*, falls $X_p \notin T_p(\partial M)$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ existiert, so dass eine Kurve $c \colon (0, \varepsilon) \to M$ existiert mit $c(0) = p$, $c((0, \varepsilon)) \subset M^\circ$ und $c'(0) = X_p$. Ein Tangentialvektor $X_p \in T_pM$ wird als *nach außen zeigend* bezeichnet, falls $-X_p$ nach innen zeigend ist.

Ein Vektorfeld *entlang* ∂M ist eine Abbildung X, so dass $\partial M \ni p \mapsto X_p \in T_pM$. Auf einer Karte $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ um $p \in M$, kann solch ein Vektorfeld X lokal geschrieben werden als

$$X_q = \sum_{i=1}^{n} a^i(q) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q, \quad \text{für } q \in \partial M \cap U. \tag{5.10}$$

Das Vektorfeld X entlang ∂M ist *glatt im Punkt* $p \in \partial M$, wenn eine Koordinatenumgebung von p existiert, deren Funktionen a^i glatt sind auf ∂M. Man nennt es *glatt*, falls es in jedem Punkt $p \in \partial M$ glatt ist. Man kann zeigen, dass ein Vektorfeld genau dann nach außen zeigend ist, wenn bezüglich, beliebigen lokalen Koordinaten $a^n(p) < 0$ (siehe [Tu10, Lösung 22.3]).

Satz 5.4.2 . *Auf einer Mannigfaltigkeit M mit Rand ∂M existiert stets ein glattes, nach außen zeigendes Vektorfeld entlang ∂M.*

Beweis. Es soll eine Überdeckung von ∂M durch offene Koordinatenumgebungen $(U_\alpha, x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha)$ auf M zur Argumentation herangezogen werden. Auf jedem U_α ist das Vektorfeld $X_\alpha = -\partial/\partial x^n_\alpha$ entlang $U_\alpha \cap \partial M$ glatt und nach außen zeigend. Man wähle eine Zerlegung der Eins $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ auf M bezüglich der offenen Überdeckung $\{U_\alpha \cap \partial M\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$. Man kann zeigen, dass $X := \sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} \rho_\alpha X_\alpha$ die erforderlichen Eigenschaften besitzt (siehe [Tu10, Lösung 22.4]). □

5.5 Orientierung des Randes

Definition 5.5.1 . Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\beta \in A_k(V)$. Für jedes $v \in V$ und $k \geq 2$ kann eine lineare Abbildung $i_v\colon A_k(V) \to A_{k-1}(V)$ definiert werden, die auch *innere Multiplikation* oder *Kontraktion* mit v genannt wird,

$$(i_v\beta)(w_1, \ldots, w_{k-1}) := \beta(v, w_1, \ldots, w_{k-1}). \tag{5.11}$$

Man definiert $i_v\beta = \beta(v)$ für $\beta \in A_1(V)$ und $i_v\beta = 0$, falls $\beta \in A_0(V)$ bzw. $\beta \equiv \mathit{const}$. Falls $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\omega \in \Omega^k(M)$, dann ist die $(k-1)$-Form $i_X\omega$ punktweise erklärt, also $(i_X\omega)_p = i_{X_p}\omega_p$ für $p \in M$.

Lemma 5.5.2 . *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Für jede beliebige Familie $\{\alpha^i\}_{i\in\{1,\ldots,k\}} \subseteq V^*$ von Kovektoren und $v \in V$ gilt*

$$(i_v\beta)(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \alpha^i(v)\, \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \cdots \wedge \alpha^k, \tag{5.12}$$

wobei das Zirkumflex $\widehat{\ }$ dafür steht, dass α^i im Keilprodukt ausgelassen wird.

Beweis. [Tu10, Proposition 20.7] □

Satz 5.5.3 . *Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension n mit Rand. Wenn ω eine Orientierungsform auf M ist und X ein glattes, nach außen zeigendes Vektorfeld auf ∂M, dann ist $i_X\omega$ eine glatte, nirgends verschwindende $(n-1)$-Form auf ∂M. Also ist ∂M orientierbar.*

Beweis. Da ω und X beide jeweils glatt auf ∂M sind, ist auch die Kontraktion $i_x\omega$ glatt. Dies folgt mit Satz 3.3.2 (d). Durch einen Widerspruchsbeweis soll nun bewiesen werden, dass $i_X\omega$ nirgends auf ∂M verschwindet. Angenommen $(i_X\omega)_p(v_1, \ldots, v_{n-1}) = 0$ für alle $p \in \partial M$ und $\{v_i\}_{i\in\{1,\ldots,n-1\}} \subseteq T_p(\partial M)$. Sei $\{e_i\}_{i\in\{1,\ldots,n-1\}}$ eine Basis für $T_p(\partial M)$. Dann ist $\{X_p, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ eine Basis für T_pM, da X_p nach außen zeigend ist, also lokal einen von Null verschiedene Komponente bezüglich $\partial/\partial x^n$ besitzt. Damit gilt $\omega_p(X_p, e_1, \ldots, e_{n-1}) = (i_X\omega)_p(e_1, \ldots, e_{n-1}) = 0$. Als Multilineare Abbildung ist die n-Form ω_p jedoch eindeutig dadurch festgelegt, wie sie auf die jeweiligen Basisvektoren wirkt und damit folgt $\omega_p \equiv 0$. Dies stellt einen Widerspruch zur Voraussetzung dar. Somit kann $i_X\omega$ nur nirgends verschwindend auf ∂M sein. Also ist ∂M nach Satz 4.2.2 orientierbar. □

Satz 5.5.4 . *Sei M eine orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand, $p \in \partial M$ und $X_p \in T_pM$ nach außen zeigender Tangentialvektor. Dann sind äquivalent:*

(a) *Die geordnete Basis $\{v_i\}_{i\in\{1,\ldots,n-1\}}$ des Raums $T_p(\partial M)$ repräsentiert die Orientierung des Randes ∂M im Punkt p.*

(b) *Die geordnete Basis* $\{X_p, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ *des Raums* T_pM *repräsentiert die Orientierung für* M *im Punkt* p.

Beweis. Mit den Voraussetzungen aus dem Satz gilt folgende Kette von äquivalenten Umformungen:

$$\begin{aligned}
&\{v_i\}_{i\in\{1,\ldots,n-1\}} \text{ repräsentiert die Orientierung des Randes auf } \partial M \text{ im Punkt } p\\
&\iff (i_{X_p}\omega_p)(v_1,\ldots,v_{n-1}) > 0 \iff \omega_p(X_p, v_1,\ldots,v_{n-1}) > 0\\
&\iff \{X_p, v_1,\ldots,v_{n-1}\} \text{ repräsentiert die Orientierung auf } M \text{ im Punkt } p \qquad (5.13)
\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage bewiesen. □

Im Sinne des Satzes 5.5.3, wurde die *Orientierung des Randes* ∂M durch die Orientierungsform $i_X\omega$ festgelegt. Damit diese Festlegung wohldefiniert ist, muss man zeigen, dass die Orientierungsform $i_X\omega$ unabhängig ist vom gewählten Repräsentanten der jeweiligen Äquivalenzklasse von ω einerseits und darf andererseits nicht von dem jeweiligen nach außen zeigenden Vektorfeld X abhängen.

Sei also $\tau \sim \omega$ eine weitere Orientierungsform auf M, d.h. es existiert ein $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ mit $f > 0$ auf M, so dass $\tau = f\omega$. Dann gilt für $p \in M$ und $\{v_i\}_{i\in\{1,\ldots,n-1\}} \subseteq T_p(\partial M)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned}
(i_X\tau)_p(v_1,\ldots,v_{n-1}) &= \Big(i_{X_p}(f\omega)_p\Big)(v_1,\ldots,v_{n-1}) = (f\omega)_p(X_p, v_1,\ldots,v_{n-1})\\
&= f(p)\Big(\omega_p(X_p, v_1,\ldots,v_{n-1})\Big) = f(p)\Big(i_{X_p}\omega_p(v_1,\ldots,v_{n-1})\Big)\\
&= f(p)\Big((i_X\omega)_p(v_1,\ldots,v_{n-1})\Big)\\
&= (f\, i_X\omega)_p(v_1,\ldots,v_{n-1}). \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $i_X\tau \sim i_X\omega$.

Sei nun Y ebenfalls ein glattes, nach außen zeigendes Vektorfeld auf ∂M und ω eine Orientierungsform auf M. Man wählt eine Karte $(U,\phi) = (U, x^1,\ldots,x^n)$ um $p \in M$, so dass lokal für $q \in U \cap \partial M$ gilt

$$X_q = \sum_{i=1}^n a^i(q)\, \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_q \quad \text{und} \quad Y_q = \sum_{i=1}^n b^i(q)\, \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_q, \qquad (5.15)$$

für $a^i, b^i \in C^\infty((U\cap\partial M),\mathbb{R})$ mit $a^n < 0$ und $b^n < 0$ auf $U \cap \partial M$. Man stellt fest, dass $\{X_p, \partial/\partial x^1|_p, \ldots, \partial/\partial x^1|_p\}$ und $\{Y_p, \partial/\partial x^1|_p, \ldots, \partial/\partial x^1|_p\}$ jeweils Basen für den Tangentialraum T_pM sind. Die Determinante der Übergangsmatrix zwischen diesen Basen ist gegeben durch $a^n/b^n > 0$. Somit bestimmen also die Basen die gleiche Orientierung für T_pM und nach Aussage des Satzes 5.5.4 impliziert dies, dass X und Y auch wirklich die gleiche Orientierung auf $T_p(\partial M)$ festlegen.

Beispiel 5.5.5 (Orientierung für $\partial\mathbb{H}^n$). Die Standardorientierung des oberen Halbraumes $\mathbb{H}^n$ ist als Orientierungsform durch die nirgends verschwindende n-Form $\omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ auf $\mathbb{H}^n$ gegeben. Wie bereits oben diskutiert ist ein Vektorfeld genau dann nach außen zeigend ist, wenn bezüglich beliebigen lokalen Koordinaten die n-te Komponente nicht-positiv ist. Das heißt also, dass $-\partial/\partial x^n$ ein glattes, nach außen zeigendes Vektorfeld auf $\partial\mathbb{H}^n$ ist. Nach Satz 5.5.3 ist eine Orientierung des Randes durch die Kontraktion gegeben. Mittels Lemma 5.5.2 erhält man

$$\begin{aligned} i_{-\partial/\partial x^n}(\omega) &= -(-1)^{n-1}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} \\ &= (-1)^n\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Somit ist $\partial\mathbb{H}^n$ gleich zu der Standardorientierung auf $\mathbb{R}^{n-1}$ falls, n gerade und entgegengesetzt zu der Standardorientierung, wenn n ungerade ist. Symbolisch kann man das also so ausdrücken

$$(-1)^n\mathbb{R}^{n-1} = \partial\mathbb{H}^n. \tag{5.17}$$

6 Integration auf Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel soll eine Integrationstheorie für Differentialformen auf orientierten Mannigfaltigkeiten dargelegt werden. Dabei sollen zunächst Differentialformen auf einem Euklidischen Raum betrachtet werden und mittels einer Diffeomorphismusinvarianz und der Technik Zerlegung der Eins, kann diese Begrifflichkeit auf n-Formen, mit kompakten Träger auf einer orientierten Mannigfaltigkeit, ausgedehnt werden. Später ist man im Stande eines der herausragenden Resultate der Differentialgeomtrie zu beweisen: den *Integralsatz von Stokes*.

Die Ausarbeitungen in diesem Kapitel orientieren sich an [Tu10, Kapitel 23] und [Lee12, Kapitel 16].

6.1 Vorbetrachtungen

Um die Integrationstheorie auf orientierten Mannigfaltigkeiten konsequent einzubetten, soll kurz an einige Begrifflichkeiten des Riemann-Integrals im $\mathbb{R}^n$ angeknüpft werden, wie man sie auch in [Tu10, Abschnitt 23.1] finden kann.

Ein *abgeschlossener Quader* Q im $\mathbb{R}^n$ ist das kartesische Produkt $Q = [a^1, b^1] \times \cdots \times [a^n, b^n]$ von abgeschlossenen Intervallen in $\mathbb{R}$, mit $a^i, b^i \in \mathbb{R}$. Für beschränkte Funktion $f\colon Q \to \mathbb{R}$ kann eine Integrationstheorie entwickelt werden. Dies geschieht folgendermaßen;

Das *Volumen eines Quaders* Q ist definiert als $\operatorname{vol}(Q) := \prod_{i=1}^n (b^i - a^i)$. Eine *Partition* für den Quader Q ist eine endliche Familie $P := \{P_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$, wobei P_i eine Partition für $[a^i, b^i]$ ist, das heißt $P_i := \{p_0, \dots, p_m\}$, wobei $p_j \in \mathbb{R}$ und

$$a = p_0 < p_1 < \cdots < p_m = b. \tag{6.1}$$

Eine Partition P unterteilt einen Quader Q in geschlossene Teilquader, bezeichnet durch Q_j. Bezüglich einer vorliegenden Partition P von Q kann die *Untersumme* und *Obersumme* von f bestimmt werden:

$$U(f, P) := \sum_j (\inf_{Q_j} f) \operatorname{vol}(Q_j), \quad O(f, P) := \sum_j (\sup_{Q_j} f) \operatorname{vol}(Q_j). \tag{6.2}$$

Das *Unterintegral von* f *über* Q ist

$$\underline{\int_Q} f := \sup\{\, U(f, P) \mid P \text{ ist Partition für } Q \,\} \tag{6.3}$$

und das *Unterintegral von f über Q* ist

$$\overline{\int_Q} f := \inf\{\, O(f,P) \mid P \text{ ist Partition für } Q\,\}. \tag{6.4}$$

Definition 6.1.1 . Sei Q ein abgeschlossener Quader aus dem $\mathbb{R}^n$. Eine beschränkte Funktion $f\colon Q \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar*, falls $\underline{\int_Q} f = \overline{\int_Q} f$. In diesem Fall heißt die reelle Zahl $\int_Q f\, dx^1 \cdots dx^n := \underline{\int_Q} f = \overline{\int_Q} f$ das *Riemann-Integral* von f, wobei $x^1, \ldots, x^n$ Standardkoordinaten des $\mathbb{R}^n$ sind.

Wie [Lee12, Abschnitt C, S.651] zu entnehmen ist, so hat die Symbolreihenfolge $dx^1 \cdots dx^n$ selbst keine eigene Bedeutung. Man könnte sie auch ganz weglassen, nutzt sie aber stattdessen als eine Art schließende Klammer des Integralzeichens.

Ein wichtiges Resultat für die weiteren Ausführungen wird sein;

Satz 6.1.2 . *Wenn auf einer offenen Teilmenge U des $\mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ definiert ist und die Menge* $\operatorname{supp}(f)$ *kompakt ist, dann ist f Riemann-integrierbar auf U.*

Beweis. [Tu10, Proposition 23.4] □

6.2 Integral einer n-Form auf dem $\mathbb{R}^n$

Seien $x^1, \ldots, x^n$ die Standardkoordinaten des $\mathbb{R}^n$, dann kann im Sinne von (3.3) jede n-Form ω auf dem $\mathbb{R}^n$ geschrieben werden als $\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, mit einer eindeutigen Funktion $f\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Daher lässt sich jede Funktion f auf dem $\mathbb{R}^n$ eindeutig mit einer n-Form auf dem $\mathbb{R}^n$ identifizieren. Somit knüpft die Integration von n-Formen auf dem $\mathbb{R}^n$ an die Riemann-Integration von Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ an.

Definition 6.2.1 . Sei $\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ eine C^∞ n-Form auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit den Standardkoordinaten $x^1, \ldots, x^n$. Das *Integral von ω über $A \subseteq U$*, ist definiert als das Riemann-Integral der C^∞-Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$:

$$\int_A \omega = \int_A f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n := \int_A f\, dx^1 \cdots dx^n, \tag{6.5}$$

falls das Riemann-Integral auf der rechten Seite existiert.

Satz 6.2.2 . *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene, zusammenhängende Teilmengen und $T\colon V \to U$ ein Diffeomorphismus. Wenn ω eine glatte n-Form auf U ist, dann gilt*

$$\int_V T^*\omega = \begin{cases} \displaystyle\int_U \omega & \textit{falls } T \textit{ orientierungserhaltend,} \\ \displaystyle -\int_U \omega & \textit{falls } T \textit{ orientierungsumkehrend.} \end{cases} \tag{6.6}$$

Beweis. Seien $x^1, \dots, x^n$ die Standardkoordinaten auf U und $y^1, \dots, y^n$ auf V. Mit $T^i := x^i \circ T = T^*(x^i)$ soll die i-te Komponente von T bezeichnet werden. Die Jacobi-Matrix $[\partial T^i / \partial y^j]$ soll durch $J(T)$ abgekürzt werden. Nach Satz 3.1.1 gilt

$$dT^1 \wedge \cdots \wedge dT^n = (\det J(T))\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n. \tag{6.7}$$

Damit gelten folgende äquivalente Umformungen:

$$\begin{aligned}
\int_V T^*\omega &= \int_V (T^*f) \left((T^*dx^1) \wedge \cdots \wedge (T^*dx^n)\right) && \text{(Satz 3.4.2 und Satz 3.5.2)} \\
&= \int_V (f \circ T)\, dT^1 \wedge \cdots \wedge dT^n && \text{(Satz 2.5.2)} \\
&= \int_V (f \circ T)(\det J(T))\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n && \text{(nach (6.7))} \\
&= \int_V (f \circ T)(\det J(T))\, dy^1 \cdots dy^n. && (6.8)
\end{aligned}$$

Andererseits ist aus der Analysis bekannt, wie sich das Integral unter einer Koordinatentransformation transformiert, also

$$\int_U \omega = \int_U f\, dx^1 \cdots dx^n = \int_V (f \circ T) |\det J(T)|\, dy^1 \cdots dy^n \tag{6.9}$$

Nach Satz 4.2.6 ist $T\colon \mathbb{R}^n \supset V \to U \subseteq \mathbb{R}^n$ nur dann orientierungserhaltend, wenn $\det J(T) > 0$ auf V, also folgt damit $\int_V T^*\omega = \int_U \omega$. Entsprechendes gilt für orientierungsumkehrendes T, nur mit einem negativen Vorzeichen. □

Dieser Satz zeigt, dass das Integral einer Differentialform nicht unter allen Diffeomorphismen invariant ist, sondern nur unter solchen, die orientierungserhaltend sind.

6.3 Integral einer Differentialform auf einer Mannigfaltigkeit

Sei M eine Mannigfaltigkeit. Es bezeichne für eine Differentialform $\omega \in \Omega^k(M)$ die Menge $S(\omega)$ durch

$$S(\omega) := \{\, p \in M \mid \omega_p \neq 0 \,\}, \tag{6.10}$$

dann ist

$$\operatorname{supp}(\omega) := \overline{S(\omega)}. \tag{6.11}$$

Durch $\Omega^k_c(M)$ sei die Menge aller C^∞ k-Formen, so dass $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq M$, symbolisiert.

Lemma 6.3.1 . *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $\phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus und $\omega \in \Omega^n_c(U)$ eine n-Form mit kompakten Träger* $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq U$*. Dann hat die n-Form $(\phi^{-1})^*\omega$ einen kompakten Träger in der offenen Teilmenge $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Beweis. Seien $\{v_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \subseteq T_q\mathbb{R}^n$, mit $q \in \phi(U)$. Nach Definition 3.4.1 ist der Pullback folgendermaßen erklärt:

$$\Big((\phi^{-1})^*\omega\Big)_q (v_1,\dots,v_n) = \omega_{\phi^{-1}(q)}\Big((\phi^{-1})_{*,q}v_1,\dots,(\phi^{-1})_{*,q}v_n\Big) \text{ für alle } q\in\phi(U). \tag{6.12}$$

Da ϕ ein Diffeomorphismus ist, gilt für $p \in M$, mit $\phi(p) = q$, dass $\phi^{-1}(q) = p$. Also hat man für $p \in M$

$$\Big((\phi^{-1})^*\omega\Big)_{\phi(p)} \neq 0 \iff \omega_p \neq 0. \tag{6.13}$$

Damit ist klar, dass gilt

$$\Big\{\, q\in\phi(U) \;\Big|\; \Big((\phi^{-1})^*\omega\Big)_q \neq 0 \,\Big\} \subseteq \phi(\operatorname{supp}(\omega)) \tag{6.14}$$

Nach [Tu10, Proposition A.34] ist das stetige Bild einer kompakten Menge wieder kompakt und da ϕ ein Diffeomorphismus ist, ist $\phi(\operatorname{supp}(\omega))$ kompakt und als Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ insbesondere abgeschlossen. Der Abschluss einer Menge A, ist die kleinste Menge, die A enthält und zudem abgeschlossen ist. Daher gilt

$$\operatorname{supp}\Big((\phi^{-1})^*\omega)\Big) = \overline{\{\, q\in\phi(U) \;\big|\; ((\phi^{-1})^*\omega)_q \neq 0 \,\}} \subseteq \phi(\operatorname{supp}(\omega)) \tag{6.15}$$

Nach [Tu10, Proposition A.30] ist jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge selbst wieder kompakt, also ist $\operatorname{supp}((\phi^{-1})^*\omega))$ kompakt. $\square$

Definition 6.3.2 . Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension n und $\mathfrak{U} := \{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}$ ein orientierter Atlas, der nach Satz 4.3.6 die Orientierung der Mannigfaltigkeit M festlegt. Sei $(U,\phi)\in\mathfrak{U}$ und $\omega\in\Omega^n_{\mathrm{c}}(U)$ eine n-Form mit kompakten Träger $\operatorname{supp}(\omega)\subseteq U$. Man definiert das *Integral von ω über U* als

$$\int_U \omega := \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*\omega. \tag{6.16}$$

Es sei darauf hingewiesen, dass mittels des Lemmas 6.3.1 die rechte Seite des Integrals in (6.16) nach Satz 6.1.2 auch tatsächlich existiert.

Lemma 6.3.3 . *Sei M, U, V n-dimensionale Mannigfaltigkeiten und $\omega\in\Omega^k(M)$. Seien des Weiteren $\phi\colon M\to U$ und $\psi\colon M\to V$ Diffeomorphismen. Dann gilt für jeden Punkt $q\in V$*

$$\Big((\phi\circ\psi^{-1})^*(\phi^{-1})^*\omega\Big)_q = ((\psi^{-1})^*\omega)_q. \tag{6.17}$$

Beweis. Man hat folgende Situation vorliegen:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\psi^{-1}"] \arrow[dr, "\phi\circ\psi^{-1}"'] & M \arrow[d, "\phi"] \\ & U \end{tikzcd} \tag{6.18}$$

Sei $\{v_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \subseteq T_qV$ für $q \in V$ und man bezeichne für $p \in U$

$$\widetilde{\omega}_p := \Big((\phi^{-1})^*\omega\Big)_p. \tag{6.19}$$

Somit gelten folgende Umformungen, unter Verwendung der Kettenregel für den Push-Forward

$$\begin{aligned}
\Big((\phi \circ \psi^{-1})\widetilde{\omega}\Big)_q(v_1,\dots,v_k) &= \widetilde{\omega}_{\phi(\psi^{-1}(q))}(\phi_* \circ \psi_*^{-1}v_1,\dots,\phi_* \circ \psi_*^{-1}v_k)\\
&= \omega_{\phi^{-1}(\phi(\psi^{-1}(q)))}(\phi_*^{-1} \circ \phi_* \circ \psi_*^{-1}v_1,\dots,\phi_*^{-1} \circ \phi_* \circ \psi_*^{-1}v_k)\\
&= \omega_{\psi^{-1}(q)}(\psi_*^{-1}v_1,\dots,\psi_*^{-1}v_k)\\
&= \Big((\psi^{-1})^*\omega\Big)_q(v_1,\dots,v_k)
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Da $\{v_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \subseteq T_qV$ beliebig gewählt war, ist die Aussage gezeigt. □

Satz 6.3.4 . *Es mögen die Voraussetzungen aus Definition 6.3.2 gelten, dann hängt $\int_U \omega$ nicht von der jeweiligen Koordinatenumgebung ab, die* $\operatorname{supp}(\omega)$ *enthält.*

Beweis. Angenommen (U,ϕ) und (V,ψ) seien zwei Koordinatenumgebungen, mit der Eigenschaft $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq U\cap V$ und $U, V \in \mathfrak{U}$. Dann ist $\psi\circ\phi^{-1}\colon \phi(U\cap V) \to \psi(U\cap V)$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus und damit gelten folgende Umformungen

$$\begin{aligned}
\int_{\psi(V)} (\psi^{-1})^*\omega &= \int_{\psi(U\cap V)} (\psi^{-1})^*\omega && (\operatorname{supp}(\omega) \subseteq U \cap V)\\
&= \int_{\phi(U\cap V)} (\psi \circ \phi^{-1})^*(\psi^{-1})^*\omega && (\text{Satz 6.2.2})\\
&= \int_{\phi(V)} (\phi^{-1})^*\omega && (\text{Lemma 6.3.3})
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Damit ist die Aussage bewiesen. □

Lemma 6.3.5 . *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $\omega,\tau \in \Omega_{\mathrm{c}}^n(U)$ n-Formen mit kompakten Träger auf U und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) $\displaystyle\int_U \omega + \tau = \int_U \omega + \int_U \tau$

(2) $\displaystyle\int_U a\omega = a\int_U \omega$

Beweis. Zu (1): Sei (U,ϕ) eine Karte auf M, mit der Eigenschaft $\operatorname{supp}(\omega), \operatorname{supp}(\tau) \subseteq U$, dann folgt mit der Linearität des Riemann-Integrals

$$\int_U \omega + \tau = \int_U (\phi^{-1})^*(\omega + \tau) = \int_U (\phi^{-1})^*\omega + (\phi^{-1})^*\tau = \int_U \omega + \int_U \tau. \tag{6.22}$$

Der Beweis von (2) nutzt ebenfalls die Linearität des Riemann-Integrals. □

Lemma 6.3.6 . *Sei M eine Mannigfaltigkeit und $\omega,\tau \in \Omega^k(M)$. Dann gilt:*

(1) $\operatorname{supp}(\omega + \tau) \subseteq \operatorname{supp}(\omega) \cup \operatorname{supp}(\tau)$

(2) $\operatorname{supp}(\omega \wedge \tau) \subseteq \operatorname{supp}(\omega) \cap \operatorname{supp}(\tau)$

Beweis. Zu (1): Falls $(\omega + \tau)_p \neq 0$, dann ist $\omega_p \neq 0$ oder $\tau_p \neq 0$. Daraus folgt, dass

$$S(\omega + \tau) \subseteq S(\omega) \cup S(\tau). \tag{6.23}$$

Nach Lemma A.2.3 erhält man bei Übergang zum Abschluss der Mengen

$$\operatorname{supp}(\omega + \tau) \subseteq \overline{S(\omega) \cup S(\tau)} = \operatorname{supp}(\omega) \cup \operatorname{supp}(\tau). \tag{6.24}$$

Damit ist die Aussage bewiesen.

Zu (2): Falls $(\omega \wedge \tau)_p \neq 0$, dann muss auch $\omega_p \neq 0$ und $\tau_p \neq 0$. Daraus folgt, dass

$$S(\omega \wedge \tau) \subseteq S(\omega) \cap S(\tau). \tag{6.25}$$

Nach Lemma A.2.4 erhält man bei Übergang zum Abschluss der Mengen

$$\operatorname{supp}(\omega \wedge \tau) \subseteq \overline{S(\omega) \cap S(\tau)} \subseteq \operatorname{supp}(\omega) \cap \operatorname{supp}(\tau). \tag{6.26}$$

Damit ist die Aussage bewiesen. □

Lemma 6.3.7 . *Sei $\{\operatorname{supp}(\rho_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ eine Familie von Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit M und $\omega \in \Omega^k_{\mathrm{c}}(M)$. Falls die Familie $\{\operatorname{supp}(\rho_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ lokal endlich ist, so gilt $\rho_\alpha \omega \equiv 0$ für alle bis auf endlich viele α.*

Beweis. Sei $p \in \operatorname{supp}(\omega)$. Da die Familie $\{\operatorname{supp}(\rho_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ lokal endlich ist, existiert eine Umgebung W_p von $p \in M$, für die gilt $W_p \cap \operatorname{supp}(\rho_\alpha) \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele α. Man betrachte die Familie $\{W_p\}_{p \in \operatorname{supp}(\omega)}$, welche $\operatorname{supp}(\omega)$ überdeckt. Da $\operatorname{supp}(\omega)$ nach Voraussetzung kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $\{W_{p_i}\}_{i \in \{1,\dots,m\}}$. Für jede Menge W_{p_i} gilt $W_{p_i} \cap \operatorname{supp}(\rho_\alpha) \neq \emptyset$ nur für höchstens endlich viele α. Also folgt aus der endlichen Teilüberdeckung, dass $\operatorname{supp}(\omega) \cap \operatorname{supp}(\rho_\alpha) \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele α. Nach Lemma 6.3.6 gilt jedoch für jedes $\alpha \in A$

$$\operatorname{supp}(\rho_\alpha \wedge \omega) = \operatorname{supp}(\rho_\alpha \omega) \subseteq \operatorname{supp}(\rho_\alpha) \cap \operatorname{supp}(\omega). \tag{6.27}$$

Also ist $\operatorname{supp}(\rho_\alpha \omega) \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele α. Daraus folgt $\rho_\alpha \omega \equiv 0$ für alle bis auf endlich viele α. □

Definition 6.3.8 . Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $\omega \in \Omega^n_{\mathrm{c}}(M)$ eine n-Form mit kompaktem Träger auf M und $\mathfrak{U} := \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ ein orientierter Atlas auf M. Man betrachte eine Zerlegung der Eins $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ bezüglich der offenen Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von M. Dann definiert man das *Integral von ω über M* zu

$$\int_M \omega := \sum_{\alpha \in A} \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega. \tag{6.28}$$

Die Definition von $\int_M \omega$ bedarf einiger Erläuterungen; Da die Zerlegung der Eins $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ lokal endlich ist, folgt gemäß Lemma 6.3.7, dass $\rho_\alpha \omega \equiv 0$ für alle bis auf endlich viele α. Das bedeutet insbesondere, dass

$$\omega = \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha \omega \tag{6.29}$$

eigentlich eine endliche Summe ist. Des Weiteren gilt gemäß Lemma 6.3.6, dass

$$\operatorname{supp}(\rho_\alpha \omega) \subseteq \operatorname{supp}(\rho_\alpha) \cap \operatorname{supp}(\omega) \subseteq \operatorname{supp}(\omega). \tag{6.30}$$

Per Definition ist $\operatorname{supp}(\rho_\alpha \omega)$ eine abgeschlossene Menge. Entsprechend [Tu10, Proposition A.30] ist $\operatorname{supp}(\rho_\alpha \omega)$ als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\operatorname{supp}(\omega)$ wieder kompakt. Da $\rho_\alpha \omega$ eine n-Form mit kompakten Träger in der Karte U_α ist, ist das Integral $\int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega$ zunächst nach Definition 6.3.2 sinnvoll definiert und mittels der Additivitätsaussage aus Lemma 6.3.5 ist es daher naheliegend für $\int_M \omega$ die Definition 6.3.8 zu wählen. Es fehlen lediglich noch zwei Eigenschaften zur Wohldefiniertheit:

Satz 6.3.9 . *Die Definition 6.3.8 für $\int_M \omega$ hängt nicht von der Wahl des orientierten Atlas' oder der Wahl der Zerlegung der Eins ab.*

Beweis. Sei $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ ein weiterer orientierter Atlas, der die Orientierung für M festlegt und $\{\chi_\beta\}_{\beta \in B}$ sei die Zerlegung der Eins bezüglich der offenen Überdeckung $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ von M. Man betrachte nun folgende äquivalente Umformungen:

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \in A} \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega &= \sum_{\alpha \in A} \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \sum_{\beta \in B} \chi_\beta \omega && \Big(\text{es gilt } \sum_{\beta \in B} \chi_\beta = 1\Big) \\
&= \sum_{\alpha \in A} \sum_{\beta \in B} \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \chi_\beta \omega && (\text{Lemma 6.3.7 und Lemma 6.3.5}) \\
&= \sum_{\alpha \in A} \sum_{\beta \in B} \int_{U_\alpha \cap U_\beta} \rho_\alpha \chi_\beta \omega && (\operatorname{supp}(\rho_\alpha \chi_\beta) \subseteq U_\alpha \cap U_\beta)
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Analog schlussfolgert man für $\sum_{\beta \in B} \int_{V_\beta} \chi_\beta \omega$ und erhält

$$\sum_{\beta \in B} \int_{V_\beta} \chi_\beta \omega = \sum_{\alpha \in A} \sum_{\beta \in B} \int_{U_\alpha \cap U_\beta} \rho_\alpha \chi_\beta \omega \tag{6.32}$$

Nach [Tu10, Beispiel 5.12] ist $\{(U_\alpha \cap V_\beta, \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap V_\beta})\}_{(\alpha,\beta) \in A \times B}$ wieder ein Atlas, der zudem die Orientierung von M festlegt und daher ist für jede Indexwahl $(\alpha, \beta) \in A \times B$ die rechte Seite in (6.31) und (6.32) im Sinne der Definition 6.3.2 wohldefiniert. Letztlich erhält man also

$$\sum_{\alpha \in A} \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega = \sum_{\beta \in B} \int_{V_\beta} \chi_\beta \omega, \tag{6.33}$$

womit die Aussage bewiesen ist. $\square$

Lemma 6.3.10 . *Sei $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine C^∞-Zerlegung der Eins bezüglich $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq 2^M$*

auf einer Mannigfaltigkeit M, $F\colon N \to M$ eine C^∞-Abbildung zwischen den Mannigfaltigkeiten N und M und $h \in C^\infty(M,\mathbb{R})$. Dann gilt:

(1) $\operatorname{supp}(F^*h) \subseteq F^{-1}(\operatorname{supp}(h))$

(2) *Die Familie* $\{\operatorname{supp}(F^*\rho_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ *ist* lokal endlich.

(3) *Die Familie $\{F^*\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ist eine Zerlegung der Eins bezüglich der offenen Überdeckung $\{F^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ von N.*

Beweis. Zu (1): Es wird zunächst gezeigt, dass gilt[1]

$$\begin{aligned}(F^*h)^{-1}(\mathbb{R}^\times) &= \{\, q \in N \mid (F^*h)(q) \in \mathbb{R}^\times \,\}\\ &\subseteq \{\, q \in N \mid F(q) \in \operatorname{supp}(h) \,\} = F^{-1}(\operatorname{supp}(h)).\end{aligned} \tag{6.34}$$

Sei $q \in (F^*h)^{-1}(\mathbb{R}^\times)$, dann ist $(h \circ F)(q) \neq 0$ und damit $F(q) \in \operatorname{supp}(h)$. Damit ist (6.34) gezeigt. Nach Definition ist $\operatorname{supp}(h)$ eine abgeschlossene Menge in M. Da F stetig ist, ist auch $F^{-1}(\operatorname{supp}(h)$ abgeschlossen in N und somit gilt bei Übergang zum Abschluss

$$\operatorname{supp}((F^*h)^{-1}) = \overline{(F^*h)^{-1}(\mathbb{R}^\times)} \subseteq F^{-1}(\operatorname{supp}(h)). \tag{6.35}$$

Damit ist (1) gezeigt.

Zu (2): Da die Familie $\{\operatorname{supp}(\rho_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ lokal endlich ist, existiert für jeden Punkt Punkt $p \in F(N)$ eine Umgebung U, so dass $U \cap \operatorname{supp}(\rho_\alpha) \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele α. Sei also $q \in N$ und U eine Umgebung für $F(p) \in M$ mit der genannten Eigenschaft. Dann ist das Urbild $F^{-1}(U)$ eine Umgebung für q, für die gilt :

$$\begin{aligned}F^{-1}(U) \cap \operatorname{supp}(F^*\rho_\alpha) &\subseteq F^{-1}(U) \cap F^{-1}(\operatorname{supp}(\rho_\alpha))\\ &\subseteq F^{-1}(U \cap \operatorname{supp}(\rho_\alpha)).\end{aligned} \tag{6.36}$$

Da $F^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ist $F^{-1}(U) \cap \operatorname{supp}(F^*\rho_\alpha) \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele α. Damit ist (2) gezeigt.

Zu (3): Da $F\colon N \to M$ stetig ist, ist es offensichtlich, dass $\{F^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ eine offene Überdeckung von N darstellt. Es ist klar, dass $0 \leq F^*\rho_\alpha(q) \leq 1$ für alle $\alpha \in A$ und alle $q \in N$. Außerdem gilt $\operatorname{supp}(F^*\rho_\alpha) \subseteq F^{-1}((\operatorname{supp}(\rho_\alpha))) \subseteq F^{-1}(U_\alpha)$ und des Weiteren $\sum_{\alpha\in A} F^*\rho_\alpha(q) = \sum_{\alpha\in A} \rho_\alpha(F(q)) = 1$ für alle $q \in M$. Damit ist (3) gezeigt. □

Satz 6.3.11 . *Sei M eine orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $\omega, \tau \in \Omega^n_{\mathrm{c}}(M)$ n-Formen mit kompakten Träger auf M.*

(1) Additivität: *Es gilt $\omega + \tau \in \Omega^n_{\mathrm{c}}(M)$ und*

$$\int_M \omega + \tau = \int_M \omega + \int_M \tau. \tag{6.37}$$

[1] $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(2) Homogenität: *Für $a \in \mathbb{R}$ ist $a\omega \in \Omega^n_{\mathrm{c}}(M)$ und*

$$\int_M a\omega = a \int_M \omega. \tag{6.38}$$

(3) Orientierungsumkehrung: *Falls $-M$ die gleiche Mannigfaltigkeit M mit entgegengesetzter Orientierung bezeichne, dann gilt*

$$\int_{-M} \omega = - \int_M \omega. \tag{6.39}$$

(4) Positivität: *Falls ω zudem die Eigenschaft trage, die Orientierung $[\{X_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}]$ auf M festzulegen, also insbesondere gelten mag $\omega(X_1, \dots, X_n) > 0$, dann folgt*

$$\int_M \omega > 0. \tag{6.40}$$

(5) Diffeomorphismusinvarianz: *Seien N, M zusammenhängende, orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeiten und $F\colon N \to M$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt: $F^*\omega \in \Omega^n_{\mathrm{c}}(N)$ und*

$$\int_N F^*\omega = \begin{cases} \int_M \omega & \text{falls } F \text{ orientierungserhaltend,} \\ -\int_M \omega & \text{falls } F \text{ orientierungsumkehrend.} \end{cases} \tag{6.41}$$

Beweis. Zu (1): Aus Lemma 6.3.6 ist bekannt, dass gilt

$$\operatorname{supp}(\omega + \tau) \subseteq \operatorname{supp}(\omega) \cup \operatorname{supp}(\tau) \tag{6.42}$$

Da $\operatorname{supp}(\omega)$ und $\operatorname{supp}(\tau)$ nach Voraussetzung jeweils kompakte Mengen sind, sieht man leicht ein, dass auch deren Vereinigung eine kompakte Menge darstellt. Der Träger $\operatorname{supp}(\omega+\tau)$ ist per Definition abgeschlossen und nach [Tu10, Proposition A.30] ist jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge selbst wieder kompakt. Also ist $\omega + \tau \in \Omega^n_{\mathrm{c}}(M)$ und $\int_M \omega + \tau$ ist damit wohldefiniert.

Sei $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ein orientierter Atlas, der die Orientierung für M festlegt. Man wähle wieder eine Zerlegung der Eins $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ bezüglich der offenen Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ von M. Dann gelten folgende Umformungen

$$\begin{aligned} \int_M \omega + \tau &= \sum_{\alpha\in A} \int_{U_\alpha} (\omega + \tau)\rho_\alpha \\ &= \sum_{\alpha\in A} \int_{U_\alpha} \omega\rho_\alpha + \int_{U_\alpha} \tau\rho_\alpha \quad \text{(Lemma 6.3.7 und Lemma 6.3.5)} \\ &= \int_M \omega + \int_M \tau \end{aligned} \tag{6.43}$$

Damit ist die Aussage bewiesen.

Zu (2): Für $a = 0$ ist die Aussage trivial. Für $a \neq 0$ ist $a\omega \neq 0 \iff \omega \neq 0$, also $\operatorname{supp}(a\omega) = \operatorname{supp}(\omega)$ und damit hat $a\omega$ kompakten Träger auf M. Der Rest geht analog wie in (1) und nutzt wieder Lemma 6.3.7 und Lemma 6.3.5.

Zu (3): Wie im Beweis von (1) sieht man anhand der Argumentation in (6.43), dass es genügt die Aussage auf einer beliebigen Karte von M nachzuweisen. Sei daher $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ eine Karte auf M, $\tau \in \Omega^n_{\mathrm{c}}(U)$ und $(U, \tilde{\phi}) = (U, -x^1, x^2, \dots, x^n)$ sei die mit der entgegengesetzten Orientierung assoziierte Karte. Die Behauptung ist, dass dann gilt

$$\int_{\tilde{\phi}(U)} (\tilde{\phi}^{-1})^* \tau = - \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \tau. \tag{6.44}$$

In der Tat; seien $\{r_i\}_{i \in \{1,\dots,n\}} \subseteq \mathbb{R}^n$ die Standardkoordinaten des $\mathbb{R}^n$, dann gilt $x^i = r^i \circ \phi$ und damit $r^i = x^i \circ \phi^{-1}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Des Weiteren ist für $i = 1$

$$- x^1 = r^1 \circ \tilde{\phi} \quad \text{und damit} \quad r^1 = -x^1 \circ \tilde{\phi}^{-1}. \tag{6.45}$$

Für alle $i = \{2, \dots, n\}$ gilt $x^i = r^i \circ \tilde{\phi}$ und damit $r^i = x^i \circ \phi^{-1}$. Auf U lässt sich τ darstellen durch $\tau = f\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, für $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Mit (6.45) folgt mittels den üblichen Rechenregeln für den Pullback

$$\begin{aligned}(\tilde{\phi}^{-1})^* \tau &= (f \circ \tilde{\phi}^{-1})\, d(x^1 \circ \tilde{\phi}^{-1}) \wedge d(x^2 \circ \tilde{\phi}^{-1}) \wedge \dots \wedge d(x^n \circ \tilde{\phi}^{-1}) \\ &= -(f \circ \tilde{\phi}^{-1})\, dr^1 \wedge dr^2 \wedge \dots \wedge dr^n.\end{aligned} \tag{6.46}$$

Und analog schlussfolgert man

$$(\phi^{-1})^* \tau = (f \circ \phi^{-1})\, dr^1 \wedge dr^2 \wedge \dots \wedge dr^n. \tag{6.47}$$

Falls $(a^1, a^2, \dots, a^n) \in \tilde{\phi}(U)$, ist die Abbildung des Kartenwechsels $\phi \circ \tilde{\phi}^{-1} \colon \tilde{\phi}(U) \to \phi(U)$ gegeben durch

$$\phi \circ \tilde{\phi}(a^1, a^2, \dots, a^n) = (-a^1, a^2, \dots, a^n) \tag{6.48}$$

und damit ist die Determinante der Jacobi-Matrix

$$|\det J(\phi \circ \tilde{\phi})| = |-1| = 1. \tag{6.49}$$

Damit gelten folgende äquivalente Umformungen

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{\phi}(U)} (\tilde{\phi}^{-1})^* \tau &= - \int_{\tilde{\phi}(U)} (f \circ \tilde{\phi}^{-1})\, dr^1 dr^2 \dots dr^n && \text{(nach (6.46))} \\ &= - \int_{\tilde{\phi}(U)} \Big((f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \tilde{\phi}^{-1}) \\ &\qquad \times |\det J(\phi \circ \tilde{\phi})|\, dr^1 dr^2 \dots dr^n \Big) && \text{(nach (6.49))} \\ &= - \int_{\phi(U)} (f \circ \phi^{-1})\, dr^1 dr^2 \dots dr^n && \text{(Transformationssatz)} \\ &= - \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \tau.\end{aligned} \tag{6.50}$$

Damit ist die Aussage bewiesen.

Zu (4): Angenommen es gilt $\omega(X_1, \ldots, X_n) > 0$, das heißt ω ist Orientierungsform auf M. Die Orientierung $[\{X_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}]$ legt nach Satz 4.3.6 einen orientierten Atlas $\mathfrak{U} := \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\} = \{(U_\alpha, x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha)\}$ auf M fest. Sei $(U_\alpha, \phi_\alpha) = (U_\alpha, x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha) \in \mathfrak{U}$. Nach Lemma 4.3.7 kann ω lokal auf U_α geschrieben werden zu $\omega = f_\alpha\, dx^1_\alpha \wedge \cdots \wedge dx^n_\alpha$, wobei $f_\alpha > 0$ auf U_α. Damit gelten folgende Umformungen auf der Umgebung $\phi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, mit $\{r_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}} \subseteq \mathbb{R}^n$ als Standardkoordinaten des $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}(\phi_\alpha^{-1})^*\omega &= ((\phi_\alpha^{-1})^* f)\,(\phi_\alpha^{-1})^*\,(dx^1_\alpha \wedge \cdots \wedge dx^n_\alpha)\\ &= (f \circ \phi_\alpha^{-1})\, d(x^1_\alpha \circ \phi^{-1_\alpha}) \wedge \cdots \wedge d(x^n_\alpha \circ \phi^{-1_\alpha})\\ &= (f \circ \phi_\alpha^{-1})\,(dr^1_\alpha \wedge \cdots \wedge dr^n_\alpha)\end{aligned} \tag{6.51}$$

Die Funktion $(f\circ\phi_\alpha^{-1})$ ist strikt positiv auf $\phi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$. Damit ist nach Definition 6.3.8 die Summe, welche $\int_M \omega$ definiert, nicht-negativ, mit mindestens einem strikt positiven Summanden. Damit ist die Aussage (4) bewiesen.

Zu (5): Sei $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ ein orientierter Atlas für M, der die Orientierung auf M festlegt und $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ eine Zerlegung der Eins bezüglich der offenen Überdeckung von $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Angenommen $F\colon N \to M$ sei orientierungserhaltend. Gemäß Lemma 4.3.8 ist $\{(F^{-1}(U_\alpha), F^*\phi_\alpha)\}$ ein orientierter Atlas, der die Orientierung für N festlegt. Nach Lemma 6.3.10 ist $\{F^*\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ eine Zerlegung der Eins bezüglich der offenen Überdeckung durch $\{F^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ von N.

Ganz analog wie in Lemma 6.3.10 zeigt man, dass gilt

$$\operatorname{supp}(F^*\omega) \subseteq F^{-1}(\operatorname{supp}(\omega)). \tag{6.52}$$

Da F nach Voraussetzung ein Diffeomorphismus ist und $\operatorname{supp}(\omega)$ kompakt, ist $F^{-1}(\operatorname{supp}(\omega))$ selbst auch wieder kompakt. Die Menge $\operatorname{supp}(F^*\omega)$ ist eine abgeschlossene Menge und somit ist $\operatorname{supp}(F^*\omega)$ kompakt, das heißt $F^*\omega \in \Omega^n_{\mathrm{c}}(N)$.

Für das Integral von $F^*\omega$ gelten folgende Umformungen:

$$\begin{aligned}\int_N F^*\omega &= \sum_{\alpha\in A} \int_{F^{-1}(U_\alpha)} (F^*\rho_\alpha)(F^*\omega) && \text{(Lemma 6.3.10)}\\ &= \sum_{\alpha\in A} \int_{F^{-1}(U_\alpha)} F^*(\rho_\alpha\omega) && \text{(Satz 3.4.2)}\\ &= \sum_{\alpha\in A} \int_{(\phi_\alpha\circ F)(F^{-1}(U_\alpha))} ((\phi_\alpha \circ F)^{-1})^* F^*(\rho_\alpha\omega) && \text{(Lemma 4.3.8)}\\ &= \sum_{\alpha\in A} \int_{(\phi_\alpha\circ F)(F^{-1}(U_\alpha))} (F^{-1} \circ \phi_\alpha^{-1})^* F^*(\rho_\alpha\omega)\\ &= \sum_{\alpha\in A} \int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} (\phi_\alpha^{-1})^*(\rho_\alpha\omega) && \text{(Lemma 6.3.3)}\\ &= \sum_{\alpha\in A} \int_{U_\alpha} \rho_\alpha\omega = \int_M \omega\end{aligned} \tag{6.53}$$

Falls $F\colon N \to M$ orientierungsumkehrend ist, dann ist $\{(F^{-1}(U_\alpha), F^*\phi_\alpha)\}$ ein orientierter Atlas, der die entgegengesetzte Orientierung für N festlegt. Mit diesem Atlas können die analogen Rechnungen wie in (6.53) durchgeführt werden. Die Mengen $F^{-1}(U_\alpha)$ tragen dann die entgegengesetzte Orientierung und man nutzt an dieser Stelle die Aussage (3). Insgesamt erhält man damit $-\int_N F^*\omega = \int_M \omega$. □

Alle Aussagen in diesem Abschnitt gelten auch für Mannigfaltigkeiten mit Rand. Die Beweise laufen wortwörtlich gleich, nur muss an den entsprechenden Stellen $\mathbb{R}^n$ durch $\mathbb{H}^n$ ersetzt werden.

6.4 Integralsatz von Stokes

Für die Ausführungen in diesem Abschnitt sei daran erinnert, dass, wenn M eine orientierte Mannigfaltigkeit ist, dann besitzt deren Rand ∂M eine nach Satz 5.5.3 induzierte Orientierung. Mit $\iota\colon \partial M \hookrightarrow M$ sei die Inklusionsabbildung bezeichnet. Für gewöhnlich schreibt man für eine $(n-1)$-Form ω auf M statt dem Integral $\int_{\partial M} \iota^*\omega$ einfach $\int_{\partial M} \omega$.

Satz 6.4.1 (Stokes). *Sei M eine orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$. Dann gilt*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \tag{6.54}$$

Beweis. Die Aussage soll zunächst für den Fall $M = \mathbb{H}^n$ bewiesen werden. Da nach Annahme $\omega \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{H}^n)$, existiert ein $a \in \mathbb{R}_+$, so dass $\operatorname{supp}(\omega) \subset R := [-a,a] \times \cdots \times [-a,a] \times [0,a]$. Es ist bekannt, dass ω als $(n-1)$-Form auf $\mathbb{H}^n$ notiert werden kann zu

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n, \tag{6.55}$$

wobei das Zirkumflex ^ dafür steht, dass dx^i im Keilprodukt ausgelassen ist. Damit gelten folgende Umformungen:

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{i=1}^{n} d\omega_i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n && \text{(Definition 3.6.2)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n && \text{(Definition 2.1.3)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n && (\text{nur} \neq 0, \text{ falls } i = j)\\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n
\end{aligned} \tag{6.56}$$

Mit der Linearität des Integrals erhält man

$$\int_{\mathbb{H}^n} d\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_R \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_0^a \int_{-a}^a \cdots \int_{-a}^a \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} \, dx^1 \cdots dx^n \tag{6.57}$$

Da der Integrand in (6.57) insbesondere stetig ist und der Integrationsbereich kompakt ist, kann nach dem Satz von Fubini die Integrationsreihenfolge immer so vertauscht werden, dass zuerst die Integration bezüglich x^i ausgeführt wird. Mit Hilfe des Hauptsatzes der Integralrechnung rechnet man für die Terme mit $i \neq n$ Folgendes aus

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_0^a \int_{-a}^a \cdots \int_{-a}^a \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} \, dx^1 \cdots dx^n \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_0^a \int_{-a}^a \cdots \int_{-a}^a \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} \, dx^i dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_0^a \int_{-a}^a \cdots \int_{-a}^a [\omega_i(x)]_{x^i=-a}^{x^i=a} \, dx^i dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n \\
&\quad = 0,
\end{aligned} \tag{6.58}$$

da a so groß gewählt war, dass $\omega = 0$ für $x^i = \pm a$. Der einzig mögliche von Null verschiedene Beitrag stammt aus der Indexwahl $i = n$. Denn für diesen Term schlussfolgert man

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}^n} d\omega &= (-1)^{n-1} \int_{-a}^a \cdots \int_{-a}^a \int_o^a \frac{\partial \omega_n}{\partial x^n} \, dx^n dx^1 \cdots dx^{n-1} \\
&= (-1)^{n-1} \int_{-a}^a \cdots \int_{-a}^a [\omega_n(x)]_{x^i=0}^{x^i=a} \, dx^1 \cdots dx^{n-1} \\
&= (-1)^n \int_{-a}^a \cdots \int_{-a}^a \omega_n(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0) \, dx^1 \cdots dx^{n-1},
\end{aligned} \tag{6.59}$$

da $\omega_n = 0$, falls $x^n = a$ ist.

Nun soll die rechte Seite in (6.54) berechnet werden:

$$\int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{R \cap \partial H^n} \omega_i(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0) \, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{6.60}$$

Auf dem Rand $\partial \mathbb{H}^n$ gilt $x^n = 0$ und somit $\iota^* dx^n = d(x^n \circ \iota) = 0$. Somit ist der einzig mögliche Beitrag für die Indexwahl $i = n$ zu verzeichnen und deswegen

$$\int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega = \int_{R \cap \partial \mathbb{H}^n} \omega_n(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0) \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}. \tag{6.61}$$

Nach Beispiel 5.5.5 gilt $(-1)^n \mathbb{R}^{n-1} = \partial \mathbb{H}^n$. Falls n gerade ist, folgt aus (6.58) und (6.61)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}^n} d\omega &= \int_{R \cap \mathbb{R}^{n-1}} \omega_n(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0) \, dx^1 \cdots dx^{n-1} \\
&= \int_{R \cap \partial \mathbb{H}^n} \omega_n(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0) \, dx^1 \cdots dx^{n-1}
\end{aligned}$$

$$= \int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega. \tag{6.62}$$

Falls n ungerade ist, folgt aus (6.58) und (6.61) mittels Satz 6.3.11

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}^n} d\omega &= -\int_{R\cap\mathbb{R}^{n-1}} \omega_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0)\, dx^1 \cdots dx^{n-1} \\
&= \int_{-(R\cap\mathbb{R}^{n-1})} \omega_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0)\, dx^1 \cdots dx^{n-1} \\
&= \int_{R\cap\partial\mathbb{H}^n} \omega_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0)\, dx^1 \cdots dx^{n-1} \\
&= \int_{\partial\mathbb{H}^n} \omega.
\end{aligned} \tag{6.63}$$

In beiden Fällen hält man fest, dass für $M = \mathbb{H}^n$ gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \tag{6.64}$$

Als nächstes wird der Fall $M = \mathbb{R}^n$ betrachtet. Hier gilt, dass $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq A := [-a, a]^n$. In diesem Fall kann die Rechnung ganz analog durchgeführt werden, nur dass in (6.58) nun auch der Term $i = n$ wegfällt, ganz analog zu den anderen. Da $\partial M = \emptyset$, ist $\int_{\partial M} \omega = \int_\emptyset \omega = 0$. Insgesamt kann man für diesen Fall festhalten

$$\int_M d\omega = 0 = \int_{\partial M} \omega. \tag{6.65}$$

Jetzt sei M eine beliebige, orientierte, n-dimensionale Mannigfaltigkeit U mit Rand, die durch eine einzige Karte $\phi\colon U \to \phi(U) \subseteq \mathbb{H}^n$ überdeckt wird. Die Standardkoordinaten in $\mathbb{H}^n$ seien durch $(r^1, \dots, r^n)$ symbolisiert und es bezeichne $x^i := r^i \circ \phi$. Die Orientierung auf U sei durch den positiv orientierten Rahmen $[\{\partial/\partial x^i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}]$ festgelegt, dann ist $\omega_U := dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ eine Orientierungsform auf U, denn

$$\omega_U \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) > 0 \text{ auf } U. \tag{6.66}$$

Auf U sei eine $(n-1)$-Form ω definiert ist, deren kompakter Träger in U enthalten ist. Nach Definition 6.3.8 des Integrals gilt zunächst

$$\int_U d\omega = \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* d\omega = \int_{\phi(U)} d(\phi^{-1})^* \omega, \tag{6.67}$$

da d und $(\phi^{-1})^*$ nach Satz 3.6.7 miteinander vertauschen. Aus dem Analogon von Lemma 6.3.1 für eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist ersichtlich, dass $\operatorname{supp}((\phi^{-1})^*\omega) \subseteq \phi(U)$ und dass $\operatorname{supp}((\phi^{-1})^*\omega)$ kompakt ist. Daher kann man nach Satz 3.3.3 $(\phi^{-1})^*\omega$ glatt durch Null auf ganz $\mathbb{H}^n$ fortsetzen, das heißt

$$\left((\phi^{-1})^*\omega\right)'_q = \begin{cases} ((\phi^{-1})^* d\omega)_q & \text{falls } q \in \phi(U), \\ 0 & \text{falls } q \neq \phi(U). \end{cases} \tag{6.68}$$

Die so definierte Fortsetzung, ermöglicht in (6.67) den Integrationsbereich zu vergrößern

$$\int_{\phi(U)} d(\phi^{-1})^*\omega = \int_{\phi(U)} d\left((\phi^{-1})^*\omega\right)' = \int_{\mathbb{H}^n} d\left((\phi^{-1})^*\omega\right)'. \tag{6.69}$$

Nach (6.64) gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{H}^n} d\left((\phi^{-1})^*\omega\right)' &= \int_{\partial\mathbb{H}^n} \left((\phi^{-1})^*\omega\right)' = \int_{\phi(U)\cap\partial\mathbb{H}^n} \left((\phi^{-1})^*\omega\right)' \\ &= \int_{\partial(\phi(U))} (\phi^{-1})^*\omega \end{aligned}\tag{6.70}$$

Die Behauptung ist nun, dass $\phi|_{\partial U}^{-1}\colon \partial(\phi(U)) \to \partial U$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus ist. Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Die Diffeomorphieeigenschaft für $\phi|_{\partial U}^{-1}$ folgt aus der Karteneigenschaft für ϕ und nach Satz 5.1.3 werden Rand- auf Randpunkte abgebildet. Daher verbleibt zu zeigen, dass für die Orientierung $[\omega_{\partial U}]$ auf ∂U gilt

$$\left[\left(\phi|_{\partial U}^{-1}\right)^* \omega_{\partial U}\right] = [\omega_{\partial(\phi(U))}], \tag{6.71}$$

falls $[\omega_{\partial(\phi(U))}]$ eine Orientierung auf $\partial(\phi(U))$ ist. Die Orientierung $[\omega_{\partial U}]$ auf ∂U ist gegeben durch

$$\omega_{\partial U} := i_{-\partial/\partial x^n}\omega_U. \tag{6.72}$$

Es ist bekannt, dass $\partial\mathbb{H}^n$ die Orientierung $(-1)^n\mathbb{R}^{n-1}$ trägt. Falls n gerade ist, ist die Orientierung auf $\partial\mathbb{H}^n$ durch $[\{\partial/\partial r^i\}_{i\in\{1,\dots,n-1\}}]$ festgelegt, ansonsten bestimmt durch $\{-\partial/\partial r^1, \partial/\partial r^2, \dots, \partial/\partial r^{n-1}\}$.

Sei nun n gerade, dann ist $\omega_{\partial(\phi(U))} := dr^1 \wedge \cdots \wedge dr^{n-1}$ eine Orientierungsform auf $\partial(\phi(U))$, denn

$$\omega_{\partial(\phi(U))}\left(\frac{\partial}{\partial r^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial r^{n-1}}\right) > 0. \tag{6.73}$$

Es muss gezeigt werden, dass $(\phi|_{\partial U}^{-1})^*(\omega_{\partial U})(\partial/\partial r^1, \dots, \partial/\partial r^{n-1}) > 0$ auf $\partial(\phi(U))$, denn dann ist $(\phi^{-1})^*(\omega_{\partial U}) \sim \omega_{\partial(\phi(U))}$. Es soll zunächst ein fundamentaler Zusammenhang festgehalten werden, der sich durch striktes Ausrechnen in $p \in \partial U$ ergibt (siehe etwa [Tu10, Proposition 8.8])

$$(\phi|_{\partial U}^{-1})_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_q\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \tag{6.74}$$

wobei $q := \phi|_{\partial U}(p)$. Damit gilt nun

$$\begin{aligned}&\left((\phi|_{\partial U}^{-1})^*(\omega_{\partial U})\right)_q\left(\left.\frac{\partial}{\partial r^1}\right|_q, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial r^{n-1}}\right|_q\right) \\ &\qquad= \left((\phi|_{\partial U}^{-1})^*(i_{-\partial/\partial x^n}\omega_U)\right)_q\left(\left.\frac{\partial}{\partial r^1}\right|_q, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial r^{n-1}}\right|_q\right)\end{aligned}$$

$$= (\omega_U)_p \left(- \frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_p , \frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p , \dots , \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\bigg|_p \right)$$

$$= (-1)^n \, (\omega_U)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p , \dots , \frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_p \right) > 0. \tag{6.75}$$

Den Fall, wenn n ungerade ist, zeigt man mit der gleichen Rechnung. Letztlich ist damit der Beweis erbracht, dass $\phi|_{\partial U}^{-1} \colon \partial(\phi(U)) \to \partial U$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus ist.

Damit kann nun in (6.70) der Satz 6.3.11 (5) angewendet werden und man erhält

$$\int_U d\omega = \int_{\partial(\phi(U))} (\phi^{-1})^* \omega = \int_{\partial(\phi(U))} (\phi|_{\partial U}^{-1})^* \omega = \int_{\partial U} \omega. \tag{6.76}$$

Falls U mit der entgegengesetzten Orientierung $[-\omega_U]$ versehen ist, gelten die gleichen Rechnungen, nur dass dann nach Satz 6.3.11 (3) ein zusätzliches Minuszeichen auf beiden Seiten in (6.76) erscheint. Falls U keinen Rand besitzt, dann wird $\mathbb{H}^n$ in den obigen Rechnungen durch $\mathbb{R}^n$ ersetzt und man erhält auch in diesem Fall das Resultat aus (6.76).

Sei μ eine Orientierung der Mannigfaltigkeit M. Nach dem Satz 4.3.6 kann die Orientierung μ durch einen orientierten Atlas $\mathfrak{U} := \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in M}$ beschrieben werden, so dass μ auf jeder Koordinatenumgebung $(U_\alpha, \phi_\alpha) = (U_\alpha, x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n) \in \mathfrak{U}$ lokal durch den positiv orientierten, stetigen Rahmen $\{\partial/\partial x_\alpha^i\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$ repräsentiert wird. Die Orientierung für $-M$ wird dann lokal durch den negativ orientierten, stetigen Rahmen $\{-\partial/\partial x_\alpha^1, \partial/\partial x_\alpha^2, \dots, \partial/\partial x_\alpha^n\}$ auf $(U_\alpha, -x_\alpha^1, x_\alpha^2, \dots, x_\alpha^n) \in -\mathfrak{U}$ repräsentiert.

Nun sei ω eine beliebige $(n-1)$-Form mit kompakten Träger auf einer orientierten, n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Sei M entweder orientiert durch μ oder durch $-\mu$, so wählt man eine Zerlegung der Eins $\{\rho_\alpha\}$ bezüglich der offenen Überdeckung $\{U_\alpha\}$ für M. Wie aus (6.30) hervorgeht, folgt $\operatorname{supp}(\rho_\alpha \omega) \subseteq U_\alpha$ mit $\operatorname{supp}(\rho_\alpha \omega)$ ist kompakt. Damit gilt nun folgende Kette äquivalenter Umformungen mit $\partial U_\alpha = U_\alpha \cap \partial M$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} \omega &= \int_{\partial M} \sum_\alpha \rho_\alpha \omega && \left(\sum_\alpha \rho_\alpha = 1 \right) \\
&= \sum_\alpha \int_{\partial M} \rho_\alpha \omega && \left(\sum_\alpha \rho_\alpha \omega \text{ ist endliche Summe nach Lemma 6.3.7} \right) \\
&= \sum_\alpha \int_{\partial U_\alpha} \rho_\alpha \omega && (\operatorname{supp}(\rho_\alpha \omega) \subseteq U_\alpha) \\
&= \sum_\alpha \int_{U_\alpha} d(\rho_\alpha \omega) && (\text{Satz von Stokes für } U_\alpha) \\
&= \sum_\alpha \int_M d(\rho_\alpha \omega) && (\operatorname{supp}(d(\rho_\alpha \omega)) \subseteq U_\alpha) \\
&= \int_M d\left(\sum_\alpha \omega \right) && \left(\sum_\alpha \rho_\alpha \omega \text{ ist endliche Summe nach Lemma 6.3.7} \right)
\end{aligned}$$

$$= \int_M d\omega \qquad \left(\sum_\alpha \rho_\alpha = 1 \right). \tag{6.77}$$

Damit ist die Aussage des Satzes bewiesen. □

7 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Die koordinatenfreie Formulierung der Maxwellschen Grundgesetze der Elektrodynamik benötigt die Einführung des Hodge-$*$-Operators. Dessen Einführung setzt die Existenz eines inneren Produktes voraus. *Riemannsche Mannigfaltigkeiten* sind Mannigfaltigkeiten mit der Wahl eines inneren Produktes für jeden Tangentialraum, so dass diese Zuordnung C^∞ in jedem Punkt der Mannigfaltigkeit ist. Damit wird es dann möglich sein, den Hodge-$*$-Operator auf k-Formen einer Mannigfaltigkeit zu definieren.

Dieses Kapitel nimmt Anleihen aus [Lee12, Kapitel 13],[Lee12, Kapitel 15], [AMR01, Abschnitt 7.2] und [AMR01, Abschnitt 7.5].

7.1 Tensoren und Tensorfelder auf einer Mannigfaltigkeit

In diesem Abschnitt sollen die Überlegungen aus Abschnitt 3.2 nun schlussendlich verallgemeinert werden.

In Abschnitt 2.3.3 ist es gelungen das Kotangentialbündel T^*M selbst als eine Mannigfaltigkeit mit differenzierbarer Struktur zu identifizieren. Nach Satz 2.3.7 konnte man das Kotangentialbündel T^*M als ein C^∞-Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M von Rang n auffassen. Ein C^∞-Vektorbündel ist jedoch grob gesprochen nichts anderes als eine Mannigfaltigkeit, bei der an jedem Punkt ein Vektorraum angeheftet ist. Hat man also Tensoren auf einem Vektorraum konstruiert, so steht dem nichts mehr im Wege, Tensorfelder auf einer Mannigfaltigkeit zu erklären.

In Kapitel 1 wurden Tensoren auf einem Vektorraum V untersucht und dabei wurde der Vektorraum $T^r_s(V)$ eingeführt. Der Vektorraum $T^r_s(V)$ war die Menge aller Tensoren vom Typ (r, s). Wendet man diese Konstruktionen auf den Tangentialraum T_pM einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M an, so ist man im Stande folgendes *Bündel von Tensoren des Typs* (r, s) zu definieren

$$T^r_s(TM) := \bigsqcup_{p\in M} T^r_s(T_pM). \tag{7.1}$$

Die Aufgabe bestünde nun darin $T^r_s(M)$ als C^∞-Vektorbündel über M von Rang n^{r+s} zu identifizieren. Dies kann an dieser Stelle wieder nur skizziert werden und verweisen darauf, dass die Schritte analog zu denen in Abschnitt 2.3 zu verstehen sind oder man konsultiert an dieser Stelle [Lee12, Lemma 10.6]. Liegt eine Basis für einen Vektorraum V fest, dann ist nach Satz 1.2.2 automatisch eine Basis für den Raum $T^r_s(V)$ gegeben. Beginnt man mit den Untersuchungen auf einer Karte

$(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$, dann ist $\{\partial/\partial x^i|_p\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ eines Basis des Raumes T_pM für jeden Punkt $p \in U$. Folgt man der Konstruktion des Kotangentialbündels, dann induziert die Karte (U, ϕ) eine Koordinatenabbildung $\tilde{\phi}\colon T^r_s(TU) \to \phi(U) \times \mathbb{R}^{n^{r+s}}$. In diesem Sinne „entlarvt“ sich die disjunkte Vereinigung von Vektorräumen als eine Mannigfaltigkeit. Damit ist man prinzipiell im Stande $T^r_s(TM)$ als C^∞-Vektorbündel über M zu verstehen. Schnitte in dieses Tensorbündel nennt man *Tensorfelder vom Typ* (r, s) *auf* M. Ein C^∞-Tensorfeld ist ein C^∞-Schnitt im eigentlichen Sinn der Definition 2.3.8. Die Menge aller glatten Tensorfelder vom Typ (r, s) auf M soll durch $\mathcal{T}^r_s(M)$ gekennzeichnet werden. Nach Satz 2.3.11 ist auch klar, wie glatte Tensorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M bezüglich einer Koordinatenumgebung zu charakterisieren sind.

Falls $t \in \mathcal{T}^r_s(M)$, $\{X_i\}_{i\in\{1,\ldots,s\}} \subseteq \mathfrak{X}(M)$ und $\{\omega^j\}_{j\in\{1,\ldots,r\}} \subseteq \mathfrak{X}^*(M)$, so definiert man die Funktion

$$t(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s)\colon M \to \mathbb{R} \text{ durch } p \mapsto t_p(\omega^1_p, \ldots, \omega^r_p, X_{1,p}, \ldots, X_{s,p}), \tag{7.2}$$

für jedes $p \in M$. Geht man zu einer lokalen Darstellung in einer Karte über, so ist evident, dass $t(\omega^1, \ldots, X_s) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ und $ft \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ für $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Auch die bisherigen Überlegungen betten sich genau in diesen Kontext ein. Differentielle 1-Formen auf einer Mannigfaltigkeit M sind etwa Elemente des Raums $\mathcal{T}^0_1(M)$ und Vektorfelder können mit Elementen des Raums $\mathcal{T}^1_0(M) = \mathfrak{X}(M)$ identifiziert werden. Deswegen schreibt man für $\mathcal{T}^0_1(M)$ auch manchmal $\mathfrak{X}^*(M)$.

7.2 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Das wichtigste Beispiel eines symmetrischen Tensors auf einem Vektorraum, ist dies des inneren Produktes. Jedes innere Produkt ermöglicht es, Längen von Vektoren und Winkel zwischen ihnen zu erklären. Damit ist für die theoretische Physik die Existenz eines inneres Produkt in jedem Tangentialraum T_pM einer Mannigfaltigkeit M für $p \in M$ unerlässlich, um zu gewährleisten, dass man im Stande ist, Euklidische Geometrie durchführen zu können. Schwächt man die Forderung nach der Positivität ein wenig ab, jedoch mit gewissen Konsequenzen verbunden, so gelangt man zu folgender Definition.

Definition 7.2.1 . Sei M eine Mannigfaltigkeit. Eine *Metrik auf* M ist ein kovariantes Tensorfeld $g \in \mathcal{T}^0_2(M)$, so dass für jedes $p \in M$ die Bilinearform

$$g_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R} \tag{7.3}$$

symmetrisch und nicht-degeneriert[1] ist. Falls zudem g_p positiv definit für alle $p \in M$ ist, so nennt man g eine *Riemannsche Metrik* und das Paar (M, g) eine *Riemannsche*

[1] Ein symmetrischer Tensor $g \in T^0_2(V)$ auf einem Vektorraum V heißt *nicht-degeneriert*, falls die lineare Abbildung $\hat{g}\colon V \to V^*$, definiert durch $\hat{g}(v)(w) = g(v, w)$ für $v, w \in V$ ein Isomorphismus ist bzw. äquivalent dazu, falls für jedes von Null verschiedene $v \in V$ ein $w \in V$ existiert, so dass $g(v, w) \neq 0$.

Mannigfaltigkeit. Ansonsten heißt g *pseudo-Riemannsche Metrik* und das Paar (M, g) eine *pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit.*

Der größte Unterschied zwischen Riemannschen und pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeiten besteht darin, dass nach [Lee12, Proposition 13.3] auf jeder C^∞-Mannigfaltigkeit eine Riemannsche Metrik existiert, dies für pseudo-Riemannsche Metriken jedoch nicht der Fall sein muss (siehe [Lee12, Seite 344]). Es wird daher im weiteren Verlauf des Textes die Existenz einer pseudo-Riemannschen Metrik stets angenommen.

Wie am Ende des Abschnitts 1.2 können pseudo-Riemannsche Metriken herangezogen werden, um assoziierte Tensoren bzw. Tensorfelder zu definieren. Man kann zeigen, dass $\hat{g}\colon TM \to T^*M$, definiert durch

$$\hat{g}(v)(w) = g_p(v, w) \text{ für } v, w \in T_pM \text{ und } p \in M, \tag{7.4}$$

die Eigenschaften eines C^∞-*Bündelhomomorphismus* besitzt (siehe [Lee12, Seite 341]). $\hat{g}$ induziert einen Isomorphismus zwischen den Schnitten $\hat{g}\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$, der durch das gleiche Symbol belegt wird. Dies kann auch durch die *musikalischen Isomorphismen* ausgedrückt werden; $^\flat\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ und dessen Inverse $^\sharp\colon \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}(M)$. In dem hier diskutierten Fall sind Mannigfaltigkeiten endlich-dimensional und dies entspricht der Operation des Senkens und Hebens von Indizes.

Satz 7.2.2 . *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und g eine symmetrische, nicht-degenerierte Bilinearform auf V. Dann existiert eine Basis $\{E_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \subseteq V$ von V mit dualer Basis $\{\varepsilon^i\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \subseteq V^*$, so dass*

$$g = \sum_{i=1}^{n} g_{ij}\, \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j, \text{ wobei } [g_{ij}] = [g(E_i, E_j)] = \begin{pmatrix} +\mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

Es gilt, dass $r + s = n$. Äquivalent dazu lässt sich für g schreiben

$$g = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \varepsilon^i \otimes \varepsilon^i, \text{ wobei } c_i = \pm 1. \tag{7.6}$$

Beweis. Gram-Schmidt-Argument siehe [AMR01, Proposition 7.2.9]. □

Die Basis $\{E_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ aus Satz 7.2.2 nennt man eine *g-orthonormale Basis.* Die Differenz $r - s$ heißt *Signatur von g* und $s =: \operatorname{Ind}(g)$ der *Index von g.*

Es soll an den Begriff eines Rahmens über einer offenen Menge $U \subseteq M$ einer Mannigfaltigkeit M (siehe Definition 2.3.10) angeknüpft werden. Solch ein Rahmen über U wird auch *lokaler Rahmen über U* genannt. Es gilt folgender Satz:

Satz 7.2.3 . *Sei (M, g) eine n-dimensionale, (pseudo-)Riemannsche Mannigfaltigkeit mit oder ohne Rand und $\{X_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ ein glatter lokaler Rahmen für M über einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$. Dann existiert ein glatter, g-orthonormaler Rahmen $\{E_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ für M über U, so dass $\operatorname{span}(E_1|_p, \dots, E_i|_p) = \operatorname{span}(X_1|_p, \dots, X_i|_p)$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ und $p \in U$.*

Beweis. Anwenden des Gram-Schmidt-Algorithmus' zeigt die gewünschte Aussage, siehe hierzu auch [Lee12, Lemma 8.13]. Man muss lediglich die Definition des Gram-Schmidt-Algorithmus ein wenig anpassen, da g die Positivität zum Erfüllen eines inneren Produktes fehlt. Das n-Tupel $(E_1, \dots, E_n)$ ist demnach induktiv gegeben durch

$$E_j = \frac{X_j - \sum_{i=1}^{j-1} \epsilon_i \langle X_j, E_i \rangle E_i}{\left| X_j - \sum_{i=1}^{j-1} \epsilon_i \langle X_j, E_i \rangle E_i \right|}, \quad \epsilon_i := \langle E_i, E_i \rangle = \pm 1. \tag{7.7}$$

Wobei man folgende Bezeichnungen festlegt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle := g|_U (\cdot, \cdot) \quad \text{und} \quad |X| := \sqrt{|\langle X, X \rangle|}, \tag{7.8}$$

für beliebiges $X \in \mathfrak{X}(U)$. □

Folgerung 7.2.4 (Existenz lokaler g-orthonormaler Rahmen). *Sei (M, g) eine (pseudo-)Riemannsche Mannigfaltigkeit mit oder ohne Rand. Für jeden Punkt $p \in M$ existiert auf einer Umgebung von p ein glatter, g-orthonormaler Rahmen.*

Sei (M, g) eine n-dimensionale, (pseudo-)Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Orientierung $\mu = \{X_i\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$, so existiert wegen der Folgerung 7.2.4 für jeden Punkt $p \in M$ auf einer Umgebung U ein glatter, g-orthonormaler, lokaler Rahmen $\{E_i\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$ über $U \subseteq M$. Für alle $p \in U$ gilt, dass die Familie $\{ E_i|_p \}_{i \in \{1,\dots,n\}}$ eine Basis für den Tangentialraum T_pM ist und damit auch die Orientierung μ_p in T_pM für jedes $p \in U$ festlegt. Durch Austauschen von E_1 durch $-E_1$ kann erreicht werden, dass T_pM für jedes $p \in U$ (positiv) orientiert ist. Man spricht dann von einem orientierten, lokalen Rahmen $\{E_i\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$ für M. Damit ist die Aussage des folgenden Satzes zunächst wohlformuliert.

Satz 7.2.5 (Riemannsche (pseudo-)Volumenform). *Sei (M, g) eine (pseudo-)Riemannsche Mannigfaltigkeit, der Dimension n, mit oder ohne Rand, $n \geq 1$ und orientiert durch eine Orientierungsform ω. Dann existiert eine eindeutige Orientierungsform $\omega_g \in [\omega] \subseteq \Omega^n(M)$, welche folgender Gleichung genügt*

$$\omega_g(E_1, \dots, E_n) = 1 \tag{7.9}$$

für jeden orientierten, g-orthonormalen lokalen Rahmen $\{E_i\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$ für M.

Beweis. Es soll zunächst angenommen werden, dass ω_g existiert. Sei $\{E_i\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$ ein lokaler Rahmen für M über U. Dann existiert ein glatter Rahmen $\{\varepsilon^i\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$ für M über U, genannt *dualer Korahmen*, mit der Eigenschaft

$$\varepsilon^i|_p(E_j|_p) = \delta^i_j \quad \text{für jedes } p \in U. \tag{7.10}$$

(Beweis dieser Aussage nachzuschlagen in [Lee12, Lemma 11.14].) Mit Hilfe des dualen Korahmens lässt sich ω_g schreiben zu

$$\omega_g = f\, \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n \quad \text{für } f \in C^\infty(M, \mathbb{R}). \tag{7.11}$$

Die Bedingung (7.9) reduziert sich damit auf die Forderung $f = 1$ und somit

$$\omega_g = \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n. \tag{7.12}$$

Dies beweist die Eindeutigkeit.

Zur Eindeutigkeit: ω_g soll durch (7.12) in der Umgebung $U \subseteq M$ eines jedes Punktes $p \in M$ definiert werden. Damit diese Definition wohlformuliert ist, muss die Unabhängigkeit des jeweiligen orientierten, g-orthonormalen Rahmens nachgewiesen werden. Sei dazu $\{\widetilde{E}_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ ein weiterer orientierter, g-orthonormaler lokaler Rahmen mit dualen Korahmen $\{\widetilde{\varepsilon}^i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ und man setze

$$\widetilde{\omega}_g := \widetilde{\varepsilon}^1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{\varepsilon}^n. \tag{7.13}$$

Für eine Matrix $[a_i^j]$ mit C^∞-Einträgen auf $U \subseteq M$ kann man schreiben

$$\widetilde{E}_i = \sum_{j=1}^n a_i^j E_j. \tag{7.14}$$

Da beide Rahmen $\{\widetilde{E}_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ und $\{E_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ g-orthonormal sind, muss $[a_i^j(p)]$ eine orthogonale Matrix für jedes $p \in M$ sein, also $\det[a_i^j] = \pm 1$. Die beiden lokalen Rahmen sind auch gleich orientiert, daher muss $\det[a_i^j] = 1$. Man berechnet nun

$$\omega_g(\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n) = \det[\varepsilon^j(\widetilde{E}_i)] = \det[a_i^j] = 1 = \widetilde{\omega}_g(\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n). \tag{7.15}$$

Damit also $\omega_g = \widetilde{\omega}_g$ und man ist in der Lage eine globale n-Form ω_g in jeder Umgebung eines Punktes p durch (7.12) bezüglich eines beliebigen glatten, g-orthonormalen Rahmens zu definieren. Nach Teilaussage (c) des Satzes 3.3.2 ist ω_g zudem glatt. Der Beweis der Eindeutigkeit zeigt außerdem, dass diese n-Form auf überlappenden Umgebungen, mit jeweiligen Rahmen, gleich ist. Die so definierte n-Form ω_g erfüllt damit (7.9). □

Satz 7.2.6 (Lokale Darstellung der (pseudo-)Riemannschen Volumenform). *Sei (M, g) eine orientierte, n-dimensionale, (pseudo-)Riemannsche Mannigfaltigkeit, mit oder ohne Rand, $n \geq 1$. Sei $U \subseteq M$ eine Umgebung eines Punktes $p \in M$. Des Weiteren möge die Familie $\{e_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}} \subseteq C^\infty(U, \mathbb{R})$ die Eigenschaft besitzen, dass $\{e_i|_p\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ eine orientierte Basis für T_pM für alle $p \in U$ sei. Die Familie $\{\varepsilon^i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ sei der duale Korahmen bezüglich $\{e_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$. Dann besitzt die (pseudo-)Riemannsche Volumenform auf U folgende lokale Darstellung*

$$\omega_g = \sqrt{|\det[g(e_i, e_j)]|}\, \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n. \tag{7.16}$$

Beweis. Mit den Bezeichnungen aus dem Satz gilt, dass ω_g auf U die Orientierung für alle T_pM für $p \in U$ festlegt, d.h.

$$\omega_g(e_1, \ldots, e_n) > 0 \text{ auf } U. \tag{7.17}$$

Nach Voraussetzung kann ω_g auf U lokal ausgedrückt werden als

$$\omega_g = f\,\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n, \text{ mit } f \in C^\infty(U, \mathbb{R}). \tag{7.18}$$

Mittels (7.17) sieht man ein, dass $f > 0$ auf U sein muss. Es muss f bestimmt werden. Sei $\{E_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ ein beliebiger g-orthonormaler, orientierter Rahmen auf einer Umgebung des Punktes $p \in M$ und $\{\tilde{\varepsilon}^i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ bezeichne dessen dualen Korahmen. Auf dem jeweiligen Definitionsbereich gilt nun

$$e_i = \sum_{j=1}^n a_i^j E_j \tag{7.19}$$

mit einer $n \times n$-Matrix $[a_i^j]$. Es gelten folgende Rechenschritte

$$\begin{aligned} f &= \omega_g(e_1, \ldots, e_n) = (\tilde{\varepsilon}^1 \wedge \cdots \wedge \tilde{\varepsilon}^n)(e_1, \ldots, e_n) \\ &= \det\left[\tilde{\varepsilon}^j(e_i)\right] = \det[a_i^j]. \end{aligned} \tag{7.20}$$

Andererseits berechnet man, mit geeigneter Einschränkung von g auf den Definitionsbereich der e_i

$$\begin{aligned} g(e_i, e_j) &= g\left(\sum_{k=1}^n a_i^k E_k, \sum_{l=1}^n a_j^l E_l\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_i^k a_j^l\, g(E_k, E_l) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_i^k a_j^l \left(\sum_{m=1}^n c_m\, \tilde{\varepsilon}^m \otimes \tilde{\varepsilon}^m\right)(E_k, E_l) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n a_i^k a_j^l c_m \delta_m^k \delta_p^l \\ &= \sum_{k=1}^n c_k a_i^k a_j^k. \end{aligned} \tag{7.21}$$

Bildet man auf beiden Seiten die Determinante, erhält man

$$\det[g(e_i, e_j)] = \det[g(E_i, E_j)](\det a)\det(a^T) = \det[g(E_i, E_j)](\det a)^2 \tag{7.22}$$

Nach Satz 7.2.2 gilt $|\det[g(E_i, E_j)]| = 1$ und nimmt man in (7.22) auf beiden Seiten den Betrag, so gilt

$$|\det[g(e_i, e_j)]| = (\det a)^2 \quad \text{bzw.} \quad \det a = \pm\sqrt{|\det[g(e_i, e_j)]|}. \tag{7.23}$$

Da beide Rahmen $\{e_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ und $\{E_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ gleich orientiert sind, muss $\det a > 0$ sein. Damit ist die Aussage bewiesen. □

Folgerung 7.2.7 . *Sei (M, g) eine orientierte, n-dimensionale, (pseudo-)Riemannsche Mannigfaltigkeit, mit oder ohne Rand, $n \geq 1$. Sei $(U, x^1, \ldots, x^n)$ eine Koordinatenumgebung von M. Dann besitzt die (pseudo-)Riemannsche Volumenform auf U folgende lokale Darstellung*

$$\omega_g = \sqrt{|\det[g_{ij}]|}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \text{ mit } g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right). \tag{7.24}$$

Die Folgerung 7.2.7 sagt außerdem aus, dass die (pseudo-)Riemannsche Volumenform invariant unter Kartenwechseln bzw. Koordinatentransformationen ist.

Satz 7.2.8 . *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit Basis $\{e_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ und zugehöriger dualer Basis $\{\varepsilon^i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$. Sei weiter $g \in T_2^0(V)$ eine symmetrische, nicht-degenerierte Bilinearform auf V. Dann ist die Abbildung $g^{(k)} \colon V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ für alle $k \in \{1,\dots,n\}$, definiert durch*

$$g^{(k)}(\alpha,\beta) := \langle\!\langle \alpha,\beta \rangle\!\rangle := \sum_{\{i_1,\dots,i_k\}\in\vec{I}_{k,n}} \alpha_{i_1\cdots i_k}\beta^{i_1\cdots i_k} = \frac{1}{k!}\sum_{i_1,\dots,i_k} \alpha_{i_1\cdots i_k}\beta^{i_1\cdots i_k}, \tag{7.25}$$

wobei

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{\{i_1,\dots,i_k\}\in\vec{I}_{k,n}} \alpha_{i_1\cdots i_k}\, \varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k} \text{ und} \\ \beta &= \sum_{\{i_1,\dots,i_k\}\in\vec{I}_{k,n}} \beta_{i_1\cdots i_k}\, \varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k} \in A_k(V), \end{aligned} \tag{7.26}$$

eine symmetrische, nicht-degenerierte Bilinearform auf dem Dualraum V^*. Dabei bezeichnet $\beta^{i_1\cdots i_k}$ die Komponenten des assoziierten Tensors $\widetilde{\beta} \in T_0^k(V)$ zu $\beta \in T_k^0(V)$, ausgeschrieben also

$$\beta^{i_1\cdots i_k} := \widetilde{\beta}(\varepsilon^{i_1},\dots,\varepsilon^{i_k}) = \beta((\varepsilon^{i_1})^\sharp,\dots,(\varepsilon^{i_k})^\sharp) = \sum_{j_1,j_2,\dots,j_k} g^{i_1j_1}g^{i_2j_2}\cdots g^{i_kj_k}\beta_{j_1\cdots j_k}. \tag{7.27}$$

Des Weiteren ist $[g^{ki}]$ die Inverse zu der Matrix mit den Einträgen $g_{ij} = g(e_i,e_j)$ und $\vec{I}_{k,n}$ ist die Menge aller streng wachsend angeordneten Multiindizes der Länge k

$$\vec{I}_{k,n} := \{\, I = \{i_1,\dots,i_k\} \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n \,\}. \tag{7.28}$$

Beweis. Es soll zunächst eine abkürzende Schreibweise eingeführt werden

$$\alpha = \sum_{\{i_1,\dots,i_k\}\in\vec{I}_{k,n}} \alpha_{i_1\cdots i_k}\, \varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k} =: \sum_{i_1<\cdots<i_k} \alpha_{i_1\cdots i_k}\, \varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k}. \tag{7.29}$$

Es muss die Wohldefiniertheit von $g^{(k)}$ gezeigt werden, das heißt, die Definition von $g^{(k)}$ darf nicht von der Wahl der Basis in V abhängen. Sei $\{\widetilde{e}_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ eine weitere Basis von V, mit zugehöriger dualer Basis $\{\widetilde{\varepsilon}^i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$. Dann kann man schreiben

$$\alpha = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \alpha'_{i_1\cdots i_k}\, \widetilde{\varepsilon}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\varepsilon}^{i_k} \text{ und } \beta = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \beta'_{i_1\cdots i_k}\, \widetilde{\varepsilon}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\varepsilon}^{i_k}. \tag{7.30}$$

Die Basen können ineinander überführt werden, das heißt also, dass man schreiben kann

$$\widetilde{e}_j = \sum_{a=1}^n A_j^a e_a \text{ und } \widetilde{\varepsilon^i} = \sum_{a=1}^n B_a^i \varepsilon^a. \tag{7.31}$$

Da die Dualitätseigenschaft $\widetilde{\varepsilon^i}(\widetilde{e}_j) = \delta_j^i$ verlangt, müssen $[A_j^a]$ und $[B_a^i]$ zueinander invers sein. Man rechnet nun Folgendes aus

$$
\begin{aligned}
\sum_{a_1<\cdots<a_k} \alpha'_{a_1\cdots a_k}\,\beta'^{\,a_1\cdots a_k} &= \sum_{a_1<\cdots<a_k} \alpha(\widetilde{e}_{a_1},\ldots,\widetilde{e}_{a_k})\widetilde{\beta}(\widetilde{\varepsilon}^{a_1},\ldots,\widetilde{\varepsilon}^{a_k}) \\
&= \sum_{a_1<\cdots<a_k} \alpha\left(\sum_{i_1=1}^{n} A^{i_1}_{a_1} e_{i_1},\ldots,\sum_{i_k=1}^{n} A^{i_k}_{a_k} e_{i_k}\right)\widetilde{\beta}\left(\sum_{j_1=1}^{n} B^{a_1}_{j_1}\varepsilon^{j_1},\ldots,\sum_{j_k=1}^{n} B^{a_k}_{j_k}\varepsilon^{j_k}\right) \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{a_1,\ldots,a_k}\sum_{i_1,\ldots,i_k}\sum_{j_1,\ldots,j_k} A^{i_1}_{a_1}A^{i_2}_{a_2}\cdots A^{i_k}_{a_k}B^{a_1}_{j_1}B^{a_2}_{j_2}\cdots B^{a_k}_{j_k}\alpha_{i_1\cdots i_k}\beta^{j_1\cdots j_k} \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{i_1,\ldots,i_k}\sum_{j_1,\ldots,j_k} \alpha_{i_1\cdots i_k}\delta^{i_1}_{j_1}\delta^{i_2}_{j_2}\cdots\delta^{i_k}_{j_k}\beta^{j_1\cdots j_k} = \sum_{i_1<\cdots<i_k}\alpha_{i_1\cdots i_k}\beta^{i_1\cdots i_k}. \qquad (7.32)
\end{aligned}
$$

Dies beweist die Basisunabhängigkeit in der Definition von $g^{(k)}$ und $g^{(k)}$ ist damit wohldefiniert.

Offensichtlich ist $g^{(k)}$ bilinear und zudem symmetrisch, denn es gilt

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i_1<\cdots<i_k}\beta_{i_1\cdots i_k}\alpha^{i_1\cdots i_k} \\
&\quad = \frac{1}{k!}\sum_{i_1,\ldots,i_k}\sum_{j_1,\ldots,j_k}\sum_{l_1,\ldots,l_k} g_{i_1j_1}g_{i_2j_2}\cdots g_{i_kj_k}\beta^{j_1\cdots j_k}g^{i_1l_1}g^{i_2l_2}\cdots g^{i_kl_k}\alpha_{l_1\cdots l_k} \\
&\quad = \frac{1}{k!}\sum_{j_1,\ldots,j_k}\sum_{l_1,\ldots,l_k}\alpha_{l_1\cdots l_k}\delta^{l_1}_{j_1}\delta^{l_2}_{j_2}\cdots\delta^{l_k}_{j_k}\beta^{j_1\cdots j_k} = \sum_{j_1<\cdots<j_k}\alpha_{j_1\cdots j_k}\beta^{j_1\cdots j_k}. \qquad (7.33)
\end{aligned}
$$

Des Weiteren ist $g^{(k)}$ nicht-degeneriert, denn falls $g^{(k)}(\alpha,\beta)=0$ für alle $\beta\in A_k(V)$, dann wähle man $\beta=\varepsilon^{i_1}\wedge\cdots\wedge\varepsilon^{i_k}$ für beliebigen Multiindex $\{i_1,\ldots,i_k\}\in\vec{I}_{k,n}$, was impliziert, dass $\alpha_{i_1\cdots i_k}=0$ für alle $\{i_1,\ldots,i_k\}\in\vec{I}_{k,n}$ und damit $\alpha=0$. Damit ist die Aussage bewiesen. □

Satz 7.2.9 . *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $g\in T^0_2(V)$ eine symmetrische, nicht-degenerierte Bilinearform auf V. Die Familie $\{E_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ sei eine g-orthonormale Basis und $\{\varepsilon^i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ sei die zugehörige duale Basis, so dass gilt*

$$g=\sum_{i=1}^{n} c_i\varepsilon^i\otimes\varepsilon^i,\quad c_i=\pm1. \qquad (7.34)$$

Dann ist die Basis

$$\{\varepsilon^{i_1}\wedge\cdots\wedge\varepsilon^{i_k}\}_{\{i_1,\ldots,i_k\}\in\vec{I}_{k,n}} \qquad (7.35)$$

für $A_k(V)$ orthonormal bezüglich $\langle\!\langle,\rangle\!\rangle=g^{(k)}\colon A_k(V)\times A_k(V)\to\mathbb{R}$ für alle $k\in\mathbb{N}$ und für beliebiges $\{i_1,\ldots,i_k\}\in\vec{I}_{k,n}$ gilt

$$\langle\!\langle\varepsilon^{i_1}\wedge\cdots\wedge\varepsilon^{i_k},\varepsilon^{i_1}\wedge\cdots\wedge\varepsilon^{i_k}\rangle\!\rangle=c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_k}(=\pm1). \qquad (7.36)$$

Beweis. Zunächst eine Vorbetrachtung: Im Lichte des Lemmas 1.5.1 wird nun ein noch allgemeineres Kroneckersymbol δ^I_J für Multiindizes $I\in I_{k,n}$ und $J\in I_{k,n}$ der Länge k definiert. Bedenkt man, dass I und J nicht streng wachsend sein müssen, so definiert man

$$\delta^I_J = \det \begin{pmatrix} \delta^{i_1}_{j_1} & \dots & \delta^{i_1}_{j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{i_k}_{j_1} & \dots & \delta^{i_k}_{j_k} \end{pmatrix}. \tag{7.37}$$

Man rechnet sofort nach, dass folgendes gilt

$$\delta^I_J = \begin{cases} \operatorname{sgn}\sigma & \nexists \text{ sich wiederholender Index in } I \text{ und } J \text{ und } \sigma I = J \text{ für ein } \sigma \in S_k, \\ 0 & \exists \text{ sich wiederholender Index in } I \text{ oder } J \text{ oder } \nexists \sigma \in S_k, \text{ so dass } \sigma I = J. \end{cases} \tag{7.38}$$

Es mögen nun die Voraussetzungen aus dem Satz gelten. Zunächst soll (7.36) nachgerechnet werden. Dazu setze man für $\{l_1, \dots, l_k\}, \{m_1, \dots, m_k\} \in \vec{I}_{k,n}$

$$\alpha := \varepsilon^{l_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{l_k} \text{ und } \beta := \varepsilon^{m_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{m_k}. \tag{7.39}$$

Folgende Rechenschritte gelten für die so gesetzten $\alpha, \beta \in A_k(V)$

$$\begin{aligned} \langle\!\langle \alpha, \beta \rangle\!\rangle &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1 \cdots i_k} \beta^{i_1 \cdots i_k} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} \sum_{j_1, \dots, j_k} \alpha(E_{i_1}, \dots, E_{i_k}) g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \cdots g^{i_k j_k} \beta(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} \sum_{j_1, \dots, j_k} \Big[(\varepsilon^{l_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{l_k})(E_{i_1}, \dots, E_{i_k}) g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \cdots g^{i_k j_k} \\ &\qquad\qquad \times (\varepsilon^{m_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{m_k})(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) \Big] \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} \sum_{j_1, \dots, j_k} \delta^{l_1 l_2 \cdots l_k}_{i_1 i_2 \cdots i_k} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \cdots g^{i_k j_k} \delta^{m_1 m_2 \cdots m_k}_{j_1 j_2 \cdots j_k} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j_1, \dots, j_k} \delta^{l_1 l_2 \cdots l_k}_{i_1 i_2 \cdots i_k} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \cdots g^{i_k j_k} \delta^{m_1 m_2 \cdots m_k}_{j_1 j_2 \cdots j_k} \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k} g^{l_1 j_1} g^{l_2 j_2} \cdots g^{l_k j_k} \delta^{m_1 m_2 \cdots m_k}_{j_1 j_2 \cdots j_k} \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) g^{l_1 m_{\sigma(1)}} g^{l_2 m_{\sigma(2)}} \cdots g^{l_k m_{\sigma(k)}} \\ &= \det \left(g^{l_j m_{j'}} \right)_{j, j' \in \{1, \dots, k\}} = \det \left(g\left((e^{l_j})^\sharp, (e^{m_{j'}})^\sharp \right) \right)_{j, j' \in \{1, \dots, k\}}. \end{aligned} \tag{7.40}$$

Die Bilinearform g ist in der Darstellung bezüglich der g-orthonormalen Basis $\{E_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ eine Diagonalmatrix und damit auch ihre Inverse. Somit erhält man für $\{m_1, \dots, m_k\} = \{l_1, \dots, l_k\}$

$$\langle\!\langle \alpha, \alpha \rangle\!\rangle = \det \left(g^{l_j l_{j'}} \right)_{j, j' \in \{1, \dots, k\}} = \prod_{j=1}^{k} g^{l_j l_j} = c_{j_1} c_{j_2} \cdots c_{j_k} = \pm 1. \tag{7.41}$$

Und entsprechend für den Fall $\{m_1, \dots, m_k\} \neq \{l_1, \dots, l_k\} \in \vec{I}_{k,n}$, d.h. $\{m_1, \dots, m_k\} \cap$

$\{l_1, \ldots, l_k\} = \emptyset$ ergibt sich

$$\langle\!\langle \alpha, \beta \rangle\!\rangle = \det \left(g^{l_j m_{j'}}\right)_{j,j' \in \{1,\ldots,k\}} = 0. \tag{7.42}$$

Damit ist die Aussage des Satzes bewiesen. □

7.3 Hodge-$*$-Operator und Koableitung

Es sei darauf hingewiesen, dass auf einer (pseudo-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) durch $g \in \mathcal{T}_2^0$ für jeden Punkt $p \in M$ nach Satz 7.2.8 ein symmetrischer, nicht-degenerierter, kontravarianter Tensor $g_p^{(k)} = \langle\!\langle , \rangle\!\rangle_p \in T_0^2(T_pM)$ induziert wird. Des Weiteren existiert nach Folgerung 7.2.4 für jeden Punkt $p \in M$ auf einer Umgebung $U \subseteq M$ ein lokaler g-orthonormaler Rahmen $\{\, E_i \}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ für M. Damit existiert aber auch eine g_p-orthonormale Basis $\{\, E_i|_p \}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ von T_pM für jeden Punkt $p \in U$. Damit ist die Aussage des folgenden Satzes zunächst wohldefiniert.

Satz 7.3.1 (Hodge-$*$-Operator auf dem Tangentialraum). *Sei (M, g) eine orientierte, (pseudo-)Riemannsche n-dimensionale Mannigfaltigkeit, mit (pseudo-)Riemannscher Volumenform $\omega_g \in \Omega^n(M)$ und $p \in M$. Dann existiert ein eindeutiger Isomorphismus $* \colon A_k(T_pM) \to A_{n-k}(T_pM)$, der folgender Gleichung genügt*

$$\alpha \wedge *\beta = \langle\!\langle \alpha, \beta \rangle\!\rangle_p (\omega_g)_p \quad \textit{für } \alpha, \beta \in A_k(T_pM). \tag{7.43}$$

Sei $\{E_i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ eine orientierte, g_p-orthonormale Basis von T_pM, mit zugehöriger dualer Basis $\{\varepsilon^i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$, so dass gilt

$$g_p = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \varepsilon^i \otimes \varepsilon^i, \quad c_i = \pm 1. \tag{7.44}$$

Dann folgt für alle $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(1) < \cdots < \sigma(k)$ und $\sigma(k+1) < \cdots < \sigma(n)$, dass

$$*\, (\varepsilon^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(k)}) = c_{\sigma(1)} \cdots c_{\sigma(k)} \operatorname{sgn}(\sigma)\, (\varepsilon^{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(n)}). \tag{7.45}$$

Beweis. Es mögen die Voraussetzungen aus dem Satz gelten. Es wird festgehalten, dass nach Satz 7.2.6 die Volumenform ω_g im Punkt $p \in M$ folgende lokale Darstellung besitzt

$$\begin{aligned} \omega_g &= \sqrt{|\det[g_p(E_i, E_j)]|}\, \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n \\ &= \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n. \end{aligned} \tag{7.46}$$

Der letzte Schritt in (7.46) gilt, da $\{E_i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ bezüglich g_p orthonormal ist. Es wird nun die Eindeutigkeit bewiesen.

Es wird angenommen, dass $*$ (7.43) erfüllt. Sei $\sigma \in S_n$ eine $(k, n-k)$-Verschiebung, $\beta = \varepsilon^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(k)}$ und α ein $g_p^{(k)}$-orthonormaler Basisvektor von $A_k(T_pM)$, also

$$\alpha := \varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k} \text{ mit } \{i_1, \ldots, i_k\} \in \vec{I}_{k,n}. \tag{7.47}$$

Es gilt, dass $\alpha\wedge*\beta \neq 0$ genau dann, wenn $\langle\!\langle \alpha, \beta\rangle\!\rangle_p \neq 0$ und dies impliziert $\{i_1, \dots, i_k\} = \{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$. Da per Annahme $*$ (7.43) erfüllt, folgt somit

$$* \, \beta = a \, \varepsilon^{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(n)} \tag{7.48}$$

für eine Konstante $a \in \mathbb{R}$. Es wird nun die Konstante a berechnet. Einerseits gilt

$$\beta \wedge *\beta = a\,(\varepsilon^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(k)}) \wedge (\varepsilon^{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(n)}) = a \operatorname{sgn}(\sigma)(\omega_g)_p \tag{7.49}$$

und andererseits mittels (7.36)

$$\langle\!\langle \beta, \beta\rangle\!\rangle_p = c_{\sigma(1)} c_{\sigma(2)} \cdots c_{\sigma(k)}. \tag{7.50}$$

Daraus ergibt sich $a = c_{\sigma(1)} c_{\sigma(2)} \cdots c_{\sigma(k)} \operatorname{sgn}(\sigma)$ und somit muss die Abbildung $*$ (7.45) genügen. Damit ist die Abbildung $*$ als lineare Abbildung zwischen Vektorräumen eindeutig festgelegt.

Nun zur Existenz; Die Abbildung $*$ soll durch (7.45) definiert werden. Es muss gezeigt werden, dass der so definierte Hodge-$*$-Operator (7.43) erfüllt. Aus Satz 7.2.9 ist bekannt, dass für alle $(k, n-k)$-Verschiebungen $\varepsilon^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(k)}$ eine $g^{(k)}$-orthonormale Basis für $A_k(T_pM)$ darstellt. Somit ist $*$ als lineare Abbildung zwischen $A_k(T_pM)$ und $A_{n-k}(T_pM)$ zunächst wohldefiniert. Es genügt (7.43) für Basisvektoren nachzurechnen. Man rechnet für $\beta = \varepsilon^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(k)}$ aus

$$\begin{aligned}\beta \wedge *\beta &= c_{\sigma(1)} \cdots c_{\sigma(k)} \operatorname{sgn}(\sigma)\,(\varepsilon^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(k)} \wedge \varepsilon^{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(n)}) \\ &= c_{\sigma(1)} \cdots c_{\sigma(k)}\, \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n = c_{\sigma(1)} \cdots c_{\sigma(k)}\,(\omega_g)_p \\ &= \langle\!\langle \beta, \beta\rangle\!\rangle_p (\omega_g)_p.\end{aligned} \tag{7.51}$$

Falls wie oben α ein $g^{(k)}$-orthonormaler Basisvektor $\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k}$ von $A_k(T_pM)$ ist, mit $\{i_1, \dots, i_k\} \in \vec{I}_{k,n}$, jedoch $\{i_1, \dots, i_k\} \neq \{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$, das heißt $\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{\sigma(k+1), \dots, \sigma(n)\} \neq \emptyset$, dann gilt folgende Rechnung

$$\begin{aligned}\alpha \wedge *\beta &= c_{\sigma(1)} \cdots c_{\sigma(k)} \operatorname{sgn}(\sigma)(\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k} \wedge \varepsilon^{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(n)}) \\ &= 0 = \langle\!\langle \alpha, \beta\rangle\!\rangle_p = \langle\!\langle \alpha, \beta\rangle\!\rangle_p (\omega_g)_p.\end{aligned} \tag{7.52}$$

Damit ist die Aussage bewiesen. □

Satz 7.3.2 . *Sei (M, g) eine orientierte, (pseudo-)Riemannsche, n-dimensionale Mannigfaltigkeit, mit (pseudo-)Riemannscher Volumenform $\omega_g \in \Omega^n(M)$ und $p \in M$. Die Bilinearform g_p habe die Signatur $r - s$. Der Hodge-$*$-Operator erfüllt für $\alpha, \beta \in A_k(T_pM)$ folgende Eigenschaften*

(1) $\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha = \langle\!\langle \alpha, \beta\rangle\!\rangle_p (\omega_g)_p$,

(2) $*1 = (\omega_g)_p, *(\omega_g)_p = (-1)^{\mathrm{Ind}(g)}$,

(3) $*\,*\,\alpha = (-1)^{\mathrm{Ind}(g)}(-1)^{k(n-k)}\alpha$,

(4) $\langle\!\langle \alpha, \beta\rangle\!\rangle_p = (-1)^{\mathrm{Ind}(g)} \langle\!\langle *\alpha, *\beta\rangle\!\rangle_p$.

Beweis. Sei $\{E_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ eine orientierte, g_p-orthonormale Basis von T_pM, mit zugehöriger dualer Basis $\{\varepsilon^i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$, so dass gilt

$$g_p = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \varepsilon^i \otimes \varepsilon^i, \quad c_i = \pm 1. \tag{7.53}$$

(1) folgt direkt aus (7.43) mittels der Symmetrie der Bilinearform $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle_p$. Für (2) rechnet man mittels (7.45) für $\sigma = \mathbb{1}$ und $k = 0$ nach

$$* \, 1 = \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n = (\omega_g)_p. \tag{7.54}$$

Und wieder mit (7.45) für $\sigma = \mathbb{1}$ und $k = n$ erhält man

$$* \, (\omega_g)_p = *(\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n) = c_{\sigma(1)} \cdots c_{\sigma(n)} = (-1)^{\operatorname{Ind}(g)}. \tag{7.55}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit reicht es aus (3) für Basisvektoren $\alpha = \varepsilon^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(k)}$ mit $\sigma \in S(k, n-k)$ zu zeigen Aus (7.45) folgt

$$* \, (\varepsilon^{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(n)}) = b\, \varepsilon^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(k)} \tag{7.56}$$

für eine Konstante $b \in \mathbb{R}$. Es soll b berechnet werden. Sei $\alpha = \beta = \varepsilon^{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(n)}$, dann gilt einerseits

$$\begin{aligned} \alpha \wedge *\beta &= b\, \varepsilon^{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(n)} \wedge \varepsilon^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(k)} \\ &= b(-1)^{k(n-k)}\, \varepsilon^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(n)} \\ &= b(-1)^{k(n-k)} \operatorname{sgn}(\sigma)(\omega_g)_p \end{aligned} \tag{7.57}$$

und andererseits mittels (7.43)

$$\alpha \wedge *\beta = \langle\!\langle \alpha, \beta \rangle\!\rangle_p (\omega_g)_p = c_{\sigma(k+1)} \cdots c_{\sigma(n)} (\omega_g)_p. \tag{7.58}$$

Damit folgt, dass $b = c_{\sigma(k+1)} \cdots c_{\sigma(n)} (-1)^{k(n-k)} \operatorname{sgn}(\sigma)$. Gemäß (7.45) rechnet man nun nach

$$\begin{aligned} * * (\varepsilon^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(k)}) &= c_{\sigma(1)} \cdots c_{\sigma(k)} (\operatorname{sgn}(\sigma)) * (\varepsilon^{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(n)}) \\ &= c_{\sigma(1)} \cdots c_{\sigma(k)} c_{\sigma(k+1)} \cdots c_{\sigma(n)} (\operatorname{sgn}(\sigma))^2 \\ &\quad \times (-1)^{k(n-k)}\, \varepsilon^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(k)} \\ &= (-1)^{\operatorname{Ind}(g)} (-1)^{k(n-k)}\, \varepsilon^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(k)}. \end{aligned} \tag{7.59}$$

Um (4) nachzuweisen, sind folgende Rechenschritte zielführend

$$\begin{aligned} \langle\!\langle *\alpha, *\beta \rangle\!\rangle_p (\omega_g)_p &= * \wedge * * \beta && \text{(wegen (7.43))} \\ &= (-1)^{\operatorname{Ind}(g)} (-1)^{k(n-k)} * \alpha \wedge \beta && \text{(wegen (3))} \\ &= (-1)^{\operatorname{Ind}(g)} \beta \wedge *\alpha && \text{(Satz 1.4.5 (2))} \end{aligned}$$

$$= (-1)^{\mathrm{Ind}(g)} \langle\langle *\alpha, *\beta \rangle\rangle_p (\omega_g)_p \qquad \text{(wegen (1))}. \tag{7.60}$$

Damit ist die Aussage bewiesen. □

Nachdem nun die wichtigsten Eigenschaften des Hodge-$*$-Operators im Tangentialraum wirkend zusammengetragen worden, so ist es nun natürlich diesen auf einer Mannigfaltigkeit operierend zu erklären. Anhand (7.40), bei Übergang zu einer lokalen Darstellung, kann man schlussfolgern, dass eine C^∞-bilineare Abbildung

$$\langle\langle , \rangle\rangle = g^{(k)} \colon \Omega^k(M) \times \Omega^k(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R}), \tag{7.61}$$

existiert, mit $\langle\langle \alpha, \beta \rangle\rangle := \langle\langle \alpha_p, \beta_p \rangle\rangle_p = g_p(\alpha_p, \beta_p)$. Im weiteren Verlauf des Textes wird für $\langle\langle , \rangle\rangle$ nicht mehr unterschieden, ob es nun ein symmetrischer, kontravarianter Tensor auf einem Vektorraum oder die in (7.61) definierte Abbildung darstellt. Die jeweilige Spezifizierung sollte aus dem Kontext heraus ersichtlich sein.

Satz 7.3.3 (Hodge-$*$-Operator auf einer Mannigfaltigkeit). *Sei (M, g) eine orientierte, (pseudo-)Riemannsche, n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit (pseudo-) Riemannscher Volumenform $\omega_g \in \Omega^n(M)$. g sei von Signatur $r - s$, das heißt g_p hat Signatur $r - s$ für alle $p \in M$. Dann existiert für alle $p \in M$ ein eindeutiger Isomorphismus $* \colon \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$, der punktweise definiert ist durch*

$$(*\omega) = (*_p)(\omega_p) \quad \textit{für } \omega \in \Omega^k(M), \tag{7.62}$$

mit der Existenz von $*_p \colon A_k(T_pM) \to A_{n-k}(T_pM)$, garantiert durch Satz 7.3.1. Der so definierte Operator $*$ erfüllt für jeden Punkt $p \in M$ die Aussagen aus den Sätzen 7.3.1 und 7.3.2.

Beweis. Es muss lediglich überprüft werden, ob für jedes $\omega \in \Omega^k(M)$ tatsächlich gilt $*\omega \in \Omega^{n-k}(M)$, das heißt, ob $*\omega$ ebenfalls C^∞ ist. Dies wird auf einer Karte $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ überprüft. Der orientierte lokale Rahmen $\{dx_i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ für M über U wird gemäß Satz 7.2.3 in einen g-orthonormalen Rahmen $\{E_i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ überführt. Bezüglich dieses g-orthonormalen Rahmens kann ω lokal dargestellt werden und die Wirkung von $*$ auf $\{E_i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ ist nach Satz 7.3.1 gegeben, unter Anwendung der Linearität von $*$. Damit ist ersichtlich, dass $*\omega \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. □

Aus Satz 7.3.2 (3) kann man für $*^{-1}$ ablesen, dass $*^{-1} = (-1)^{\mathrm{Ind}(g)}(-1)^{k(n-k)}*$. Damit lässt sich folgende lineare Abbildung definieren.

Definition 7.3.4 . Sei (M, g) eine orientierte, (pseudo-)Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Für jedes k mit $0 \leq k \leq n = \dim M$, wird die *Koableitung* $\delta \colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ definiert durch

$$\delta := (-1)^{\mathrm{Ind}(g)+k} *^{-1} d * = (-1)^{\mathrm{Ind}(g)}(-1)^{n(k+1)+1} * d* \tag{7.63}$$

und $\delta = 0$ auf $\Omega^0(M)$.

Die so definierte Koableitung δ genügt folgendem, kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Omega^k(M) \arrow[r, "*"] \arrow[d, "\delta"'] & \Omega^{n-k}(M) \arrow[d, "d"] \\ \Omega^{k-1}(M) \arrow[r, "(-1)^{\mathrm{Ind}(g)+k}*"'] & \Omega^{n-k+1}(M) \end{tikzcd} \tag{7.64}$$

Man stellt sofort fest, dass $\delta^2 = 0$, denn $d^2 = 0$ und $**$ ist ein Vielfaches der identischen Abbildung. Die Faktoren in (-1) sind so gewählt, dass δ die Aussage des folgenden Satzes erfüllt.

Satz 7.3.5 . *Sei (M, g) orientierte, (pseudo-)Riemannsche Mannigfaltigkeit mit oder ohne Rand, der Dimension n und (pseudo-)Riemannscher Volumenform ω_g. Die Metrik g habe für alle Punkte $p \in M$ den Index $\mathrm{Ind}(g) \in \mathbb{N}$, dann sind d und δ adjungiert zueinander, in folgendem Sinne*

$$\int_M \langle\langle d\alpha, \beta\rangle\rangle \omega_g = \int_M d\alpha \wedge *\beta \overset{(*)}{=} \int_M \alpha \wedge *\delta\beta = \int_M \langle\langle d\alpha, \delta\beta\rangle\rangle \omega_g, \tag{7.65}$$

für $\alpha \in \Omega^k_{\mathrm{c}}(M)$ und $\beta \in \Omega^{k+1}_{\mathrm{c}}(M)$ mit kompakten Träger in M°.

Beweis. Es muss lediglich $(*)$ gezeigt werden, die anderen beiden Gleichungen ergeben sich aus der Definition des Hodge-$*$-Operators. Es gilt

$$\delta\beta = (-1)^{nk+1+\mathrm{Ind}(g)} * d * \beta, \tag{7.66}$$

so dass

$$\begin{aligned} d\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge *\delta\beta &= d\alpha \wedge *\beta + (-1)^{nk+\mathrm{Ind}(g)} \alpha \wedge * * d * \beta \\ &= d\alpha \wedge *\beta + (-1)^k \alpha \wedge d * \beta \\ &= d(\alpha \wedge *\beta), \end{aligned} \tag{7.67}$$

wobei verwendet wurde, dass k^2+k für jede Zahl $k \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl ist. Anwenden des Satzes von Stokes ergibt die gewünschte Aussage. □

Die Wirkung von δ auf einen lokalen Rahmen $\{\varepsilon^i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ sind sehr umständlich zu berechnen, ob nun g-orthonormal oder nicht. Es soll hier nur ein Spezialfall diskutiert werden, ein geschlossener Formelausdruck für die Komponenten von δ in einer beliebigen Basis kann [AMR01, Seite 441 – 442] entnommen werden.

Lemma 7.3.6 . *Sei (M, g) eine orientierte, (pseudo-)Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n und $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ eine Karte auf M. Der glatte, lokale Rahmen $\{\partial/\partial x^i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ für M über U soll g-orthonormal sein und $\{dx^i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ sei der übliche duale Korahmen, so dass gilt*

$$g = \sum_{i=1}^n c_i\, dx^i \otimes dx^i, \quad \text{wobei } c_i = \pm 1. \tag{7.68}$$

Die Metrik g habe für alle Punkte $p \in U$ die Signatur $r - s$. Dann gilt auf U für beliebige $\{i_1, \dots, i_k\} \in \vec{I}_{k,n}$

$$\delta(f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = \sum_{r=1}^{k} c_{i_r} (-1)^r \frac{\partial f}{\partial x^{i_r}} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_r}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \tag{7.69}$$

Beweis. Man setze $i_r \in \{i_1, \dots, i_k\}$ und $\{i_1, \dots, i_k\} \in \vec{I}_{k,n}$. Es soll zunächst $dx^{i_r} \wedge *(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})$ berechnet werden. Dazu beachte man

$$\begin{aligned} dx^{i_r} \wedge *(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = c_{i_1} \cdots c_{i_r} \cdots c_{j_k} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots n \\ i_1 \dots i_r \dots i_k i_{k+1} \dots i_n \end{pmatrix} \\ \times dx^{i_r} \wedge dx^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n}, \end{aligned} \tag{7.70}$$

wobei $\{i_{k+1}, \dots, i_n\} \in \vec{I}_{n-k,n}$. Nun soll $*(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_r}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})$ berechnet werden, man beachte hierzu

$$\begin{aligned} *(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_r}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) &= c_{i_1} \cdots \widehat{c_{i_r}} \cdots c_{j_k} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots n \\ i_1 \dots \hat{i_r} \dots i_k i_{k+1} \dots i_r \dots i_n \end{pmatrix} \\ &\quad \times dx^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n} \\ &= c_{i_1} \cdots \widehat{c_{i_r}} \cdots c_{j_k} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots n \\ i_1 \dots \hat{i_r} \dots i_k i_r i_{k+1} \dots i_n \end{pmatrix} \\ &\quad \times dx^{i_r} \wedge dx^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n} \\ &= c_{i_1} \cdots \widehat{c_{i_r}} \cdots c_{j_k} (-1)^{k-r} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots n \\ i_1 \dots i_r \dots i_k i_{k+1} \dots i_n \end{pmatrix} \\ &\quad \times dx^{i_r} \wedge dx^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n}. \end{aligned} \tag{7.71}$$

Kombiniert man die Aussagen aus (7.70) und (7.71), so kann man schreiben

$$dx^i \wedge *(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = \sum_{r=1}^{k} c_{i_r} (-1)^{k-r} \delta^i_{i_r} * (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_r}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}). \tag{7.72}$$

Mit den getroffenen Annahmen sei vermerkt, dass $g^{ii} = c_i$ konstant auf U ist und somit das Differential d angewendet auf die $C^\infty(U, \mathbb{R})$-Funktion g^{ij} keinen Beitrag liefert. Man rechnet nun weiter

$$\begin{aligned} * d * (f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) &= * d \left(f * (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \right) \\ &= * \left(df \wedge *(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \right) \\ &\quad + * \left(f \wedge d(*(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})) \right) \\ &= * \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge *(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= * \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{k} \Big[c_{i_r} (-1)^{k-r} \frac{\partial f}{\partial x^j} \delta_{i_r}^j \\
&\qquad \times \Big(*(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_r}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \Big) \Big] \\
&= * \sum_{r=1}^{k} c_{i_r} (-1)^{k-r} \frac{\partial f}{\partial x^{i_r}} * (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_r}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \\
&= \sum_{r=1}^{k} c_{i_r} (-1)^{k-r} \frac{\partial f}{\partial x^{i_r}} * *(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_r}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \\
&= (-1)^{\mathrm{Ind}(g)} (-1)^{(k-1)(n-(k-1))} (-1)^k \qquad (7.73) \\
&\quad \times \sum_{r=1}^{k} c_{i_r} (-1)^{r} \frac{\partial f}{\partial x^{i_r}} * *(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_r}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}).
\end{aligned}
$$

Nun kann die Koableitung δ auf die k-Form $f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ angewendet werden

$$
\begin{aligned}
\delta f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} &= (-1)^{\mathrm{Ind}(g)} (-1)^{n(k+1)+1} * \, d * (f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \\
&= \sum_{r=1}^{k} c_{i_r} (-1)^{r} \frac{\partial f}{\partial x^{i_r}} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_r}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \qquad (7.74)
\end{aligned}
$$

wobei verwendet wurde, dass $n(k+1)+1+(k-1)(n-(k-1))+k = 2kn+2k-k^2+k = k^2 \mod 2 + k$ und k^2+k für jede Zahl $k \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl ist. Damit ist die Aussage bewiesen. □

8 Anwendung in der Elektrodynamik

Die Inhalte in diesem Kapitel orientieren sich in ihrer Darstellung gänzlich an [AMR01, Abschnitt 8.3] und [AMR01, Abschnitt 9.3].

8.1 Klassische Integralsätze

Satz 8.1.1 (Greenscher Integralsatz). *Sei D eine abgeschlossene, beschränkte, zusammenhängende Menge in $\mathbb{R}^2$ und ∂D der Rand von D. Es seien $P\colon D \to \mathbb{R}$ und $Q\colon D \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen auf D, dann gilt*

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \tag{8.1}$$

Beweis. Man setze für die 1-Form $\omega := Pdx + Qdy$. Dann gilt

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{\partial D} Pdx + Qdy \tag{8.2}$$

und

$$\begin{aligned}\int_D d\omega &= \int_D \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \\ &= \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Aus dem Satz von Stokes folgt die Aussage. □

Wie immer in dieser Arbeit, wird unter einer Mannigfaltigkeit, stets eine C^∞-Mannigfaltigkeit verstanden. Betrachtet man eine *eingebettete Untermannigfaltigkeit einer Mannigfaltigkeit M*, so ist diese selbst wieder eine Mannigfaltigkeit, versehen mit der Teilraumtopologie. Falls $\dim M = n$, so nennt man eine eingebettete Untermannigfaltigkeit $S \subseteq M$ mit $\dim = n - 1$ eine *eingebettete Hyperfläche*. Der Begriff von eingebetteten Mannigfaltigkeiten kann auf den von *immersierten Untermannigfaltigkeiten* verallgemeinert werden. In Satz 5.5.3 konnte eine induzierte Orientierung des Randes ∂M bestimmt werden, falls M orientiert ist. Mit immersierten Hyperflächen gelingt das ganz ähnlich (siehe hierzu [Lee12, Proposition 15.21]). Es soll diese Situation im $\mathbb{R}^3$ angedeutet werden. Man spricht im Folgenden einfach nur noch von Hyperflächen, statt von immersierten Hyperflächen.

Sei S eine orientierte Hyperfläche des $\mathbb{R}^3$. Erfüllt ein Vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ die Eigenschaften, orthogonal zu T_pS sein und ist $\{\mathbf{n}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ eine positiv-orientierte Basis des $\mathbb{R}^3$, falls $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ eine positiv-orientierte Basis des T_pS ist, so nennt man $\mathbf{n}$ den *nach außen zeigenden Einheitsnormalenvektor im Punkt p*. Es ist bekannt, dass $\mu = dx \wedge dy \wedge dz \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ die Orientierungsform für die positive Orientierung des $\mathbb{R}^3$ ist. Dies induziert eine Orientierungsform $\nu \in \Omega^2(S)$ für S, die punktweise für alle $p \in S$ gegeben ist durch

$$(\nu)_p(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}) = (\mu)_p(\mathbf{n}, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}), \tag{8.4}$$

wobei $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in T_pS$. ν ist eine nirgends verschwindende 2-Form, da μ nirgends verschwindend ist und somit ist ν eine Orientierungsform für S und zudem positiv, da μ positiv ist.

Es soll nun versucht werden, das Integral von glatten 2-Formen über S in eine übliche Notation der Analysis zu überführen. Sei hierzu $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy \in \Omega^3(\mathbb{R})$. Man setze $\mathbf{X} = P\partial/\partial x + Q\partial/\partial y + R\partial/\partial z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ und erhält

$$\begin{aligned} *\mathbf{X}^\flat &= *(Pdx + Qdy + Rdz) = Pdy \wedge dz + Q(-1)dx \wedge dz + Rdx \wedge dy \\ &= \omega. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Hierbei sind $*$ und $^\flat$ mit der euklidischen Metrik des $\mathbb{R}^3$ assoziiert. Aus der definierenden Eigenschaft des Hodge-$*$-Operators mit $\alpha \wedge *\beta = \langle\!\langle \alpha, \beta \rangle\!\rangle \mu$ folgt für $\alpha = \mathbf{n}^\flat \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ und $\beta = \mathbf{X}^\flat \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, dass

$$\mathbf{n}^\flat \wedge *\mathbf{X}^\flat = g((\mathbf{n}^\flat)^\sharp, (\mathbf{X}^\flat)^\sharp)\mu = g(\mathbf{n}, \mathbf{X})\mu = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{X})\mu. \tag{8.6}$$

Wendet man beide Seiten der Gleichung auf $(\mathbf{n}, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$ an und nutzt (8.4), so erhält man

$$\mathbf{n}^\flat \wedge *\mathbf{X}^\flat(\mathbf{n}, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{X})\nu(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}), \tag{8.7}$$

wobei die Abhängigkeit in p unterdrückt wird. Da $\mathbf{n}^\flat(\mathbf{n}) = 1$ und $\mathbf{n}^\flat(\mathbf{v}_i) = 0$ für $i = 1, 2$ ist

$$\mathbf{n}^\flat \wedge *\mathbf{X}^\flat(\mathbf{n}, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}) = *\mathbf{X}^\flat(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}), \tag{8.8}$$

also

$$* \, \mathbf{X}^\flat = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{X})\nu. \tag{8.9}$$

Somit gilt

$$\int_S \omega = \int_S *\mathbf{X}^\flat = \int_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{X})\nu = \int_S (\mathbf{X} \cdot \mathbf{n})\, dS = \int_S (\mathbf{X} \cdot d\mathbf{S}), \tag{8.10}$$

mit dem Flächenelement dS der Hyperfläche S.

Satz 8.1.2 (Klassischer Satz von Stokes). *Sei S eine orientierte, kompakte Hyperfläche des $\mathbb{R}^3$ und $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(S \cup \partial S)$, dann gilt*

$$\int_S (\operatorname{rot} \mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\partial S} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s}, \tag{8.11}$$

wobei ∂S eine Kurve des $\mathbb{R}^3$ ist, parametrisiert durch $\mathbf{s} = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$.

Beweis. Mittels der Aussage [Lee12, Proposition 2.25] kann $\mathbf{X}$ durch eine „glatte Sprungfunktion" auf ganz $\mathbb{R}^3$ fortgesetzt werden. Das so fortgesetzte $\mathbf{X}$ besitzt weiterhin einen kompakten Träger und stimmt mit dem ursprünglichen Vektorfeld auf $S \cup \partial S$ überein. Per Definition gilt $\int_{\partial S} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial S} \mathbf{X}^\flat$, wobei $^\flat$ mit der euklidischen Metrik des $\mathbb{R}^3$ assoziiert ist. Sei $\mathbf{X} = X_1(x,y,z)\partial/\partial x + X_2(x,y,z)\partial/\partial y + X_3(x,y,z)\partial/\partial z$. Direktes Ausrechnen ergibt

$$\begin{aligned} d\mathbf{X}^\flat = &\left(\frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y}\right) dx \wedge dy - \left(\frac{\partial X_1}{\partial z} - \frac{\partial X_3}{\partial x}\right) dx \wedge dz \\ &+ \left(\frac{\partial X_3}{\partial y} - \frac{\partial X_2}{\partial z}\right) dy \wedge dz. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Daraus folgt $d\mathbf{X}^\flat = *(\operatorname{rot}\mathbf{X})^\flat$. Mit Hilfe des Satzes von Stokes und (8.10) schlussfolgert man

$$\int_{\partial S} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} = \int_S d\mathbf{X}^\flat = \int_S *(\operatorname{rot}\mathbf{X})^\flat = \int_S (\operatorname{rot}\mathbf{X} \cdot \mathbf{n})\, dS. \tag{8.13}$$

Dies beweist die Aussage. □

Satz 8.1.3 (Klassischer Satz von Gauß). *Sei Ω eine kompakte Menge des $\mathbb{R}^3$, mit Rand $\partial\Omega =: S$ als C^∞. Falls $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\Omega \cup S)$, dann gilt*

$$\int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{X})\, dV = \int_S (\mathbf{X} \cdot \mathbf{n})\, dS, \tag{8.14}$$

wobei dS das gewöhnliche Volumenelement im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Beweis. Nach (8.10) gilt

$$\int_S (\mathbf{X} \cdot \mathbf{n})\, dS = \int_S *\mathbf{X}^\flat. \tag{8.15}$$

Aus dem Satz von Stokes folgt

$$\int_S *\mathbf{X}^\flat = \int_\Omega d * \mathbf{X}^\flat = \int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{X})\, dV, \tag{8.16}$$

da $d * \mathbf{X}^\flat = (\operatorname{div}\mathbf{X}) dx \wedge dy \wedge dz$, was aus (8.5) folgt. □

Der klassische Satz von Gauß kann für beliebige orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten (M, g) mit Rand verallgemeinert werden (siehe etwa [Lee09, Proposition 9.39]). Dazu ist eine verallgemeinerte Definition von div nötig. Es stellt sich heraus, dass $\operatorname{div} X = (-1)^{\operatorname{Ind}(g)} * d * X$ für $X \in \mathfrak{X}(M)$ (siehe etwa [Lee09, Proposition 9.31]).

8.2 Gesetze von Maxwell

Der klassischen Elektrodynamik sind die Maxwellschen Feldgleichungen zugrunde gelegt. Die Gestalt der Gleichungen hängt natürlich von der Wahl der jeweiligen physikalischen Einheiten ab. Je nachdem welches Einheitensystem benutzt wird, treten Faktoren in 4π, $c =$ der Lichtgeschwindigkeit, ϵ_0 der elektrischen Konstante oder μ_0 der magnetischen Permabilität auf. Die Darstellung dieses Sachverhaltes wird sich damit begnügen, dass ϵ_0 und μ_0 Konstanten sind. Die Wahl des Einheitensystems fällt so aus, dass die Feldgleichungen eine recht einfache Form annehmen, so dass $c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$ sind und Faktoren in 4π nicht auftreten. Es werden nicht die Maxwell Gleichungen im Material diskutiert, wo man eine Unterscheidung zwischen den Feldern $\mathbf{E}$ und $\mathbf{D}$ sowie zwischen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{H}$ vornehmen muss.

Seien $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t), \mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$ und $\mathbf{J} = \mathbf{J}(t)$ zeitabhängige C^∞-Vektorfelder auf dem $\mathbb{R}^3$ und $\rho\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Skalar. Dazu sei angemerkt, dass man sich die Felder eher als eine 1-parametrige Familie $\{\mathbf{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ von Vektorfeldern $\mathbf{X}_t \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ vorstellen kann, die glatt von t abhängen (siehe hierzu [Tu10, Abschnitt 20.1]). Die Vektorfelder $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ erfüllen genau dann die *Maxwellschen Gleichungen* mit *Ladungsdichte* ρ und *Stromdichte* $\mathbf{J}$, wenn sie den folgenden Gleichungen genügen

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho \quad (\textit{Gesetz von Gauß}), \tag{8.17a}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\textit{keine magnetischen Quellen}), \tag{8.17b}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (\textit{Induktionsgesetz von Faraday}), \tag{8.17c}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (\textit{Gesetz von Ampère}). \tag{8.17d}$$

Man nennt dann $\mathbf{E}$ das *elektrische Feld* und $\mathbf{B}$ das *magnetische Feld*. Die Rotation, etwa $\operatorname{rot} \mathbf{E}$, ist so zu verstehen, dass sie bei festgehaltener Zeit berechnet wird und $\partial \mathbf{B}/\partial t$, so dass x, y und z konstant gehalten werden. Gleiches gilt für die Definition der Divergenz div.

Die Größe $\int_\Omega \rho \, dV = Q$ wird als *Ladung* der Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ bezeichnet. Nach dem klassischen Integralsatz von Gauß ist (8.17a) äquivalent zu

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_\Omega \rho \, dV = Q, \tag{8.18}$$

für jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, die die notwendigen Voraussetzungen des Integralsatzes erfüllt. Man kann geneigt sein, der integralen Darstellung eine Interpretation zu verleihen. Sie könnte etwa darin bestehen zu sagen, dass der der elektrische Fluss durch eine geschlossene Fläche der Ladung im inneren der Fläche entspricht. Mit der gleichen Begründung gelangt man zu der integralen Darstellung von (8.17b)

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0. \tag{8.19}$$

Man schlussfolgert, dass der magnetische Fluss aus einer geschlossenen Fläche heraus stets Null ist. Anders ausgedrückt; im Inneren einer beliebigen geschlossenen Fläche können keine magnetischen Quellen existieren.

Nach dem klassischen Integralsatz von Stokes ist (8.17c) äquivalent zu

$$\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n}\, dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS. \tag{8.20}$$

Dies gilt für jede geschlossene Kurve ∂S, die eine Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ berandet. Die Größe $\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ heißt *Spannung* entlang ∂S. Das Gesetz von Faraday besagt demnach, dass die Spannung entlang einer geschlossenen Kurve gleich der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch die Kurve ist.

Auch für (8.17d) existiert eine Interpretation mittels des klassischen Integralsatzes von Stokes

$$\int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS + \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS. \tag{8.21}$$

Da $\int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$ die physikalische Interpretation des Stroms besitzt, sagt das Gesetz von Ampère aus, dass falls $\mathbf{E}$ unabhängig von der Zeit ist, dann ist die magnetische Potentialdifferenz $\int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ entlang einer geschlossenen Kurve gleich dem Strom durch diese Kurve. Falls $\mathbf{E}$ zeitabhängig ist, dann kann das Gesetz von Ampère so gedeutet werden, dass die magnetische Potentialdifferenz entlang einer geschlossenen Kurve gleich dem gesamten Strom durch die Kurve zusätzlich zu der zeitlichen Änderung des elektrischen Flusses durch die Kurve ist.

Als nächstes sollen die Gesetze von Maxwell mit Hilfe von Differentialformen ausgedrückt werden. Man betrachte den $\mathbb{R}^4$ als Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g), das heißt $M = \mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, t)\}$ ausgestattet mit der Lorentz-Metrik g. In der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} := \{\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z, \partial/\partial t\}$ des $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^4)$ besitzt die Lorentz-Metrik $g\colon \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4) \to C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8.22}$$

Dies bedeutet, dass die endliche Familie $\{e_i\}_{i\in\{1,\ldots,4\}}$ gerade g-orthonormal ist. Es bezeichne $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4\} := \{dx, dy, dz, dt\}$ den dualen Korahmen. Der Hodge-$*$-Operator auf $\Omega^1(\mathbb{R}^4)$ berechnet sich mittels (7.45) zu

$$*\varepsilon^1 = \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4, \qquad *\varepsilon^2 = -\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4, \tag{8.23}$$
$$*\varepsilon^3 = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^4, \qquad *\varepsilon^4 = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 \tag{8.24}$$

und auf $\Omega^2(\mathbb{R}^4)$ zu

$$*(\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2) = \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4, \quad *(\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3) = -\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^4, \quad *(\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3) = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^4, \tag{8.25}$$
$$*(\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^4) = -\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3, \quad *(\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^4) = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3, \quad *(\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4) = -\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2. \tag{8.26}$$

Man beachte, dass der Hodge-$*$-Operator mit der Lorentz-Metrik assoziiert ist, das heißt, über all dort wo $*$ auf ein ε^4 wirkt, muss auf der rechten Seite der Gleichung

$g^{44} = -1$ erscheinen. Die Wirkung des Hodge-$*$-Operators auf $\Omega^3(\mathbb{R}^4)$ erhält man aus der Wirkung auf $\Omega^1(\mathbb{R}^4)$ und der Tatsache aus Satz 7.3.2 (3), dass für 1-Formen β, $**\beta = \beta$. Also erhält man

$$*(\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4) = \varepsilon^1, \qquad *(\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4) = \varepsilon^2, \tag{8.27}$$

$$*(\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^4) = \varepsilon^3, \qquad *(\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3) = \varepsilon^4. \tag{8.28}$$

Die verbleibenden Bilder von $*$ sind nach Satz 7.3.2 (2) eindeutig festgelegt.

Satz 8.2.1 (Faradays 2-Form). *Es existiert ein eindeutig bestimmtes $F \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$, das folgende Gleichungen erfüllt*

$$\mathbf{E}^\flat = -i_{\partial/\partial t} F, \tag{8.29a}$$

$$\mathbf{B}^\flat = -i_{\partial/\partial t} * F. \tag{8.29b}$$

(Hierbei ist $^\flat$ mit der Euklidischen Metrik des $\mathbb{R}^3$ assoziiert und $*$ mit der Lorentz-Metrik des $\mathbb{R}^4$.)

Beweis. Für $F \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ lässt sich schreiben

$$\begin{aligned} F = {} & F_{12}\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 + F_{31}\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1 + F_{23}\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 \\ & + F_{14}\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^4 + F_{24}\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^4 + F_{34}\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4, \end{aligned} \tag{8.30}$$

und mit (8.25) folgt

$$\begin{aligned} *F = {} & F_{12}\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4 + F_{31}\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^4 + F_{23}\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^4 \\ & - F_{14}\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 - F_{24}\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1 - F_{34}\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2. \end{aligned} \tag{8.31}$$

Aus Lemma 5.5.2 entnimmt man, dass für $l, m, n \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$i_{e_l}(\varepsilon^m \wedge \varepsilon^n) = \varepsilon^m(e_l)\varepsilon^n - \varepsilon^m\varepsilon^n(e_l) = \delta_l^m\varepsilon^n - \delta_l^n\varepsilon^m. \tag{8.32}$$

Daher gilt

$$-i_{e_4}F = F_{14}\varepsilon^1 + F_{24}\varepsilon^2 + F_{34}\varepsilon^3, \tag{8.33a}$$

$$-i_{e_4} * F = F_{12}\varepsilon^3 + F_{31}\varepsilon^2 + F_{23}\varepsilon^1. \tag{8.33b}$$

Und somit ist F tatsächlich eindeutig bestimmt durch (8.29a) und (8.29b). Also kann man schreiben

$$\begin{aligned} F = {} & E^1\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^4 + E^2\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^4 + E^3\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4 \\ & + B^3\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 + B^2\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1 + B^1\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3, \end{aligned} \tag{8.34}$$

falls $\mathbf{E} = (E^1, E^2, E^3)$ und $\mathbf{B} = (B^1, B^2, B^3)$. □

Somit geht also die Information der Felder $\mathbf{E}(t)$ und $\mathbf{B}(t)$ in eine 2-Form $F \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ über. Ganz ähnlich kann man zeigen, dass eine eindeutig bestimmte 1-Form j

existiert, bestimmt durch $-i_{\partial/\partial t} j = \rho$ und $-i_{\partial/\partial t} * j = *\mathbf{J}^\flat$. In der letzten Gleichung wird angenommen. dass $\mathbf{J}(t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ auf dem $\mathbb{R}^4$ definiert ist. Die 1-Form j, auch *Quellform* genannt, ist dann gegeben durch

$$j = J^1 dx + J^2 dy + J^3 dz - \rho dt. \tag{8.35}$$

Satz 8.2.2 . *Die Gesetze von Maxwell* (8.17a) – (8.17d) *sind auf der Mannigfaltigkeit* $\mathbb{R}^4$*, ausgestattet mit der Lorentz-Metrik, äquivalent zu den Gleichungen*

$$dF = 0 \quad \textit{und} \quad \delta F = j. \tag{8.36}$$

Beweis. Nutzt man, dass $df = \sum_{i=1}^4 e_i(X)\varepsilon^i$ für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ und $d\varepsilon^i = d(dx^i) = 0$ für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, t)$, dann erhält man nach striktem Ausrechnen

$$\begin{aligned} dF = {} & \left(\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)^1 \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4 + \left(\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)^2 \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^4 \\ & + \left(\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)^3 \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^4 + (\operatorname{div} \mathbf{B})\, \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3. \end{aligned} \tag{8.37}$$

Dies bedeutet, dass $dF = 0$ äquivalent ist zu (8.17b) und (8.17c). Es wird zunächst festgehalten, dass man mittels (8.34) und (8.31) erkennt, dass $*F$ aus F hervorgeht, indem man $E_i \mapsto B_i$ und $B_i \mapsto -E_i$ ersetzt. Daher kann bei der Berechnung von $d{*F}$ auf das Ergebnis aus (8.37) zurückgegriffen werden. Da der Index der Lorentz-Metrik 1 ist und F eine 2-Form, gilt $\delta F = *d * F$, also

$$\begin{aligned} \delta F &= *d * F \\ &= * \Bigg[\left(\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)^1 \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4 + \left(\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)^2 \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^4 \qquad (8.38) \\ &\qquad + \left(\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)^3 \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^4 - (\operatorname{div} \mathbf{E})\, \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 \Bigg] \\ &= \left(\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)^1 \varepsilon^1 + \left(\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)^2 \varepsilon^2 + \left(\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)^3 \varepsilon^3 \qquad (8.39) \\ &\quad - (\operatorname{div} \mathbf{E})\, \varepsilon^4. \end{aligned}$$

Somit ist $\delta F = j$ äquivalent zu (8.17a) und (8.17d). □

Es soll nun Lemma 7.3.6 herangezogen werden, um die Komponenten von δF bezüglich der $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$-orthonormalen Basis $\{dx^1, dx^2, dx^3, dx^4\} = \{dx, dy, dz, dt\}$ zu berechnen. Hierzu gelten folgende Umformungen

$$\delta F = \delta \sum_{i_1 < i_2} F_{i_1 i_2}\, dx^{i_1} \wedge d^{i_2} = \sum_{i_1 < i_2} (\delta F_{i_1 i_2}\, dx^{i_1} \wedge d^{i_2})$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i_1<i_2} \sum_{r=1}^{2} c_{i_r} (-1)^r \frac{\partial F_{i_1 i_2}}{\partial x^{i_r}}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_r}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\
&= \sum_{i_1<i_2} \left(c_{i_1} (-1)^1 \frac{\partial F_{i_1 i_2}}{\partial x^{i_1}}\, dx^{i_2} + c_{i_2} (-1)^2 \frac{\partial F_{i_1 i_2}}{\partial x^{i_2}}\, dx^{i_1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i_1<i_2} \left(-c_{i_1} \frac{\partial F_{i_1 i_2}}{\partial x^{i_1}}\, dx^{i_2} + c_{i_2} \frac{\partial F_{i_1 i_2}}{\partial x^{i_2}}\, dx^{i_1} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i_1<i_2} \left(-c_{i_1} \frac{\partial F_{i_1 i_2}}{\partial x^{i_1}}\, dx^{i_2} + c_{i_2} \frac{\partial F_{i_1 i_2}}{\partial x^{i_2}}\, dx^{i_1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i_1<i_2} \left(-c_{i_1} \frac{\partial F_{i_1 i_2}}{\partial x^{i_1}}\, dx^{i_2} + c_{i_2} \frac{\partial F_{i_1 i_2}}{\partial x^{i_2}}\, dx^{i_1} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i_2<i_1} \left(-c_{i_2} \frac{\partial F_{i_2 i_1}}{\partial x^{i_2}}\, dx^{i_1} + c_{i_1} \frac{\partial F_{i_2 i_1}}{\partial x^{i_1}}\, dx^{i_2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i_1<i_2} \left(-c_{i_1} \frac{\partial F_{i_1 i_2}}{\partial x^{i_1}}\, dx^{i_2} + c_{i_2} \frac{\partial F_{i_1 i_2}}{\partial x^{i_2}}\, dx^{i_1} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i_2<i_1} \left(c_{i_2} \frac{\partial F_{i_1 i_2}}{\partial x^{i_2}}\, dx^{i_1} - c_{i_1} \frac{\partial F_{i_1 i_2}}{\partial x^{i_1}}\, dx^{i_2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i_1,i_2} \left(-c_{i_1} \frac{\partial F_{i_1 i_2}}{\partial x^{i_1}}\, dx^{i_2} + c_{i_2} \frac{\partial F_{i_1 i_2}}{\partial x^{i_2}}\, dx^{i_1} \right). \qquad (8.40)
\end{aligned}
$$

Damit kann $(\delta F)_i$ berechnet werden für $i \in \{1,2,3,4\}$

$$
\begin{aligned}
(\delta F)_i = (\delta F)(\partial/\partial x^i) &= \frac{1}{2} \sum_{i_1,i_2} \left[\left(-c_{i_1} \frac{\partial F_{i_1 i_2}}{\partial x^{i_1}}\, dx^{i_2} + c_{i_2} \frac{\partial F_{i_1 i_2}}{\partial x^{i_2}}\, dx^{i_1} \right) (\partial/\partial x^i) \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i_1,i_2} \left(-c_{i_1} \frac{\partial F_{i_1 i_2}}{\partial x^{i_1}} \delta_i^{i_2} + c_{i_2} \frac{\partial F_{i_1 i_2}}{\partial x^{i_2}} \delta_i^{i_1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{i_1} -c_{i_1} \frac{\partial F_{i_1 i}}{\partial x^{i_1}} + \sum_{i_2} c_{i_2} \frac{\partial F_{i i_2}}{\partial x^{i_2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_j -c_j \frac{\partial F_{ji}}{\partial x^j} + \sum_j c_j \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^j} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_j c_j \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^j} + \sum_j c_j \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^j} \right) = \sum_j c_j \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^j}. \qquad (8.41)
\end{aligned}
$$

Und die Komponenten des assoziierten Tensors $(\delta F)^j$ ergeben sich durch

$$
\begin{aligned}
(\delta F)^k = \sum_i g^{ki} (\delta F)_i &= \sum_i \sum_j g^{ki} c_j \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^j} = \sum_j c_j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_i g^{ki} F_{ij} \right) \\
&= \sum_j c_j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_i g^{ki} \sum_l g_{jl} F_i{}^l \right) = \sum_j c_j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_l g_{jl} F^{kl} \right) \\
&= \sum_j \sum_l c_j g_{jl} \frac{\partial}{\partial x^j} F^{kl} = \sum_j (c_j)^2 \frac{\partial}{\partial x^j} F^{kj} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} F^{kj}. \qquad (8.42)
\end{aligned}
$$

Damit ist es möglich (8.17a) und (8.17d) durch die Komponenten des Faraday-2-Tensors auszudrücken. In der theoretischen Physik ist es üblich, dafür folgende, äußerst kompakte Notation heranzuziehen

$$F^{ik}{}_{,k} = j^i. \tag{8.43}$$

Hierbei steht das Symbol $F^{ij}{}_{,k}$ für $\partial F^{ij}/\partial x^k$. Des Weiteren wird in (8.43) über oben und unten stehende Indizes summiert. Dies ist die Einsteinsche Summenkonvention.

(8.17b) und (8.17c) lassen sich ebenfalls kompakt durch den Faraday-2-Tensor ausdrücken. Dazu beachte man, dass auf einer Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M, ein $\alpha \in \Omega^k(M)$ lokal auf U die Darstellung besitzt

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1 \dots i_k} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \in \Omega^k(U), \tag{8.44}$$

mit $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \in \vec{I}_{k,n}$. Mit Hilfe der Aussage aus [Lee12, Proposition 14.32] und dessen Beweis, kann man zeigen, dass für $\{j_1, j_2, \dots, i_{k+1}\} \in \vec{I}_{k+1,n}$ gilt

$$\begin{aligned} (d\alpha)_{j_1 \cdots j_{k+1}} &= (d\alpha)(\partial/\partial x^{j_1}, \dots, \partial/\partial x^{j_{k+1}}) \\ &= \sum_{p=1}^{k+1} (-1)^{p-1} \frac{\partial \alpha_{j_1 \cdots \widehat{j_p} \cdots j_{k+1}}}{\partial x^{j_p}}. \end{aligned} \tag{8.45}$$

Dies könnte man z.B. auch mit dem Lemma 7.3.6 zeigen, indem man für $d \colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ verwendet, dass $d = (-1)^{\mathrm{Ind}(g)}(-1)^{n(k+1)+1} * ^{-1}\delta * ^{-1}$. Die Rechnung wäre dann jedoch, unter Verwendung des Lemmas 7.3.6, nur für $g^{(k)}$-orthonormale Basen des $\Omega^k(M)$ gültig. Letztlich lässt sich mittels (8.45) schlussfolgern, dass für $i_1 < i_2 < i_3 \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\begin{aligned} (dF)_{i_1 i_2 i_3} &= \frac{\partial F_{i_2 i_3}}{\partial x^{i_1}} - \frac{\partial F_{i_1 i_3}}{\partial x^{i_2}} + \frac{\partial F_{i_1 i_2}}{\partial x^{i_3}} \\ &= \frac{\partial F_{i_2 i_3}}{\partial x^{i_1}} + \frac{\partial F_{i_3 i_1}}{\partial x^{i_2}} + \frac{\partial F_{i_1 i_2}}{\partial x^{i_3}} = 0. \end{aligned} \tag{8.46}$$

Auch dies lässt sich in der neu gewonnenen, symbolischen Schreibweise suggestiver schreiben, um den Charakter der zyklischen Permutation der Indizes $i_1 < i_2 < i_3 \in \{1, 2, 3, 4\}$ besser hervorzuheben

$$F_{i_1 i_2, i_3} + F_{i_2 i_3, i_1} + F_{i_3 i_1, i_2} = 0. \tag{8.47}$$

Da $\delta^2 = 0$, gilt mittels (8.23) etc. folgende Rechnung

$$\begin{aligned} 0 = \delta^2 F = \delta j &= *d * (J^1 dx + J^2 dy + J^3 dz - \rho dt) \\ &= *d \Big[J^1 \, \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4 - J^2 \, \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4 + J^3 \, \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^4 \\ &\qquad - \rho \, \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 \Big] \end{aligned}$$

$$= * \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} \right) \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4 \right]$$
$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}. \tag{8.48}$$

Dies ist die *Kontinuitätsgleichung*. Diese kann mit Hilfe des klassischen Integralsatzes von Gauß in die integrale Gestalt gebracht werden

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \, dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS, \tag{8.49}$$

so dass $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ die Voraussetzungen für den Gaußschen Satz erfüllen mag. In dieser Form ausgedrückt, besagt die Kontinuitätsgleichung, dass der Fluss des Stroms durch eine geschlossene Fläche gleich der Änderung der Ladung im Inneren der Fläche ist.

Es soll hervorgehoben werden, dass die Maxwell Gleichungen $dF = 0$ und $\delta F = j$ keinerlei Bezug zu der Struktur des $\mathbb{R}^4$ nehmen. Man ist damit im Stande, die Maxwell-Gleichungen auf einer beliebigen *Lorentz-Mannigfaltigkeit* (M, g) zu postulieren, also auf einer beliebigen 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit M, ausgestattet mit einer pseudo-Riemannschen Metrik g der Signatur $(+, +, +, -)$.

Der zugrunde liegende Formalismus gestattet es, ziemlich direkt die Lorentz-Invarianz der Maxwell-Gleichungen zu zeigen. Sei also (M, g) eine Lorentz-Mannigfaltigkeit, dann definiere man die Menge aller *Lorentz-Transformationen* zu

$$\mathcal{L} := \left\{ \psi \in C^\infty(M, M) \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall p \in M \wedge \forall X, Y \in T_pM : \\ g_p(X, Y) = g_{\psi(p)}(\psi_* X, \psi_* Y) \end{array} \right\}. \tag{8.50}$$

Hierbei ist $\psi_* X$ der Push-Forward auf einen Tangentialvektor X.

Das folgende Lemma soll zeigen, dass der Hodge-$*$-Operator mit dem Pullback ψ^*, wirkend auf eine differentielle k-Form α, kommutiert, falls $\psi \in \mathcal{L}$.

Lemma 8.2.3 . *Sei (M, g) eine n-dimensionale Lorentz-Mannigfaltigkeit. Falls $\psi \in \mathcal{L}$ und $\alpha \in \Omega^k(M)$, dann gilt*

$$* \, \psi^* \alpha = \psi^* * \alpha. \tag{8.51}$$

Beweis. Sei $p \in M$. Sei $\{E_i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ eine g_p-orthonormale Basis für T_pM und $\{\varepsilon^i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ dessen duale Basis, so dass gilt

$$g_p = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \varepsilon^i \otimes \varepsilon^i, \quad c_i = \pm 1, \tag{8.52}$$

dann bezeichne $\tilde{E}_i = \psi_* E_i \in T_{\psi(p)}M$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nach Voraussetzung gilt

$$g_{\psi(p)}(\tilde{E}_i \tilde{E}_{,j}) = g_p(E_i, E_j) = c_i \delta_{ij}. \tag{8.53}$$

Damit ist also $\{\tilde{E}_i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ eine $g_{\psi(p)}$-orthonormale Basis. Da ausschließlich lineare Operatoren in (8.52) involviert sind, genügt es die Aussage für ein beliebiges Basiselement aus $\Omega^k(M)$ zu zeigen.

Aus Satz 7.3.1 ist bekannt, dass für $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(1) < \cdots < \sigma(k)$ und $\sigma(k+1) < \cdots < \sigma(n)$, folgendes für $\alpha = \varepsilon^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(k)} \in \Omega^k(M)$ gilt

$$* \, \alpha = c_{\sigma(1)} \cdots c_{\sigma(k)} \operatorname{sgn}(\sigma) \, (\varepsilon^{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\sigma(n)}). \tag{8.54}$$

Nach Satz 3.5.2 ist folgende Operation gültig

$$\psi^* * \alpha = c_{\sigma(1)} \cdots c_{\sigma(k)} \operatorname{sgn}(\sigma) \, (\tilde{\varepsilon}^{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge \tilde{\varepsilon}^{\sigma(n)}), \tag{8.55}$$

wobei $\{\tilde{\varepsilon}^i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ die duale Basis zu $\{\tilde{E}_i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ darstellt. Wieder mit Satz 3.5.2 schlussfolgert man, dass $\psi^*\alpha = \tilde{\varepsilon}^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \tilde{\varepsilon}^{\sigma(k)}$ und somit

$$* \, \psi^*\alpha = c_{\sigma(1)} \cdots c_{\sigma(k)} \operatorname{sgn}(\sigma) \, (\tilde{\varepsilon}^{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge \tilde{\varepsilon}^{\sigma(n)}), \tag{8.56}$$

da $\{\tilde{e}_i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ eine $g_{\psi(p)}$-orthonormale Basis ist. Damit ist die Aussage bewiesen. □

Satz 8.2.4 (Lorentz-Invarianz der Maxwell-Gleichungen). *Sei (M, g) eine Lorentz-Mannigfaltigkeit. $F \in \Omega^2(M)$ und $j \in \Omega^1(M)$ seien so gegeben, dass gilt $dF = 0$ und $\delta F = j$. Wenn $\psi \in \mathcal{L}$, dann gilt*

$$d\psi^* F = 0, \tag{8.57a}$$

$$\delta\psi^* F = \psi^* j. \tag{8.57b}$$

Beweis. Nach Satz 3.6.7 und wegen $dF = 0$ gilt, dass $d\psi^* F = \psi^* dF = 0$. Wegen Lemma 8.2.3 darf man schlussfolgern, dass $*\psi^*\alpha = \psi^* * \alpha$ für alle $\alpha \in \Omega^k(M)$ und somit

$$\begin{aligned} \delta\psi^* F &= (-1)^1(-1)^{4(2+1)+1} * d * \psi^* F = \psi^* * d * F = \psi^* \delta F \\ &= \psi^* j. \end{aligned} \tag{8.58}$$

Dies beweist die Aussage. □

Lorentz-Invarianz in diesem Kontext bedeutet demnach, dass die Faraday-2-Form genau dann die Maxwell-Gleichungen mit j erfüllt, wenn $\psi^* F$ die Maxwell-Gleichungen mit $\psi^* j$ erfüllt, für alle $\psi \in \mathcal{L}$.

9 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten untersucht, der Integralsatz von Stokes bewiesen, Grundzüge Riemannscher Mannigfaltigkeiten vorgestellt und letztlich die Maxwell-Gleichung in integraler und differentieller Schreibweise diskutiert. Dabei gelang es, die Maxwell-Gleichungen auf eine beliebige Lorentz-Mannigfaltigkeit zu verallgemeinern. Dies geschah mit den Konzepten des Hodge-$*$-Operators und der Koableitung.

Damit liegen die Grundfeste zur einer differentialgeometrischen Beschreibung der Elektrodynamik auf einer Lorentz-Mannigfaltigkeit vor. Hieran schließen sich nun viele weitere Betrachtungen, die Gegenstand der Diskussionen in Lehrbüchern der mathematischen Physik sind. Die vorgestellten differentialgeometrischen Konzepte, wie etwa der Satz von Stokes, sind in ihrer Anwendung in der Physik nicht nur auf die Maxwell-Gleichungen limitiert, sondern finden auf ähnliche Weise Zugang etwa in Eichtheorien der theoretischen Teilchenphysik.

A Topologische Hilfsmittel

A.1 Zerlegung der Eins

Definition A.1.1 . Sei M ein topologischer Raum und die Familie $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq 2^M$ eine Überdeckung von M durch offene Mengen U_α. Eine *Zerlegung der Eins bezüglich* $\mathfrak{U}$ ist eine Familie $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von stetigen Funktionen $\rho_\alpha \colon M \to \mathbb{R}$, die den den folgenden Eigenschaften genügt:

(i) $0 \leq \rho_\alpha(x) \leq 1$ für alle $\alpha \in A$ und alle $x \in M$.

(ii) $\operatorname{supp}(\rho_\alpha) \subseteq U_\alpha$ für jedes $\alpha \in A$

(iii) Die Familie $\{\operatorname{supp}(\rho_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ ist *lokal endlich*, das heißt jeder Punkt $p \in M$ besitzt eine Umgebung U, so dass $U \cap \operatorname{supp}(\rho_\alpha) \neq \emptyset$ nur für höchstens endlich viele α.

(iv) $\sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha(x) = 1$ für alle $x \in M$.

Falls M eine C^∞-Mannigfaltigkeit ist und falls alle Funktionen ρ_α C^∞ sind, spricht man von einer *C^∞-Zerlegung der Eins.*

Da die Familie $\{\operatorname{supp}(\rho_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ lokal endlich ist, gilt für jeden Punkt $x \in M$, dass $x \in \operatorname{supp}(\rho_\alpha)$ nur für höchstens endlich viele α. Demnach ist $\rho_\alpha(x) \neq 0$ nur für höchstens endlich viele α. Daher bedarf die Summe $\sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha(x)$ keiner Konvergenzaussage, da sie für jedes $x \in M$ nur aus endlich vielen Gliedern besteht.

Satz A.1.2 . *Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und sei die Familie $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq 2^M$ eine offene Überdeckung von M.*

(1) *Es existiert eine Familie von C^∞ Funktionen $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ auf M (auch Zerlegung der Eins genannt), mit den Eigenschaften*
   - $\operatorname{supp}(\phi_k)$ *ist kompakt und supp*$(\phi_k) \subseteq U_\alpha$ *für ein* $\alpha \in A$
   - $\{\operatorname{supp}(\phi_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ *ist lokal endlich*
   - $\sum_{k \in \mathbb{N}} \phi_k(x) = 1$ *für alle* $x \in M$

(2) *Es existiert eine C^∞-Zerlegung der Eins $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ bezüglich $\mathfrak{U}$.*

Beweis. [Tu10, Anhang C] □

A.2 Abgeschlossene Mengen

Lemma A.2.1 . *Sei $M = (\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.*

(1) *Sei $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq 2^\Omega$ eine Familie abgeschlossener Mengen aus M, dann ist $\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha$ eine abgeschlossene Menge aus M.*

(2) *Sie die Indexmenge $I = \{1, \dots, n\}$ endlich, wobei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jede Familie $\{C_i\}_{i\in I} \subseteq 2^\Omega$ abgeschlossener Mengen aus M, dass $\bigcup_{i\in I} C_i$ eine abgeschlossene Menge aus M ist.*

Beweis. Zu (1): Nach den De Morganschen Regeln gilt

$$\Omega \setminus \bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} (\Omega \setminus C_\alpha). \tag{A.1}$$

Da die C_α abgeschlossen sind, ist $\Omega \setminus C_\alpha \in \mathcal{T}$ und somit ist $\bigcup_{\alpha\in A}(\Omega \setminus C_\alpha) \in \mathcal{T}$. Dies bedeutet, dass $\Omega \setminus \bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha$ ebenfalls offen ist und somit ist $\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha$ abgeschlossen.

Zu (2):Nach den De Morganschen Regeln gilt

$$\Omega \setminus \bigcup_{i\in I} C_i = \bigcap_{i\in I}(\Omega \setminus C_i). \tag{A.2}$$

Da die C_i abgeschlossen sind, ist $\Omega \setminus C_i \in \mathcal{T}$ und somit ist $\bigcap_{i\in I}(\Omega \setminus C_i) \in \mathcal{T}$. Dies bedeutet, dass $\Omega \setminus \bigcup_{i\in I} C_i$ ebenfalls offen ist und somit ist $\bigcup_{i\in I} C_i$ abgeschlossen. □

Definition A.2.2 . Sei $M = (\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $U \subseteq \Omega$. Man bezeichnet den *Abschluss von* U als die kleinste abgeschlossene Menge $\overline{U}$, so dass $U \subseteq \overline{U}$. Mit dieser Festlegung gilt

$$\overline{U} = \bigcap \{\, V \supseteq U \mid V \text{ ist abgeschlossen in } M \,\}. \tag{A.3}$$

Lemma A.2.3 . *Sei $M = (\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und die Indexmenge $I = \{1, \dots, n\}$ endlich. Dann gilt für jede Familie $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq 2^\Omega$*

$$\overline{\bigcup_{i\in I} U_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{U_i}. \tag{A.4}$$

Beweis. Es soll zunächst gezeigt werden, dass $\bigcup_{i\in I} \overline{U_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} U_i}$. Sei

$$K := \bigcup_{i\in I} \overline{U_i} \quad \text{und} \quad L := \bigcup_{i\in I} U_i. \tag{A.5}$$

Dann ist nach Definintion der Vereinigung $U_i \subseteq L$ für jedes $i \in I$. Dann ist aber auch $U_i \subseteq \overline{L}$ und nach Definition des Abschlusses damit $\overline{U_i} \subseteq \overline{L}$ für alle $i \in I$. Sei $x \in K$, dann existiert ein U_j mit $j \in I$, so dass $x \in U_j$, damit aber auch $x \in \overline{L}$. Insgesamt folgt also $K \subseteq \overline{L}$.

Seien K und L definiert wie in (A.5). Nach Lemma A.2.1 ist K eine abgeschlossene Menge. Nach Definition des Abschlusses, gilt $U_i \subseteq \overline{U_i}$ für alle $i \in I$, damit also $L \subseteq K$ und nach Übergang zum Abschluss $\overline{L} \subseteq K$. Damit ist die Aussage bewiesen. □

Lemma A.2.4 . *Sei $M = (\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann gilt für jede Familie $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq 2^\Omega$*

$$\overline{\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha} \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} \overline{U_\alpha}. \tag{A.6}$$

Beweis. Für den Abschluss gilt, $U_\alpha \subseteq \overline{U_\alpha}$ für alle $\alpha \in A$. Also gilt

$$\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} \overline{U_\alpha} \tag{A.7}$$

und geht man nun auf der linken Seite zum Abschluss über und nutzt die Aussage des Lemmas A.2.1, dann erhält man

$$\overline{\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha} \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} \overline{U_\alpha}. \tag{A.8}$$

Damit ist die Aussage gezeigt. □

Literaturverzeichnis

[AMR01] R. Abraham, J.E. Marsden, and T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications (3rd Ed).* Applied Mathematical Sciences. Springer London, Limited, 2001.

[Boo86] W.M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry (2nd Ed).* Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 1986.

[Lee09] Jeffrey M. Lee. *Manifolds and Differential Geometry.* Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2009.

[Lee12] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* Graduate texts in mathematics. Springer, 2012.

[Tu10] L.W. Tu. *An Introduction to Manifolds.* Universitext (Berlin. Print). Springer, 2010.

Danksagung

Der größte Dank an dieser Stelle gebührt ausschließlich meinen Eltern. Ohne ihren Beistand wäre es mir nicht möglich gewesen, das Mathematikstudium aufzunehmen und insbesondere mit dieser Abschlussarbeit zu beenden. Viele Hindernisse und Hürden mussten genommen werden, die ich ohne ihre stetige Hilfe hätte nicht allein bewältigen können. Dafür möchte ich ihnen meinen Dank aussprechen.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Philipp Varšo
Dresden im Oktober 2013