

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

Supersymmetrie restaurierende Counterterme in Einschleifenordnung

Diplomarbeit
zur Erlangung des wissenschaftlichen Grades
Diplom-Physiker

vorgelegt von

Philipp Varšo

geboren am 15.04.1985 in Dresden

Institut für Kern- und Teilchenphysik
der Technischen Universität Dresden

2010

Eingereicht am 18.08.2010

1. Gutachter: Prof. Dr. Dominik Stöckinger
2. Gutachter: Jun.-Prof. Dr. Arno Straessner

Kurzdarstellung

Die Supersymmetrie ist eine attraktive Erweiterung der Symmetrien der S -Matrix, welche der zugrunde liegenden Algebra fermionische Generatoren hinzufügt. Es lassen sich Symmetriebedingungen für regularisierte Ein-Teilchen-irreduzible (1PI) Vertexfunktionen einer sanft gebrochenen supersymmetrischen Quantenfeldtheorie formulieren. Im Allgemeinen verursacht die Regularisierung eine Symmetriebrechung, die durch geeignete Counterterme kompensiert werden muss. Die dimensionale Reduktion wurde entwickelt, um Eichinvarianz und insbesondere Supersymmetrie zu respektieren. Die dimensionale Regularisierung besitzt letztgenannte Eigenschaften nicht, was zu unterschiedlichen Ergebnissen bei der Berechnung von 1PI Vertexfunktionen in den beiden Regularisierungen führt.

In dieser Arbeit werden Counterterme bestimmt, welche die Gleichheit aller 1PI Vertexfunktionen einer sanft gebrochenen, $N = 1$ supersymmetrischen Yang–Mills-Theorie in dimensionaler Regularisierung und dimensionaler Reduktion garantieren. Die so bestimmten Counterterme werden speziell für das Minimale Supersymmetrische Standardmodell berechnet und in ein `FeynArts` Model File geschrieben.

Abstract

Supersymmetry is an attractive extension of the symmetries of the S -Matrix, which adds fermionic generators to the underlying algebra. Symmetry conditions for regularized one particle irreducible (1PI) vertexfunctions of a softly broken supersymmetric quantum field theory can be formulated. Generally a regularization causes a symmetry breaking which needs to be compensated by suitable counterterms. Dimensional Reduction was designed to respect gauge invariance and especially supersymmetry. Dimensional Regularization does not possess the latter and therefore the calculation of 1PI vertexfunctions leads to different results in both regularizations.

In this thesis counterterms are determined, which ensure the equalness for all 1PI vertexfunctions of a softly broken, $N = 1$ supersymmetric Yang–Mills theory. The counterterms which are derived in this way are specified for the Minimal Supersymmetric Standard Model and they are implemented in a `FeynArts` Model File.

Inhaltsverzeichnis

1	Renormierung	3
1.1	Der Übergang zur Quantenfeldtheorie	3
1.2	Wechselwirkende Quantenfeldtheorien	5
1.2.1	Die Greenschen Funktionen	5
1.2.2	Die S -Matrix	7
1.3	Divergenzen in der Störungstheorie	12
1.4	Symmetrien der quantisierten Theorie	15
1.5	Symmetriebrechung	16
2	Supersymmetrische Eichtheorien	21
2.1	Klassische Eichtheorien	21
2.2	Quantisierte Eichtheorien	22
2.2.1	Eichfixierung	22
2.2.2	Renormierbarkeit	24
2.3	Supersymmetrie	26
2.3.1	Generatoren der Supersymmetrie	26
2.3.2	Superraum	28
2.3.3	Lagrange-dichte supersymmetrischer Eichtheorien	30
2.3.4	Renormierbarkeit	33
3	Regularisierung supersymmetrischer Eichtheorien	37
3.1	Gegenwärtiger Status	37
3.2	Dimensionale Regularisierung und dimensionale Reduktion	38
3.3	Bestimmung restaurierender Counterterme	40
4	Supersymmetrie restaurierende Counterterme in allgemeiner $N = 1$ Yang–Mills-Supersymmetrie	47
4.1	Vorbemerkungen	47
4.2	Übersetzungen zwischen Einschleifencountertermen	49
4.2.1	Selbstenergie des Gauginos	50
5	Das Minimale Supersymmetrische Standardmodell	61
5.1	Das Standardmodell	61
5.1.1	Symmetrien und Teilcheninhalt	61
5.1.2	Spontane Brechung der elektroschwachen Symmetrie	62
5.1.3	Quantisierung	64
5.1.4	Grenzen des Standardmodells	65
5.2	Das MSSM	66

5.2.1	Superfelder des MSSM	66
5.2.2	Lagrangedichte	68
5.2.3	Sanfte Brechung der Supersymmetrie	70
5.2.4	Übergang zu Masseneigenzuständen	71
5.3	Übergangscounterterme des MSSM	77
5.3.1	Übergangscounterterme der Selbstenergien	77
5.3.2	Übergangscounterterme der Gauginokopplungsvertizes	80
5.3.3	Übergangscounterterme der Eichkopplungsvertizes	81
5.3.4	Übergangscounterterme der Yukawakopplungsvertizes	82
6	Implementierung	89
6.1	Erstellung des Model Files	89
6.1.1	Vorüberlegungen	89
6.1.2	Feld- und Parameterinhalt	90
6.1.3	Übergang zu Masseneigenzuständen	90
6.1.4	Countertermlagrangedichte	91
6.2	Überprüfung des Model Files	95
7	Zusammenfassung	97
A	Notationen und Definitionen	99
A.1	Standardintegrale	99
A.2	Die Poincaré-Gruppe	100
A.3	Zweikomponentige Spinordarstellung	101
A.4	Die Funktionalableitung	103
B	Feynmanregeln der Einschleifencounterterme	107
B.1	Übergangscountertermlagrangedichte des MSSM	107
B.2	Feynmanregeln	113
B.2.1	1- und 2-Punkt-Vertizes	113
B.2.2	3-Standardmodellteilchen-Vertizes	120
B.2.3	1-Standardmodellteilchen-2-MSSM-Teilchen-Vertizes	127
	Literaturverzeichnis	143

Einleitung

Seit jeher ist die Physik bestrebt der Natur fundamentale Gesetzmäßigkeiten zu entlocken. Die Teilchenphysik versucht das Verhalten elementarer, subatomarer Konstituenten zu erklären und stößt dabei in immer größere Energiebereiche vor. Mit dem Large Hadron Collider ist ein Grundstein für neue physikalische Erkenntnisse gelegt, mit denen vermutete Theorien über das Hochenergieverhalten unserer Natur bestätigt werden oder gar ungeahnte Phänomene zu Tage treten werden.

Eine Abstraktion der bekannten Phänomene der Teilchenphysik kann mit Hilfe der Begriffswelt der Quantenfeldtheorie vollzogen werden. Genauer gesagt ist es das Standardmodell als eine ganz spezielle Quantenfeldtheorie, dessen Vorhersagen in zahlreichen Messungen bestätigt wurden sind. Dies stellt zunächst eine gewisse Rechtfertigung des Standardmodells als theoretisches Abbild der Hochenergiephysik dar. Jedoch leidet diese Beschreibung an einer mangelnden Inkorporation der Phänomene der Physik auf langen Distanzen – der sogenannten Gravitationsphysik. Bisher ist es auf theoretischer Seite noch nicht gelungen beide Beobachtungsbereiche in *einer* Theorie gleichberechtigt zu behandeln. Darüber hinaus existieren weitere Gründe, warum das Standardmodell als eine umfassende Beschreibung abgelehnt werden muss. So vermag es nicht die Eigenschaften dunkler Materie oder dunkler Energie zu beschreiben.

Ein möglicher Ausweg aus diesem Dilemma ist eine Modifizierung der Eigenschaften der zugrunde liegenden Theorie, die motiviert durch Beobachtungen der modernen Teilchenphysik sind. So stellt die Supersymmetrie eine dieser theoretischen Erweiterungen des Standardmodells dar. Die Vorhersagen des Minimalen Supersymmetrischen Standardmodells (MSSM), als kleinste supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells, können am zukünftigen Teilchenbeschleuniger, dem Large Hadron Collider, überprüft werden. Um spätere experimentelle Erkenntnisse im Rahmen einer theoretischen Beschreibung etwa des MSSM erscheinen zu lassen, bedarf es einem genauen Verständnis supersymmetrischer Quantenfeldtheorien.

Die Quantenfeldtheorie als theoretischer Grundstein der Elementarteilchenphysik hat eine lange Entwicklung hinter sich, was sowohl ihre physikalische Interpretation als auch ihre mathematische Konsistenz betrifft. Störungstheoretisch formuliert, das heißt im Sinn einer Entwicklung nach Potenzen des Planckschen Wirkungsquantum \hbar , wird die S -Matrix von Divergenzen geplagt, die im Rahmen der Renormierung beseitigt werden. Die S -Matrix ist definierendes theoretisches Objekt zur Beschreibung von Streuprozessen innerhalb der Quantenfeldtheorie. Die Divergenzen offenbaren sich erst auf dem Quantenniveau, das heißt nicht den klassischen Grenzfall \hbar betreffend. Die Beseitigung der Divergenzen kann nur unter Bewahrung aller definierenden physikalischen Eigenschaften der S -Matrix, welcher einer wechselwirkenden Quantenfeldtheorie zugrunde liegt, stattfinden. Dies sind Kausalität, Lorentzinvarianz und

Unitarität. Man nutzt somit eine immanente Unbestimmtheit der S -Matrix aus, um Counterterme in die Theorie aufzunehmen, welche die Divergenzen absorbieren.

Die endlichen Anteile dieser Counterterme sind zunächst unbestimmt, solange keine Normierungs- und insbesondere Symmetriebedingungen an die Theorie gestellt werden. Symmetrien der quantisierten Theorie werden in Slavnov–Taylor-Identitäten zusammengefasst. Zentrale Objekte zur Beschreibung oben genannter definierender physikalischer Eigenschaften der Quantenfeldtheorie stellen die n -Punkt-Greensfunktionen (bzw. 1PI Vertexfunktionen) dar, die keinen Observablen entsprechen, sondern rein theoretischer Natur sind. Es ist naheliegend die Symmetrieerhaltung einer Theorie anhand dieser fundamentalen Objekte zu überprüfen. Ein entscheidender Punkt ist, dass die Eigenschaften der S -Matrix auf die n -Punkt-Greensfunktionen (bzw. 1PI Vertexfunktionen) übertragen werden können und somit ebenfalls einer Renormierung bedürfen. Im Allgemeinen wird nicht jedes Renormierungsverfahren die Symmetrien der quantisierten Theorie respektieren, jedoch kann mit Hilfe der Methode der Algebraischen Renormierung die Symmetrie auf Quantenniveau iterativ restauriert werden.

Zwei wichtige Renormierungsverfahren sind die dimensionale Regularisierung und dimensionale Reduktion. Die dimensionale Reduktion wurde unter dem Anspruch entwickelt Supersymmetrie zu erhalten, während die dimensionale Regularisierung diesen Vorzug nicht besitzt. Somit führt die Berechnung von 1PI Vertexfunktionen in dimensionaler Reduktion und dimensionaler Regularisierung auf unterschiedliche Ergebnisse. Es ist Gegenstand dieser Arbeit Supersymmetrie restaurierende Counterterme einer allgemeinen, eichinvarianten sanft gebrochenen $N = 1$ Supersymmetrie anzugeben, die diese Unterschiede auf Einschleifenniveau absorbieren. In dieser Arbeit werden Counterterme mit diesen Eigenschaften als *Übergangscounterterme* zwischen dimensionaler Regularisierung und dimensionaler Reduktion bezeichnet oder einfach nur kurz *Übergangscounterterme*. Dies sind Supersymmetrie restaurierende Counterterme, die darüber hinaus endliche Counterterme besitzen, so dass regularisierte 1PI Vertexfunktionen in beiden Regularisierungen gleich sind. Alle Übergangscounterterme werden für das MSSM ausgearbeitet und in ein **FeynArts** Model File implementiert.

Diese Arbeit ist wie folgt strukturiert. Im Hinblick auf die Eigenschaft der Übergangscounterterme als Supersymmetrie restaurierende Counterterme werden im ersten Kapitel die Grundlagen der algebraischen Renormierung einer Quantenfeldtheorie dargelegt. Im darauf folgenden Kapitel sollen definierende Eigenschaften einer supersymmetrischen Eichtheorie untersucht werden. Im dritten Kapitel werden gebräuchliche Regularisierungen für supersymmetrische Eichtheorien dargestellt und die Konsequenz für die Übergangscounterterme angegeben. Das vierte Kapitel gibt einen Überblick zu Übergangscountertermen einer allgemeinen $N = 1$ Yang–Mills-Supersymmetrie. Im fünften Kapitel wird das MSSM vorgestellt und hierfür die Spezifizierung der Übergangscounterterme diskutiert. Das letzte Kapitel widmet sich der Beschreibung der Implementierung dieser Counterterme des MSSM in ein **FeynArts** Model File.

1 Renormierung

Zunächst werden gewisse Grundeigenschaften und Definitionen einer Quantenfeldtheorie zusammengefasst, auf denen diese Arbeit aufbaut. Insbesondere wird dargelegt wie Symmetrieforderungen als Bedingung an die Greensfunktionen auszudrücken sind.

1.1 Der Übergang zur Quantenfeldtheorie

Die Quantenfeldtheorie beschreibt die Quantentheorie eines Systems mit unendlich vielen Freiheitsgraden. Der mathematische Sprachgebrauch der Quantentheorie unterscheidet sich deutlich von dem der klassischen Mechanik. In der Quantentheorie wird ein Zustand als ein Vektor in einem unendlichdimensionalen Hilbertraum \mathcal{H} dargestellt, in der klassischen Mechanik als ein Punkt in einer endlich dimensionalen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} . Eine Observable in der Quantenmechanik wird abstrahiert zu einem selbstadjungierten Operator, wirkend auf \mathcal{H} , während in der klassischen Mechanik diese als reellwertige Funktion, definiert auf \mathcal{M} , betrachtet wird. Des Weiteren wird eine dynamische Beschreibung in der Quantentheorie durch eine ein-parametrische Familie von unitären Operatoren auf \mathcal{H} garantiert, welche im Sinne des Theorems von Stone [1] durch einen selbstadjungierten (Hamilton-)Operator erzeugt werden. Dem steht eine Familie von kanonischen Transformation auf \mathcal{M} in der klassischen Mechanik gegenüber, deren infinitesimale Erzeugende die klassische Hamiltonfunktion ist [2].

Ein wesentlicher Bestandteil der Konstruktion einer Quantentheorie, die zu einem klassischen System korrespondiert, ist den entsprechenden Hilbertraum \mathcal{H} zu identifizieren. Dieser dient als Definitionsbereich selbstadjungierter Operatoren $A_i: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, die den jeweiligen klassischen Observablen zugeordnet sind. Sieht man den Übergang von der Poissonklammer zu einem Kommutator als gültig an, so hat man hiermit ein Schlüsselprinzip, um (\mathcal{H}, A_i) zu finden. Im Fall von endlichen vielen Freiheitsgraden des zugrunde liegenden Modells gilt das Stone–von-Neumann-Theorem [1]. Dieses macht eine positive Aussage über die unitäre Äquivalenz irreduzibler Darstellungen der Weylrelation. Die Weylrelation ist, formal betrachtet, eine exponenzierte Form der kanonischen Kommutatorrelation zwischen Orts- und Impulsoperator. Das Stone–von-Neumann-Theorem gibt eine Rechtfertigung für die übliche Darstellung des Orts- und Impulsoperators als Multiplikations- und Ableitungsoperator auf $\mathcal{H} = L^2$, dem Raum der quadratintegrierbaren Funktionen, an. Jede andere irreduzible unitäre Darstellung der Weylrelation führt zu physikalisch äquivalenten Theorien.

Im Fall unendlich vieler Freiheitsgrade lässt sich jedoch zeigen, dass unendlich viele unitäre nicht-äquivalente irreduzible Darstellungen der Weylrelation existieren [3]. Fordert man allerdings Poincaréinvarianz, beschreibt demnach eine relativistisch

invariante Quantentheorie, so erhält man eine eindeutige Darstellung.

Betrachtet man die Quantenfeldtheorie in enger Analogie zur Quantentheorie mit endlich vielen Freiheitsgraden, so ist keineswegs garantiert, dass der Übergang zu unendlich vielen Freiheitsgraden ohne größere Probleme vollzogen werden kann. Formale Herleitungen können zu divergenten Ausdrücken führen. So lässt sich etwa die Störungsrechnung in der Quantentheorie endlich vieler Freiheitsgrade am Besten im Wechselwirkungsbild durchführen. In der Quantenfeldtheorie gestaltet sich das Szenario ähnlich. Hier wird angenommen, dass ein Bildtransformationsoperator existiert, der zwischen dem Heisenberg- und Wechselwirkungsbild vermitteln soll. Nach dem Theorem von Haag [4] kann aber solch ein Operator innerhalb einer relativistisch-invarianten Quantenfeldtheorie nicht existieren. Somit geben Herleitungen dieser Art nur einen ersten Hinweis darauf, welche Größen sinnvollerweise wohl-definiert werden sollten. Eine Alternative besteht darin, ihnen durch eine Rechenvorschrift Sinn zu verleihen, jedoch unter strenger Beachtung physikalischer Forderungen, die man an eine wechselwirkende relativistisch-invariante Quantenfeldtheorie stellt. Eine andere Möglichkeit wäre, derartige Axiome direkt zur Konstruktion entsprechender Objekte heranzuziehen. Auf diesen Zugang [5] wird hier verzichtet, stattdessen wollen wir den erstgenannten Zugang kurz darlegen.

Im weiteren Verlauf des Textes soll die Quantisierung für den Fall eines freien, neutralen, skalaren Quantenfeldes skizziert werden. Das klassische Feld $\phi(x)$ erfüllt die Wellengleichung

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad \text{bzw.} \quad (\square - m^2) \phi(x) = 0. \quad (1.1)$$

Die Bewegungsgleichung (1.1) wird gelöst von

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2} 2k^0} \left(a(\vec{k}) e^{-ik^\mu x_\mu} + a^\dagger(\vec{k}) e^{ik^\mu x_\mu} \right) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x), \quad (1.2)$$

wobei gilt

$$k^0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \quad (1.3)$$

Drückt man die lorentzinvariante Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (1.4)$$

in Abhängigkeit der Leiteroperatoren $a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k})$ aus, so erkennt man, dass das freie Feld $\phi(x)$ durch ein System von unendlich vielen, entkoppelten, zeitunabhängigen, harmonischen Oszillatoren dargestellt wird. Diese Erkenntnis legt es nahe den Hilbertraum als Fockraum $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ mit Forderung nach einem existierenden Grundzustand zu konstruieren. Viel mehr ergibt sich ein *symmetrischer* Fockraum $\mathcal{F}_S(\mathcal{H})$, da das skalare Feld mit bosonischen Vertauschungsrelation quantisiert wird [6]. Man postuliert in enger Analogie zur Quantentheorie endlich vieler Freiheitsgrade die kanonischen

Vertauschungsrelationen

$$[\phi(x), \phi(y)]|_{x_0=y_0} = 0, \quad (1.5a)$$

$$[\dot{\phi}(x), \phi(y)]|_{x_0=y_0} = -i\delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (1.5b)$$

Wird die Wechselwirkung eines Quantenfeldes mit anderen quantenmechanischen Systemen betrachtet, tritt für gewöhnlich eine teilchenhafte Interpretation der Zustände in $\mathcal{F}_S(\mathcal{H})$ zu Tage. Genau dies fordert man auch von einer Quantenfeldtheorie, da teilchenhaftes Verhalten in Experimenten stets beobachtet wird und somit auch der Sprachgebrauch eines Teilchens innerhalb dieser Theorie gerechtfertigt ist. Denn bezeichnet man den Fockraumzustand, dessen einzige von Null verschiedene Komponente Element eines symmetrisierten n -fachen Tensorprodukt von Hilberträumen ist, als

$$|n_\phi\rangle \in \bigotimes_S^n \mathcal{H}, \quad (1.6)$$

so kann man dies als n Teilchen oder Anregungen interpretieren, jedes im Zustand des Quantenfeldes ϕ . In dieser Weise gesehen sind es genau jene Teilchen, oder Quanten, die bei Wechselwirkung mit einem quantenmechanischen System durch selbiges emittiert oder absorbiert werden können.

1.2 Wechselwirkende Quantenfeldtheorien

1.2.1 Die Greenschen Funktionen

Als fundamental zur Beschreibung von Wechselwirkung mit Teilchen, sind Vakuumerwartungswerte zeitgeordneter Produkte von Feldoperatoren anzusehen. Diese werden des Öfteren auch als *n-Punkt-Greensfunktionen* bezeichnet und sind definiert als

$$G_n(x_1, \dots, x_n) := \langle 0 | T(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) | 0 \rangle. \quad (1.7)$$

Das zeitgeordnete Produkt ist hierbei folgendermaßen erklärt

$$T(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) := \theta(x_{\pi(1)}^0) \cdots \theta(x_{\pi(n)}^0) \langle 0 | \phi(x_{\pi(1)}) \cdots \phi(x_{\pi(n)}) | 0 \rangle, \quad (1.8)$$

wenn $\pi(1) \dots \pi(n)$ diejenige Permutation von $1, \dots, n$ ist, für die

$$x_{\pi(1)}^0 \geq \cdots \geq x_{\pi(n)}^0 \quad (1.9)$$

gilt. Ein sehr wichtiges Instrument zur Untersuchung der Eigenschaften einer Quantenfeldtheorie ist das erzeugende Funktional für die Greenschen Funktionen

$$Z(J) = \langle 0 | T \exp \left(i \int dx \phi(x) J(x) \right) | 0 \rangle \quad (1.10a)$$

$$= \sum_n \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \cdots J(x_n) . \quad (1.10b)$$

An dieser Definition ist zu erkennen, dass bei Kenntnis des Vakuumfunktionals $Z(J)$ die einzelnen Funktionen $G(x_1, \dots, x_n)$ durch Differentiation nach den Quellen $J(x)$ entstehen. Diese werden für große Zeiten adiabatisch ausgeschaltet, das heißt es handelt sich hierbei um hinreichend glatte, beliebige Funktionen mit beschränkten Träger auf der Raum-Zeit. Die Greensfunktionen können als Koeffizienten in einer formalen Potenzreihe in den Quellen $J(x)$ des Funktionals $Z(J)$ betrachtet werden

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n Z(J)}{i\delta J(x_1) \cdots i\delta J(x_n)} \Big|_{J=0} . \quad (1.11)$$

Eine explizite Darstellung des Funktionals $Z(J)$ ist nur für die wechselwirkungsfreie Theorie möglich. Im Fall freier Felder $\phi(x)$ notiert man das erzeugende Funktional als

$$Z = Z_0(J) = \langle 0|T \exp \left(i \int dx \phi(x) J(x) \right) |0 \rangle . \quad (1.12)$$

Der Index 0 soll auf das Fehlen der Wechselwirkung hinweisen, das heißt es gilt $(\square + m^2)\phi(x) = 0$. Unter Verwendung der kanonischen Vertauschungsrelationen (1.5) kann man zeigen [7], das folgende inhomogene partielle Differentialgleichung gilt

$$(\square + m^2) \frac{1}{Z_0(J)} \frac{\delta}{i\delta J(x)} Z_0(J) = J(x) . \quad (1.13)$$

Die kausale 2-Punkt-Greensfunktion des freien Feldes, ist definiert als der Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Produktes zweier Feldoperatoren

$$\Delta_C = \langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0 \rangle \quad (1.14)$$

und ist Grundlösung der inhomogenen partiellen Differentialgleichung (1.13)

$$(\square + m^2)\Delta_C = -i\delta(x) . \quad (1.15)$$

Mit den Randbedingungen, dass diese Greensfunktion für $t \rightarrow +\infty$ nur positive Frequenzen und für $t \rightarrow -\infty$ nur negative Frequenzen enthält (siehe (1.2)), ergibt sie sich zu

$$\Delta_C(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} . \quad (1.16)$$

Hierbei wird über die reelle Achse integriert und die auftretenden Pole werden durch einen $+i\epsilon$ Term infinitesimal verschoben. Es ist offensichtlich, dass die Funktion

$$\frac{\delta}{i\delta J(x)} Z_0(J) = \langle 0|T\phi(x) \exp \left(i \int dy \phi(y) J(y) \right) |0 \rangle \quad (1.17)$$

gerade obige kausale Randbedingungen besitzt. Somit folgt mit diesen Frequenzeigenschaften

$$\frac{1}{Z_0(J)} \frac{\delta}{i\delta J(x)} Z_0(J) = i \int d^4y \Delta_C(x-y) J(y) \quad (1.18)$$

und damit

$$Z_0(J) = \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_C(x-y) J(y) \right) . \quad (1.19)$$

Für die freie 2-Punkt-Greensfunktion erhält man

$$G_0^{(2)}(x_1, x_2) = \left. \frac{\delta^2 Z_0(J)}{i\delta J(x_1) i\delta J(x_2)} \right|_{J=0} = \Delta_C(x_1 - x_2) . \quad (1.20)$$

Analoge Formeln lassen sich auch für andere Spinfreiheitsgrade herleiten. Wir verzichten auf diese Diskussion hier und verweisen auf [8].

1.2.2 Die S -Matrix

Zentrales Objekt zur Beschreibung einer wechselwirkenden Quantenfeldtheorie ist die S -Matrix. Es handelt sich hierbei um die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass ein System unter dem Einfluss einer Wechselwirkung von einem Anfangszustand in einen Endzustand übergeht. Es sei hervorzuheben, dass es eine essentielle Annahme der *Störungstheorie* ist, dass alle Prozesse als Übergang von einer Basis des freien Fockraumes in einen anderen betrachtet werden können. Seien also $|\Phi_{\text{ein}}\rangle$ und $|\Psi_{\text{aus}}\rangle$ Zustände des freien Fockraumes, dann ist die zu diskutierende Wahrscheinlichkeitsamplitude gegeben durch

$$\langle \Psi_{\text{aus}} | \Phi_{\text{ein}} \rangle = \langle \Psi_{\text{aus}} | S^{-1} | \Phi_{\text{aus}} \rangle , \quad (1.21)$$

wobei der Operator S unitär sein muss, da er eine Basis eines Hilbertraumes in eine andere überführt.

Zur gänzlichen Formulierung einer *relativistisch invarianten* Quantenfeldtheorie fehlt noch die Angabe des Verhaltens der Theorie unter Raum-Zeit-Transformationen. Fordert man, dass die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen zwei Zuständen für alle Beobachter, die durch eine Raum-Zeit-Transformation miteinander verknüpft sind, erhalten sein soll, so gilt

$$|\langle \Psi_{\text{aus}}^{(a,\Lambda)} | \Phi_{\text{ein}}^{(a,\Lambda)} \rangle| \stackrel{!}{=} |\langle \Psi_{\text{aus}} | U_{\text{aus}}^{-1}(a, \Lambda) U_{\text{ein}}(a, \Lambda) | \Phi_{\text{ein}} \rangle| . \quad (1.22)$$

Hierbei wurden poincarétransformierte ein-aus Basen betrachtet, das heißt eine Darstellung $U_{\text{ein/aus}}$ einer Translation a und einer Lorentz-Transformation Λ wirkt auf den jeweiligen Zustandsraum (siehe hierzu auch Abschnitt A.2). Wigners Theorem [9] spezifiziert die Eigenschaft der Darstellung der Poincaré-Transformation auf dem Zustandsraum insofern, dass für eine mögliche Lösung nach geeigneter Phasenwahl

gilt

$$U_{\text{ein}}(a, \Lambda) = U_{\text{aus}}(a, \Lambda) \equiv U(a, \Lambda) \quad (1.23a)$$

$$U^{-1}(a, \Lambda)U(a, \Lambda) = \mathbf{1} . \quad (1.23b)$$

Somit kann man aus (1.22) und (1.23) das Transformationsverhalten der S -Matrix ablesen

$$U(a, \Lambda)SU^\dagger(a, \Lambda) = S . \quad (1.24)$$

Die S -Matrix ist demnach relativistisch invariant. Die Kovarianz des klassischen Feldes $\phi'(x') = \phi(x)$ drückt sich auf Operatorniveau folgendermaßen aus

$$\phi'(\Lambda x + a) = U^{-1}(a, \Lambda)\phi(\Lambda x + a)U(a, \Lambda) = \phi(x) . \quad (1.25)$$

Oben hatten wir ja bereits erwähnt, dass ein skalares Quantenfeld bosonischen Vertauschungsrelationen genügt. Das heißt, dass die Poissonklammer zwischen den kanonischen Variablen Ort und Impuls durch einen Kommutator auf Operatorniveau ersetzt wird. Dies garantiert aber gerade, dass

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad \text{für} \quad (x - y)^2 < 0 \quad (1.26)$$

gilt. Man mag obige Formel als Messungen an zwei Punkten interpretieren, die einen raumartigen Abstand besitzen und sich nicht gegenseitig beeinflussen. Sie wird auch als Bedingung der *Mikrokausalität* bezeichnet.

All dies gibt nun Anlass etwaige physikalische Bedingungen axiomatisch für die S -Matrix zu formulieren, wobei es zweckmäßig ist eine Quelle $J(x)$ einzuführen, die an einen elementaren oder zusammengesetzten Operator knüpfen soll und, wie die Funktion $f(x)$ aus (1.47), geeignete Trägereigenschaften besitzt.

Gesucht wird ein Funktional $S(J)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. S lässt sich formal nach Potenzen von $J(x)$ entwickeln

$$S(J) = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n T_n(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n) . \quad (1.27)$$

Man beachte, dass für $J = 0$ die S -Matrix gerade die Identität $\mathbf{1}$ ist. Des Weiteren sind die Operatoren $T_n(x_1, \dots, x_n)$ Operatoren im Fockraum.

2. $S(J)$ ist kovariant in Bezug auf Poincaré-Transformationen

$$U(a, \Lambda)S(J)U^{-1}(a, \Lambda) = S(J^{(a, \Lambda)}) , \quad (1.28)$$

$$J^{(a, \Lambda)}(x) = J(\Lambda^{-1}(x - a)) , \quad (1.29)$$

wobei $U(a, \Lambda)$ einer unitären Darstellung der eigentlichen Poincaré-Gruppe P_+^\uparrow (siehe hierzu A.2) entspricht.

3. $S(J)$ ist kausal,

$$S(J_1 + J_2) = S(J_2)S(J_1), \quad (1.30)$$

falls $\text{supp}(J_2)$ nur Punkte enthält, die nicht in $\text{supp}(J_1)$ oder dessen Vergangenheit liegen. Eine spätere Wechselwirkung kann somit die frühere nicht beeinflussen.

4. Der Streuoperator $S(J)$ ist unitär

$$S(J)S(J)^\dagger = S(J)^\dagger S(J) = \mathbf{1}. \quad (1.31)$$

Diese Forderungen lassen sich auf die T_n übertragen. Leider führen die Axiome zu keinem eindeutigen Ergebnis, so dass in diesem Zugang von einer am wenigsten singulären Lösung gesprochen werden muss [10]. Wählt man

$$T_1(x) = \phi(x) \quad (1.32)$$

mit $\phi(x)$ aus (1.2), so ist eine mögliche Lösung durch

$$\begin{aligned} T_n(x_1, \dots, x_n) &= T(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) \\ &= \sum_{\pi \in P_n} \left[\theta(x_{\pi(1)}^0 - x_{\pi(2)}^0) \cdots \theta(x_{\pi(n-1)}^0 - x_{\pi(n)}^0) \right. \\ &\quad \left. \times \phi(x_{\pi(1)}) \cdots \phi(x_{\pi(n)}) \right] \end{aligned} \quad (1.33)$$

gegeben. In (1.33) wird über alle Permutationen π von $1 \dots n$ summiert. Eigentlich ist das T -Produkt nur dann eindeutig definiert, wenn die x_i alle verschieden sind. Es verbleibt eine gewisse Beliebigkeit in der vollständigen Definition der S -Matrix, die sich später bei der Prozedur der Renormierung als sehr wertvoll herausstellen wird. So ist für jede Lösung T_n auch $T_n + i\Lambda_n$ eine Lösung, wenn $\Lambda_n(x_1, \dots, x_n)$ ein hermitescher Operator ist, der nur für $x_1 = \dots = x_n$ nicht verschwindet. Für eine genaue Begründung dieses Zusammenhanges sei an dieser Stelle auf [10] verwiesen.

Nichtsdestotrotz hat man durch (1.33) eine Darstellung für $S(J)$ gefunden

$$S(J) = T \exp \left(\int dx \phi(x) J(x) \right). \quad (1.34)$$

Bildet man in (1.34) den Vakuumerwartungswert und nimmt man $\phi(x)$ als freies Feld an, so lässt sich $Z_0(J)$ mit $S(J)$ identifizieren.

Um das erzeugende Funktional für die n -Punkt-Greensfunktionen wechselwirkender Felder zu gewinnen, ist eine Annahme für das wechselwirkende Feld $\phi(x)$, dass es für große Zeiten in ein freies Feld ϕ_{ein} beziehungsweise ϕ_{aus} übergeht

$$\phi(x) \rightarrow \sqrt{z} \phi_{\text{aus}} \quad \text{für } x_0 \rightarrow +\infty \quad (1.35a)$$

$$\phi(x) \rightarrow \sqrt{z} \phi_{\text{ein}} \quad \text{für } x_0 \rightarrow -\infty \quad (1.35b)$$

und dass das Vakuum aus (1.10b) im Sinne der Störungstheorie das freie Vakuum ist. Es gilt

$$\frac{\delta}{i\delta J(x)} Z(J) = \langle 0|T\phi(x) \exp\left(i \int dy \phi(y)J(y)\right)|0\rangle. \quad (1.36)$$

Mit den Annahmen aus (1.35) hat die linke Seite von (1.36) die selben Frequenzeigenschaft wie in (1.17). Betrachtet man ein wechselwirkendes System in Form einer Selbstwechselwirkung, so ist ϕ definiert durch

$$(\square + m^2)\phi = -\frac{\partial V}{\partial\phi} \equiv V'(\phi), \quad (1.37)$$

wobei V ein Polynom in ϕ sei. Unter der Annahme, dass die kanonischen Vertauschungsrelationen (1.5) auch für das wechselwirkende Feld $\phi(x)$ gültig sind, schlussfolgert man, dass

$$(\square + m^2)\frac{\delta Z}{i\delta J} = \left(J(x) - V'\left(\frac{\delta Z}{i\delta J}\right)\right) Z(J) \quad (1.38)$$

gilt. Fordert man kausale Randbedingungen, so ist

$$Z(J) = \mathcal{N} \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right) Z_0(J)\right) \quad \text{mit} \quad (1.39)$$

$$\mathcal{N} = \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right) Z_0(J)\right)\Bigg|_{J=0} \quad (1.40)$$

eine formale Lösung, dessen Nenner gerade die Normierungsbedingung

$$Z(0) = 1 \quad (1.41)$$

gewährleistet. Eine Störungsreihe für das erzeugende Funktional gewinnt man aus der Entwicklung der Exponentialfunktion in eine Potenzreihe.

Es sei darauf hingewiesen, dass sich die Berechnungen für die n -Punkt-Greensfunktionen mit Hilfe von *Feynmanregeln* formalisieren lassen. Diese gestatten eine graphische Darstellung in Form von Diagrammen, zu denen ein analytisches Äquivalent korrespondiert. Hieraus resultiert ein Sprachgebrauch, der es auf elegante Weise ermöglicht, weitere Klassen von erzeugenden Funktionalen zu definieren. Denn versteht man die n -Punkt-Greensfunktionen als die Summe der zu ihnen beitragenden Diagramme, so lassen sich etwa die Begriffe “zusammenhängend” oder “Ein-Teilchen-(ir)reduzibel” auf die Greensfunktionen selbst übertragen. Eine n -Punkt-Greensfunktion besitzt also etwaige diagrammatische Eigenschaften, wenn alle Diagramme, die zu ihr beitragen, diese Eigenschaften haben. So definiert man etwa “unzusammenhängende” Diagramme dadurch, dass man nicht von jedem äußeren Punkt des Diagramms zu jedem anderen gelangen kann, ohne das Diagramm zu verlassen. Das erzeugende Funktional für diese Klasse von n -Punkt-Greensfunktionen

ist gegeben durch

$$Z_C(J) = -i \ln Z(J) . \quad (1.42)$$

Ein Beweis für diese Aussage kann [11] entnommen werden.

Man führt noch eine weitere Klasse von n -Punkt-Greensfunktionen ein und definiert “Ein-Teilchen-irreduzible” Diagramme (1PI), als diejenigen zusammenhängenden ohne äußere Linien, die nach Auftrennen einer inneren Linie noch zusammenhängend bleiben. Definiert man eine neue Variable $\phi_C(x)$ durch

$$\phi_C(x) = \frac{\delta Z_C}{\delta J(x)} , \quad (1.43)$$

so entsteht das erzeugende Funktional irreduzibler Topologien durch eine Legendre-Transformation von $Z_C(J)$

$$\Gamma(\phi_C) = Z_C(J) - \int d^4x J(x)\phi_C(x) . \quad (1.44)$$

Die Ableitung von Γ nach den Feldern bezeichnet man als 1PI Vertexfunktion

$$\Gamma_{\phi_{i_1}, \dots, \phi_{i_n}}(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n \Gamma(\phi)}{i\delta\phi_{i_1}(x_1) \dots i\delta\phi_{i_n}(x_n)} \right|_{\phi=0} . \quad (1.45)$$

In (1.45) haben wir ϕ_C mit ϕ bezeichnet. Auch wenn ϕ_C keinem Operator entspricht, so werden wir trotzdem im weiteren Verlauf, diese Identifikation fortsetzen, sofern keine Verwechslungsgefahr mit den Quantenfeldern ϕ besteht. Um zwei wichtige Eigenschaften von $\Gamma(\phi)$ aufzudecken, müssen die Begriffe eines Baumdiagrammes und eines Schleifendiagrammes geklärt werden. Ein Baumdiagramm ist ein Feynmandiagramm dessen Impulse der inneren Linien vollständig durch die äußeren Linien bestimmt sind und der Bedingung, dass eingehende und ausgehende Impulse an jedem Vertex (Wechselwirkungspunkt) gleich sind. Der Beitrag eines solchen Diagramms ist ein Produkt aus Propagatoren, bei dem auch nach Fouriertransformation keine Integration über innere Impulse übrig bleibt. Als Schleifendiagramm bezeichnet man gerade jene Diagramme, die keine Baumdiagramme sind. Denn die Anzahl der verbleibenden Integrale über innere Impulse, die durch Impulserhaltung unbestimmt bleiben, ist gleich der Anzahl unabhängiger Schleifen in einem Diagramm. Jedes Feynmandiagramm höherer Ordnung lässt sich auf eindeutige Weise aus Blöcken von Vertexfunktionen, die untereinander mit freien Propagatoren verbunden sind, zusammensetzen. Die oben definierten Schleifen können nur innerhalb einzelner Vertexfunktionen auftauchen. Somit lässt sich einsehen, dass Γ auch eine formale Potenzreihe in der Anzahl der Schleifen ist. Da die Ordnung \hbar eines jeden Diagrammes gerade der Anzahl der auftretenden Schleifen entspricht, ist die niedrigste Ordnung von Γ durch die klassische Wirkung gegeben

$$\Gamma(\phi) = \Gamma_{\text{cl}} + \mathcal{O}(\hbar) = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{cl}} + \mathcal{O}(\hbar) , \quad (1.46)$$

denn in niedrigster Ordnung von $\Gamma(\phi)$ tragen nur die 1PI Diagramme ohne geschlossene Schleifen bei und diese entsprechen genau den Vertizes aus \mathcal{L}_{cl} . Da sich $\Gamma(\phi)$ wie in (1.46) als eine Störungsreihe in \hbar schreiben lässt, dessen niedrigste Ordnung durch die klassische Wirkung gegeben ist, bezeichnet man es als effektive Wirkung.

1.3 Divergenzen in der Störungstheorie

Im letzten Abschnitt haben wir dargestellt, wie die Berechnung von n -Punkt-Greensfunktion erfolgt. Sogenannte Quantenkorrekturen drücken sich demnach als geschlossene Schleifen in Feynmandiagrammen aus. Deren analytisches Äquivalent sind Integrale, die mitunter ein divergentes Verhalten für große Impulse aufweisen. Diese werden als UV-Divergenzen bezeichnet. Jenes UV-divergente Verhalten verhindert zunächst die Existenz der Gesamtsumme aus (1.23). Verantwortlich für das Auftreten dieser Divergenzen ist eine diffizile Eigenschaft des Feldoperators $\phi(x)$. Dieser kann nach dem formalen Übergang zu einem Operator nicht länger als eine Funktion in x erkannt werden, sondern viel mehr als eine operatorwertige Distribution [12, 13]

$$\phi(f) = \int dx \phi(x)f(x) , \quad (1.47)$$

mit $f(x)$ als Funktion mit beschränktem Träger. Somit sind Produkte vom Typ $\phi^n(x)$, die in $\partial V/\partial\phi$ aus (1.38) auftreten, a priori nicht definiert. Denn sie entsprechen Produkten von Distributionen an einem Punkt, deren Wohldefiniertheit nicht immer existiert. Eine naive Definition von $\partial V/\partial\phi$ lässt sich auf die Annahme übertragen, dass wechselwirkende Feldoperatoren sicher nicht die kanonischen Vertauschungsrelationen (1.5) erfüllen. $Z(J)$ aus (1.39) muss also wohldefiniert werden, so dass alle Feynmandiagramme endlich werden. Jede ad-hoc Definition, die alle Diagramme endlich macht, heißt *Regularisierung*. So kann etwa die Feldtheorie als Grenzfall von modifizierten Theorien dargestellt werden, in denen die Störungsreihe (1.23) existiert. Erst nach Auswerten der Störungsreihe wird der Grenzprozess zur Feldtheorie vollzogen. Von vornherein ist dabei allerdings nicht klar, ob sich für beobachtbare Größen wohldefinierte Resultate ergeben, welche nicht von den Details der Grenzwertbildung abhängen dürfen [7]. Erfüllen die Greenschen Funktion, unter Umständen erst nach weiteren Abänderung der Wechselwirkung oder der Berechnungsvorschrift, zudem noch alle Axiome in Abschnitt 1.2.2 und die noch zu formulierende Bedingungen einer Symmetrie auf quantisierten Niveau, so spricht man von einer *Renormierung*.

Da Divergenzen ausschließlich aus 1PI Diagrammen rühren, stellen diese gerade zentrale Objekte der Renormierungsprozedur dar. Um abzuschätzen wie stark ein 1PI Diagramm für große innere Impulse divergiert, ist das entsprechende Verhalten der freien Propagatoren und Vertizes maßgeblich. Denn jedes allgemeine Feynmandiagramm γ kann als ein Produkt der inneren Linien und der Polynome an den Vertizes angesehen werden. Im Fourierraum hat der Integrand $I_\gamma(k, p)$ eines jeden

Feynmandiagrammes die Form

$$I_\gamma(k, p) = \prod_{l \in \ell} \Delta_C(k, p) \prod_{V \in \mathcal{V}} P_V(k, p) . \quad (1.48)$$

Hierbei bezeichnet ℓ die Menge der inneren Linien, \mathcal{V} die Menge der Vertizes, k steht für die inneren Impulse (über die integriert wird) und p für die äußeren Impulse des Diagramms. Der Grad von $I_\gamma(k, p)$ in k mit N_a äußeren Linien von Feldern des Typs a ist gegeben durch

$$d(\gamma) = 4 - \sum_a d_a N_a(\gamma) + \sum_{V \in \mathcal{V}} (d_V - 4) . \quad (1.49)$$

Dabei entspricht d_V der UV-Dimension eines jeden Vertex und d_a der UV-Dimension des Feldes. Die UV-Dimension d_V eines Vertex V mit n_a Linien vom Typ a erhält man durch

$$d_V = \sum_a d_a n_a(V) + \deg(V) . \quad (1.50)$$

Mit $\deg(V)$ wird die Potenz der Impulse am Vertex V bezeichnet. Zusammengefasst gibt $d_\gamma \geq 0$ den *Divergenzgrad* des jeweiligen Diagramms an. Der Divergenzgrad eines Integranden $I_\gamma(k, p)$ lässt sich durch Ableitung nach p um 1 erniedrigen. Damit gilt als Resultat, dass der divergente Anteil von $I_\gamma(k, p)$ ein Polynom in den äußeren Impulsen vom Grad des Divergenzgrades $d(\gamma)$ ist. Im BPHZ-Schema [14] werden alle 1PI Einschleifendiagramme regularisiert, indem man als Berechnungsvorschrift eines Einschleifendiagrammes definiert

$$R_\gamma(p, k) := \left(1 - t_p^{d(\gamma)}\right) I_\gamma(p, k) . \quad (1.51)$$

Hierbei bezeichnet

$$t_p^{d(\gamma)} f(p_1, \dots, p_n) = \sum_{l=0}^{d(\gamma)} \frac{1}{l!} p_{i_1}^{\mu_1} \cdots p_{i_l}^{\mu_l} \left[\frac{\partial}{\partial p_{i_1}^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial p_{i_l}^{\mu_l}} f(p_1, \dots, p_n) \right]_{p_i=0} \quad (1.52)$$

den Tayloroperator in den äußeren Impulsen bis einschließlich der Ordnung $d(\gamma)$. Die Divergenz kann von den Diagrammen subtrahiert werden, ohne dass dies in einem Widerspruch zur Definition des T -Produktes (1.33) stehen würde. Bei genauer Analyse der Definition von (1.51) stellt man fest, dass hier über ein Polynom vom Grad $d(\gamma)$ als Stammfunktion verfügt wird. Denn die Subtraktionen legen für $\int dk R_\gamma(p, K)$ fest, dass

$$\int dk R_\gamma(o, k) = \int dk R'_\gamma(o, k) = \dots = \int dk R_\gamma^{(d(\gamma))}(o, k) = 0 . \quad (1.53)$$

Ein solches Polynom in äußeren Impulsen entspricht aber genau lokalen Vertizes in \mathcal{L}_{ct} mit einem Koeffizienten der Ordnung \hbar , welche Teil der Unbestimmtheit einer durch Unitarität, Kausalität und Lorentzinvarianz festgelegten S -Matrix sind. Im

BPHZ-Schema muss (1.51) für beliebig komplizierte Diagramme erweitert werden, um so endliche Resultate zu erhalten. Dies ändert jedoch nichts an der Tatsache, dass die Berechnungsvorschrift (1.51) für Diagramme, hervorgegangen aus \mathcal{L}_{cl} , äquivalent ist zur Berechnung von Diagrammen, bestimmt durch $\mathcal{L}_{\text{cl}} + \mathcal{L}_{\text{ct}}$. Praktisch bedeutet dies, dass alle n -Punkt-Greensfunktionen endlich gemacht werden können, durch Hinzunahme von entsprechend geeigneten Countertermen zur Lagrangedichte. Deren Werte müssen durch Normierungsbedingungen und insbesondere in Anwesenheit von Symmetrien durch Invarianzbedingungen der Vertexfunktionen bestimmt werden. Zusammenfassend existiert folgende Prozedur der Renormierung

1. Man startet von einer klassischen Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{cl}} = \sum_i c_i^{\text{cl}} \mathcal{O}_i \quad (1.54)$$

mit \mathcal{O}_i stellvertretend für die verschiedenen Produkte der elementaren Felder und c_i^{cl} als klassische Parameter.

2. Um endliche Ergebnisse für die Störungsreihe zu erhalten, müssen geeignete Counterterme zur Lagrangedichte \mathcal{L}_{cl} addiert werden

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{cl}} + \mathcal{L}_{\text{ct}} = \sum_i c_i^0 \mathcal{O}_i . \quad (1.55)$$

Somit läuft die Renormierung einfach auf die Ersetzung der Parameter

$$c_i^{\text{cl}} \rightarrow c_i^0 = c_i^{\text{cl}} + \mathcal{O}(\hbar) \quad (1.56)$$

hinaus. Die Parameter c_i^0 werden als nackte Parameter bezeichnet, die aus Renormierung der klassischen Parameter c_i^{cl} hervorgegangen sind. Existiert stets ein Übergang im Sinne

$$c_i^{\text{cl}} \rightarrow c_i^0 = Z_i c_i^{\text{cl}}, \quad Z_i = 1 + \mathcal{O}(\hbar), \quad (1.57)$$

ohne dass Parameter existieren für die $c_i^0 \neq 0$, aber $c_i^{\text{cl}} = 0$, so nennt man diese Modelle multiplikativ renormierbar.

Jedoch ist diese Schreibweise nicht immer möglich, insbesondere im Fall von Theorien mit Symmetrien bedarf die Definition der multiplikativen Renormierung einer Abänderung. Obige Prozedur muss Ordnung für Ordnung in \hbar durchgeführt werden, d.h. die Counterterme werden iterativ bestimmt.

Modelle in deren klassischer Lagrangedichte Vertizes existieren, deren Dimension $\text{deg}(V_k)$ gerade so definiert ist, dass sie nur zu endlich vielen Klassen divergierender Diagramme führen, werden renormierbar gemäß power-counting genannt. Dem stehen Modelle mit Wechselwirkung $\text{deg}(V_k) > 4$ gegenüber, welche als nicht-renormierbar gemäß power-counting bezeichnet werden.

1.4 Symmetrien der quantisierten Theorie

Außer der geforderten Poincaréinvarianz der S -Matrix hat es sich für die Elementarteilchenphysik als sinnvoll erwiesen, weitere Symmetrieforderung an die Theorie zu stellen. Betrachtet man zum Beispiel Felder, die eine “innere Struktur” aufweisen (was sich im Vorhandensein mehrerer Komponenten ϕ_i äußert), so wird

$$\phi'_i(x) = \phi_i(x) + \delta\phi_i \quad (1.58a)$$

$$= \phi_i(x) + i\epsilon^a R_{ai}(x) \quad (1.58b)$$

als infinitesimale *innere Symmetrietransformation* bezeichnet. Man nimmt an, dass es sich bei den Transformationen aus (1.58b) um eine Darstellung einer Lie-Gruppe G handelt. Gleichung (1.58) beschreibt Symmetrietransformationen, die Felder an ein und demselben Raum-Zeit-Punkt miteinander verknüpfen. *Äußere Symmetrien* beziehen Koordinatentransformationen mit ein. Um Symmetrieeigenschaften des Funktionals Γ der Vertexfunktionen zu ergründen, ist die Erkenntnis aus (1.46) eine große Hilfe. Hier hatten wir erwähnt, dass Γ_{cl} die niedrigste Ordnung der störungstheoretischen Entwicklung von Γ ist. In geeigneter Weise werden Symmetrien zunächst auf Γ_{cl} ausgedrückt. Im Fall einer linearen Symmetrietransformation lässt sich die Symmetrie mit Hilfe eines Ward-Operators \mathcal{W} etablieren

$$\mathcal{W}\Gamma_{cl} \equiv \int dx \delta\phi_i(x) \frac{\delta\Gamma_{cl}}{\delta\phi_i(x)} \stackrel{!}{=} 0. \quad (1.59)$$

Diese Forderung wird auf die quantisierte Theorie übertragen und man bezeichnet solche Identitäten, die linear in Γ sind, als Ward-Identitäten.

Nichtlineare Transformationen $\delta\phi_i(x) = s\phi_i$ entsprechen zusammengesetzten Operatoren, die nach obiger Diskussion der Eigenschaft eines Feldoperators als operatorwertige Distribution nicht ohne weiteres definiert sind. Ein übliches Verfahren, um solche Produkte zu konstruieren, besteht darin, sie an äußere Felder Y_i zu koppeln und diese dann im Quantisierungsprozess als nicht-propagierende Felder zu berücksichtigen. Identitäten der Form

$$\mathcal{S}(\Gamma) \equiv \int dx \frac{\delta\Gamma}{\delta Y_i(x)} \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_i(x)} \stackrel{!}{=} 0 \quad (1.60)$$

werden als Slavnov–Taylor-Identitäten bezeichnet. Ist diese Forderung erfüllt, so würde man im BPHZ-Schema schlussfolgern, dass die Impulssubtraktionen die Symmetrie nicht stören und somit das Renormierungsschema invariant in Bezug auf die Symmetriegruppe G ist.

Im Allgemeinen geht man aber so vor, dass Funktionalableitungen nach weiteren Feldern an der Stelle verschwindender Felder auf (1.60) angewendet werden. Gemäß (1.45) entstehen so je nach Wahl der Ableitungen verschiedene Symmetrieidentitäten, die Vertexfunktionen in der quantisierten Theorie miteinander verbinden. Ein Renormierungsschema gibt eine Berechnungsvorschrift für die Vertexfunktionen an. Das Renormierungsschema kann hinsichtlich der Respektierung der Symmetrien überprüft

werden, indem alle Vertexfunktionen, die in den Symmetrieidentitäten vorkommen, mit einem bestimmten Verfahren berechnet werden und in die Identitäten eingesetzt werden. Notwendige Voraussetzung zur Erhaltung einer Symmetrie, ist die Erfüllung aller Identitäten die man aus (1.60) beziehen kann.

1.5 Symmetriebrechung

Wie wir noch später sehen werden, bedarf es der Forderung der lokalen Eichinvarianz einer Lagrangedichte um Vektorbosonen in die Theorie einzuführen. Diese Forderung ist naheliegend, drückt sie doch das Prinzip der Relativität intrinsischer Freiheitsgrade aus [15]. Um eine Eichtheorie quantisieren zu können, muss mit Hilfe einer Eichbedingung in der Lagrangedichte, ein Repräsentant einer Klasse eichäquivalenter Konfigurationen ausgewählt werden.

Bisher haben wir 1PI Vertexfunktionen als nicht-observable Hilfsmittel zur Beschreibung observabler Größen in der Quantenfeldtheorie kennengelernt (S -Matrix). Natürlicherweise dürfen Observablen nicht von einer gewählten Eichung abhängen. Um dieser Forderung gerecht zu werden, müssen den 1PI Vertexfunktionen gewisse Bedingungen auferlegt werden. Dies beinhaltet die Erfüllung der Slavnov–Taylor-Identität.

Bricht jedoch ein Renormierungsschema die Symmetrie, in Form der Verletzung der Slavnov-Taylor Identität

$$S(\Gamma) \neq 0, \quad (1.61)$$

so gibt das Quantenwirkungsprinzip [16, 17] eine Antwort darauf, wie im Allgemeinen diese Brechung aussieht. Hieraus können Konsequenzen hinsichtlich einer möglichen Restauration der Symmetrie unter Einhaltung gewisser Konsistenzbedingungen gezogen werden. Die Kernaussagen des Quantenwirkungsprinzip lassen sich folgendermaßen formulieren [18]:

Sei $\Gamma(\phi_a, Y_i, \lambda)$ ein Vertexfunktional einer gemäß power-counting renormierbaren Theorie, deren klassische Wirkung definiert ist als

$$S = \int d^D x \mathcal{L}(\phi_a, Y_i, \lambda), \quad (1.62)$$

wobei ϕ_a die Menge von gewöhnlichen, propagierenden Feldern bezeichnet, Y_i die Menge von externen Quellen darstellt, welche an die kompositen Operatoren Q^i koppeln, und λ die Menge von Parametern (Massen, Kopplungskonstanten) ist. Dann gilt nach dem Quantenwirkungsprinzip, dass

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta Y_i(x)} \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_a(x)} = \Delta^{ai}(x) \cdot \Gamma. \quad (1.63)$$

Hierbei bezeichnet $\Delta^{ai}(x)$ eine lokale Einsetzung, deren Dimension nach oben be-

grenzt ist

$$\dim \Delta^{ai}(x) \leq D - \dim \phi_a + \dim Q^i . \quad (1.64)$$

Des Weiteren ist der klassische Grenzfall von $\Delta^{ai}(x)$ gegeben durch

$$\Delta^{ai}(x) = Q_{\text{cl}}^i(x) \frac{\delta S}{\delta \phi_a(x)} + \mathcal{O}(\hbar) . \quad (1.65)$$

Im Fall, dass $Q^a(x)$ linear in den propagierenden Feldern $\phi_i(x)$ ist, existieren in höheren Ordnungen keine Quantenkorrekturen für $Q^i(x)$. Dementsprechend müssen auch keine externen Quellen $Y^i(x)$ eingeführt werden, um die Wirkung der Symmetrietransformation auf dem Vertexfunktional Γ zu definieren. Hier reduziert sich die Aussage (1.63) auf

$$Q^i(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_a(x)} = \Delta^{ai}(x) \cdot \Gamma . \quad (1.66)$$

Eine weitere Aussage des Quantenwirkungsprinzips betrifft die Variation bezüglich eines Parameters λ der Theorie. Sie lautet

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda} = \Delta_\lambda \cdot \Gamma . \quad (1.67)$$

Hierbei ist Δ_λ eine über die Raumzeit integrierte Einsetzung, deren Dimension nach oben durch D beschränkt ist. In niedrigster Ordnung ist sie gegeben durch

$$\Delta_\lambda \cdot \Gamma = \frac{\partial \Gamma_{\text{cl}}}{\partial \lambda} + \mathcal{O}(\hbar) . \quad (1.68)$$

Beweise für das Quantenwirkungsprinzip, für den Fall das Γ die BPHZ-renormierte Wirkung ist, findet man in [16, 19, 17]. In [20] wurde gezeigt, dass ein analoges regularisiertes Quantenwirkungsprinzip auch für die unter Verwendung der dimensional Regularisierung regularisierte Wirkung gilt.

Obige Aussagen bedürfen der Erklärung des Begriffes einer *Einsetzung* eines Operators. Die Menge aller Feynmandiagramme G_n mit n äußeren Linien und einem zusätzlichen Vertex $Q_{\text{cl}}(x)$, der nicht aus der ursprünglichen Lagrangedichte \mathcal{L} stammt, wird als Einsetzung von $Q(x)$ in G_n bezeichnet. Dieser wird, wie oben beschrieben, durch Ankopplung an eine äußere Quelle Y in die Lagrangedichte aufgenommen

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + YQ . \quad (1.69)$$

Ableitungen der erzeugenden Funktionale nach der äußeren Quelle Y liefert die Greensfunktion des Operators Q und man notiert dies symbolisch als

$$\langle 0|TQ(x)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)|0\rangle = N_\delta [Q(x)] \cdot G_n(x_1, \dots, x_n) \quad (1.70)$$

$$= [Q(x)]_\delta \cdot G_n(x_1, \dots, x_n) . \quad (1.71)$$

Das Normalprodukt $N_\delta [Q(x)]$ ist eine Berechnungsvorschrift zur Subtraktion von Divergenzen in Subdiagrammen mit Vertizes $Q_{\text{cl}}(x)$. Diese tragen mit der Dimension $\dim Q_{\text{cl}}(x) = \delta$ zum Divergenzgrad $d(\gamma)$ eines Diagramms γ bei. Ist $Q(x)$ ein kompositer Operator, das heißt ein lokales Produkt von Quantenfeldern oder deren Ableitungen, so ergibt sich dessen Dimension gerade als Summe der Dimensionen der Felder und Ableitungen. Das so definierte Normalprodukt hat die Eigenschaft, dass

$$\langle 0|TN_\delta [Q(x)]|0\rangle = 0 . \quad (1.72)$$

Die Einsetzung $Q(x)$ in alle 1PI Diagramme wird mit $[Q]_\delta \cdot \Gamma$ symbolisiert und es gilt

$$Q(x) \cdot \Gamma = Q_{\text{cl}}(x) + \mathcal{O}(\hbar) . \quad (1.73)$$

Wird eine Symmetrie von dem verwendeten Regularisierungsverfahren verletzt, so ist die Aussage des Quantenwirkungsprinzip, dass die Wirkung eines Ableitungsoperators auf dem erzeugenden Funktional Γ der Vertexfunktionen in einer Einsetzung in Γ resultiert,

$$\mathcal{W}\Gamma = \Delta \cdot \Gamma . \quad (1.74)$$

Die Dimension der Brechung ist kleiner als vier. Aus (1.73) folgt im Fall einer Erhaltung der Ward-Identität bis zur Ordnung \hbar^{n-1} , dass die rechte Seite in (1.74) von der Ordnung \hbar^n ist

$$\mathcal{W}\Gamma = \hbar^n \Delta^{(n)} \cdot \Gamma = \hbar^n \Delta^{(n)} + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \quad (1.75)$$

Die Symmetrie ist demnach durch das Feldpolynom $\hbar^n \Delta^{(n)}$ gebrochen. Es besteht jedoch die Möglichkeit Symmetriebrechungen induktiv zu beseitigen, das heißt man hat in jeder Ordnung die Freiheit, lokale Counterterme zur Lagrangedichte zu addieren. Lässt sich die $\mathcal{O}(\hbar^n)$ -Brechung der Ward-Identität in (1.74) als totale Variation einer lokalen Einsetzung $\hbar^n \hat{\Delta}^{(n)}$

$$\hbar^n \Delta^{(n)} = \mathcal{W}\hbar^n \hat{\Delta}^{(n)} \quad (1.76)$$

ausdrücken und ändert man Γ um eine lokale Einsetzung der Dimension vier ab

$$\Gamma \rightarrow \Gamma + \int d^4x \hbar^n \mathcal{L}_{\text{ct}} + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \quad \text{mit} \quad \int d^4x \hbar^n \mathcal{L}_{\text{ct}} = -\hbar^n \hat{\Delta}^{(n)} , \quad (1.77)$$

dann ist die Ward-Identität in der Ordnung \hbar^n erfüllt, so dass gilt

$$\mathcal{W}\Gamma = \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) . \quad (1.78)$$

Da $\hat{\Delta}$ die Eigenschaft hat *lokal* zu sein, das heißt sich als Polynom in den Feldern und Ableitungen der Felder an *einem* Raum-Zeit-Punkt x schreiben lässt, kann die Ward-Identität in allen Ordnungen durch Hinzunahme geeigneter Counterterme wiederhergestellt werden. Existiert keine Darstellung der Brechung der Ward-

Identität als Variation einer lokalen Einsetzung, so ist es nicht möglich restaurierende Counterterme in die Lagrangedichte aufzunehmen. Diese Form von Symmetriebrechung durch Quanteneffekte nennt man Anomalie. Dies bedeutet, dass die für die Brechung der Symmetrie verantwortlichen Beiträge nicht-lokal sind. Liegt genau dieser Fall vor, so können die Axiome der S -Matrix nicht in Einklang mit der Symmetrieforderung $\mathcal{W}\Gamma = 0$ formuliert werden, da diese gerade die nicht-lokalen Anteile festlegt [10]. Mögliche Brechungen $\Delta^{(n)}$ sind gewissen Konsistenzbedingungen unterworfen. Anomaliefreiheit lässt sich algebraisch durch Berechnung der Lösung der Wess-Zumino-Konsistenzbedingungen [21] zeigen. Die algebraische Renormierung fußt auf Subtraktionsgraden und Lokalität und verfügt unter anderem über algebraische Hilfsmittel, nicht aber etwa über besondere analytische Eigenschaften des Subtraktionsschemas. Da das Wirkungsprinzip als fundamental angesehen wird, ist die *algebraische* Methode gleichermaßen von grundlegender Bedeutung [22].

Für Slavnov–Taylor-Identitäten gelten mit einigen Modifikationen ähnliche Aussagen. Gleichung (1.77) wird ersetzt durch

$$\hbar^n \Delta_n = s_{\Gamma_{\text{cl}}} \hbar^n \hat{\Delta}_n . \quad (1.79)$$

Dabei ist s_Γ der linearisierte Slavnov-Taylor-Operator

$$S(\Gamma + \zeta \delta \Gamma) = S(\Gamma) + \zeta s_\Gamma \delta \Gamma + \mathcal{O}(\zeta^2) \quad (1.80)$$

$$= S(\Gamma) + \zeta s_{\Gamma_{\text{cl}}} \delta \Gamma + \mathcal{O}(\zeta^2, \zeta \hbar), \quad (1.81)$$

$$s_\Gamma = \int dx \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta Y_i(x)} \frac{\delta}{\delta \phi_i(x)} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_i(x)} \frac{\delta}{\delta Y_i(x)} \right), \quad (1.82)$$

wobei angenommen wurde, dass Y_i und ϕ_i miteinander kommutieren. Auch hier lässt sich wieder im Fall einer Symmetriebrechung die oben beschriebene Methode anwenden. Ist es möglich die Brechung der Slavnov–Taylor-Identität als $s_{\Gamma_{\text{cl}}} \hat{\Delta}^{(n)}$ zu schreiben, dann kann jede Brechung durch Addition eines Counterterms der Form $-\hbar^n \hat{\Delta}^{(n)}$ absorbiert werden. Denn unter Anwendung von (1.80) gilt

$$S(\Gamma + \hbar^n \hat{\Delta}^{(n)}) = 0 + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) . \quad (1.83)$$

Zusammenfassend kann man konstatieren, dass die Berechnung von Γ ein induktiver Prozess ist. Ist der Beweis der Anomaliefreiheit erbracht und hat man gezeigt, dass alle symmetrischen Counterterme aus Feld- und Parametertransformation aus der klassischen Lagrangedichte hervorgehen, so erhält man die renormierte Wirkung in Ordnung \hbar^n durch Hinzunahme der Counterterme $\Gamma_{\text{ct}}^{(n)}$ zu der regularisierten Wirkung $\Gamma_{\text{reg}}^{(\leq n)}$

$$\Gamma^{(\leq n)} = \Gamma_{\text{reg}}^{(\leq n)} + \Gamma_{\text{ct}}^{(n)} . \quad (1.84)$$

Nimmt man an, dass die Slavnov–Taylor-Identität bis zur Ordnung \hbar^{n-1} erfüllt ist,

dass heißt $S(\Gamma^{\leq n-1}) = 0$, dann gilt wie oben beschrieben

$$S(\Gamma_{\text{reg}}^{\leq n}) = \Delta^{(n)}. \quad (1.85)$$

Die Counterterme aus (1.84) erfüllen einerseits die Aufgabe alle UV-Divergenzen aufzuheben und andererseits die Symmetrie zu restaurieren, sofern keine Anomalie existiert. Mit den symmetrischen Countertermen $\Gamma_{\text{ct,sym}}^{(n)}$

$$s_{\Gamma_{\text{cl}}}\Gamma_{\text{ct,sym}}^{(n)} = 0 \quad (1.86)$$

und den nicht-symmetrischen Countertermen $\Gamma_{\text{ct,restore}}^{(n)}$

$$s_{\Gamma_{\text{cl}}}\Gamma_{\text{ct,restore}}^{(n)} = -\Delta^{(n)} \quad (1.87)$$

lassen sich die Counterterme aufspalten in

$$\Gamma_{\text{ct}}^{(n)} = \Gamma_{\text{ct,restore}}^{(n)} + \Gamma_{\text{ct,sym}}^{(n)}. \quad (1.88)$$

Die symmetrischen Counterterme können also im Anschluss an die Beseitigung von Symmetriebrechungen durch nicht-symmetrische Counterterme addiert werden; sie cancellieren Divergenzen in $\Gamma_{\text{reg}}^{(\leq n)} + \Gamma_{\text{ct,restore}}^{(n)}$. Die nicht-symmetrischen Counterterme sind durch (1.87) definiert. Diese Tatsache mag es verhindern, dass die renormierte Lagrangedichte inklusive der Counterterme nicht immer gerade einer renormierten Version der klassischen Lagrangedichte entspricht. Daher werden Theorien mit Symmetrien dann als multiplikativ renormierbar bezeichnet, falls die Lagrangedichte der symmetrischen Counterterme immer als renormierte Version der klassischen Lagrangedichte geschrieben werden kann. Somit entsprechen die endlichen Anteile der symmetrischen Counterterme den freien Parametern der Theorie, welche durch geeignete Normierungsbedingungen bestimmt sind.

2 Supersymmetrische Eichtheorien

Im letzten Kapitel wurden die Grundlagen der Renormierbarkeit einer Quantenfeldtheorie, die einer allgemeinen inneren Symmetrie unterworfen ist, skizziert. Ziel ist es nun, im Hinblick auf die Definition des Minimalen Supersymmetrischen Standardmodells, allgemeine Aussagen sowohl einer Eichtheorie als auch die einer supersymmetrischen Eichtheorie darzustellen.

2.1 Klassische Eichtheorien

Betrachtet man eine Quantenfeldtheorie, auf deren Felder eine innere Symmetrie wirkt, so kann man sich diesen Raum der „inneren“ Freiheitsgrade als einen an jedem Raum-Zeit-Punkt angehefteten Vektorraum vorstellen. In diesem Vektorraum wirkt die Eichtransformation. Betrachtet man zwei Feldkonfigurationen, die durch eine Eichtransformation verknüpft sind, so ist die Aussage des Eichprinzips, dass beide Zustände die gleiche physikalische Situation beschreiben. Eine Lokalisierung der globalen Eichsymmetrie bedingt die Einführung eines Eichfeldes. Um die Natur richtig zu beschreiben, hat sich dieses Prinzip als erfolgreich erwiesen. So ist etwa das Standardmodell, welches weitestgehend alle experimentellen Vorhersagen beschreibt, eine Eichtheorie.

Gegeben ist eine Lie-Gruppe G von $N \times N$ unitärer Matrizen. Die Materiefelder der Theorie sind komplexe Vektoren die sich unter der Wirkung von G transformieren wie

$$\phi(x) \rightarrow \mathbf{g}\phi(x), \quad \mathbf{g} \in G . \quad (2.1)$$

Des Weiteren sei eine Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{Materie}}(\phi, \partial_\mu \phi)$ invariant unter dieser globalen Transformation, das heißt

$$\mathcal{L}_{\text{Materie}}(\mathbf{g}\phi, \partial_\mu \mathbf{g}\phi) = \mathcal{L}_{\text{Materie}}(\mathbf{g}\phi, \mathbf{g}\partial_\mu \phi) = \mathcal{L}_{\text{Materie}}(\phi, \partial_\mu \phi) . \quad (2.2)$$

Nun wird die lokale Eichinvarianz der Lagrangedichte gefordert. Auf die Materiefelder wirken von Raum-Zeit-Punkten abhängige Elemente aus G

$$\phi(x) \rightarrow \mathbf{g}(x)\phi(x), \quad \mathbf{g} \in G \forall x . \quad (2.3)$$

Die direkte Folge ist, dass die partielle Ableitung durch eine kovariante Ableitung ersetzt werden muss

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu , \quad (2.4)$$

in der das Eichfeld A^μ und die Eichkopplung g eingeführt werden. Damit lokale Eichinvarianz des Lagrangians gewährleistet ist, muss die kovariante Ableitung ein Tensor bezüglich allgemeinen Eichtransformationen darstellen, das heißt diese muss linear transformieren

$$D_\mu \phi(x) \rightarrow \mathbf{g}(x) D_\mu \phi(x) . \quad (2.5)$$

Diese Forderung legt das Transformationsverhalten des Vektorfeldes fest

$$A_\mu(x) \rightarrow \mathbf{g}(x) A_\mu \mathbf{g}^{-1}(x) - \frac{1}{ig} \mathbf{g}(x) \partial_\mu \mathbf{g}^{-1}(x), \quad \mathbf{g}(x) \in G \forall x . \quad (2.6)$$

Jedes Element einer ein-parametrischen Lie-Gruppe G kann als

$$\mathbf{g}(x) = e^{-igT^a \alpha_a(x)} \quad (2.7)$$

geschrieben werden. Hierbei sind die α_a beliebige Funktionen und die T^a sind die Generatoren der zugrunde liegenden Lie-Gruppe, die die Vertauschungsrelationen

$$[T^a, T^b] = if_{abc} T^c \quad (2.8)$$

mit total antisymmetrischen Strukturkonstanten f_{abc} erfüllen. Infinitesimalen Eichtransformationen lauten damit

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) - ig\alpha(x)\phi(x) \equiv \phi(x) + \delta_{\text{eich}}\phi(x) \quad (2.9)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) - ig[\alpha(x), A_\mu(x)] \equiv A_\mu + \delta_{\text{eich}} A_\mu . \quad (2.10)$$

Die Eichfelder sind jedoch nicht nur Hilfsfelder, die eine lokale Invarianz der Lagrangedichte garantieren, ihnen wird durch folgenden zusätzlichen Term in der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{inv}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{Materie}}(\phi, D_\mu \phi) . \quad (2.11)$$

auch eine Dynamik zugeordnet. Hierbei bezeichnet

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.12)$$

den Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ und die allgemeine eichinvariante Lagrangedichte besitzt nur Terme der Dimension ≤ 4 .

2.2 Quantisierte Eichtheorien

2.2.1 Eichfixierung

Das Prinzip der kanonischen Quantisierung angewendet auf abelsche Eichtheorien versagt ohne Hinzunahme eines eichfixierenden Termes. Denn ohne diesen Term gilt

für den kanonischen konjugierten Impuls

$$\Pi_a^0 = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{inv}}}{\partial (\partial_0 A_0^a)} = 0 . \quad (2.13)$$

Die Quantisierung der Eichfelder gestaltet sich schwierig, da Eichfelder nur bis auf Eichtransformation eindeutig bestimmt sind. Dies zieht nach sich, dass nicht alle Freiheitsgrade eines Eichfeldes A_μ auch tatsächlich physikalischen Freiheitsgraden entsprechen. So muss zur Quantisierung eines nicht-abelschen Eichfeldes das Pfadintegral herangezogen werden [23]. Im Pfadintegral wird über alle Feldkonfigurationen eines Systems integriert. Ein wesentlicher Trick besteht darin zu verstehen, wie über eichäquivalente Felder zu integrieren ist, die einer Nebenbedingung als Eichfixierung unterworfen sind. Im Zuge dieser Prozedur, die hier nicht näher dargestellt wird, werden unphysikalische Freiheitsgrade in die Theorie aufgenommen, die sogenannten Faddeev–Popov-Geistfelder. Die Geistfelder sind Skalarfelder mit Fermistatistik, können also nach dem Spin-Statistik-Theorem keine physikalischen Freiheitsgrade darstellen.

Zur Quantisierung von Eichtheorien müssen neue Anteile in Lagrangedichte aufgenommen werden. Durch einen eichfixierenden Term \mathcal{L}_{fix} werden unphysikalische Anteile der Eichfelder entfernt und der Geistterm \mathcal{L}_{gh} gewährleistet die Unitarität der S -Matrix. Die gesamte Lagrangedichte ist nun nicht mehr unter Eichtransformationen invariant, wohl aber unter einer globalen fermionischen Transformation. Diese wird als BRST-Symmetrie bezeichnet und besitzt die Eigenschaft, dass mit ihrer Hilfe die physikalische Konsistenz einer nicht-abelschen Eichtheorie auf Quantenniveau und insbesondere die Erhaltung der Unitarität gezeigt werden kann [24, 22]. Erzeugt wird die Symmetrie durch einen BRST-Operator s . Der Operator s wirkt wie eine infinitesimale Eichtransformation, bei der die Funktion $\alpha_a(x)$ aus (2.7) durch den Faddeev–Popov-Geist $c_a(x)$ ersetzt wird

$$s\phi(x) = -igc(x)\phi(x) , \quad (2.14)$$

$$sA_\mu(x) = \partial_\mu c(x) - ig [c(x), A_\mu(x)] . \quad (2.15)$$

Hierbei wurde $c = T^a c_a$ und $A_\mu = T^a A_\mu^a$ gesetzt. Die BRST-Transformation des Geistfeldes $c_a(x)$ erhält man durch die Forderung nach Nilpotenz

$$s(s\phi(x)) \stackrel{!}{=} 0 , \quad (2.16)$$

woraus folgt

$$sc(x) = -igc(x)^2 \quad \text{bzw.} \quad sc_a(x) = \frac{1}{2} g f_{abc} c_b(x) c_c(x) . \quad (2.17)$$

Dieses Transformationsverhalten ist konsistent mit der Bedingung, dass auch die zweimalige BRST-Transformation des Geistfeldes 0 ergeben muss. In diesem Zusammenhang wird eine neue Quantenzahl, die Geistladung, eingeführt. Alle Geistfelder haben Geistladung 1, alle Materie- und Eichfelder haben Geistladung 0. Der BRST-

Operator s erhöht die Geistladung um 1. Es wird verlangt, dass die Geistladung eine erhaltene Quantenzahl ist. Mit Hilfe der BRST-Invarianz lässt sich eine Methode für die Eichfixierung der Theorie angeben. Hier soll nur das Resultat angegeben werden (näheres in [25]). Es wird zu jedem Geistfeld ein Antigeist \bar{c} eingeführt, dessen BRST-Transformation zu einem Hilfsfeld B führt

$$s\bar{c}_a(x) = B_a(x) \quad \text{und} \quad sB_a(x) = 0. \quad (2.18)$$

Somit erfüllt der BRST-Operator allgemein

$$s^2 = 0. \quad (2.19)$$

Der Eichfixierungsterm, den auch Faddeev-Popov gefunden haben, lässt sich mittels des BRST-Formalismus reproduzieren

$$\mathcal{L}_{\text{fix}} + \mathcal{L}_{\text{gh}} = s \left[\bar{c}_a \left((\partial_\mu A_a^\mu) + \frac{\xi}{2} B_a \right) \right] \quad (2.20)$$

$$= B_a (\partial_\mu A_a^\mu) + \frac{\xi}{2} B_a^2 - \bar{c}_a \partial_\mu (D^\mu c)_a. \quad (2.21)$$

2.2.2 Renormierbarkeit

Im vorherigen Abschnitt haben wir gesehen, dass zur klassischen Lagrangedichte die Eichfixierungs- und Geisterterme $\mathcal{L}_{\text{fix,gh}}$ addiert werden müssen, um eine entsprechende Quantisierung einer nicht-abelschen Eichtheorie durchzuführen. Da die BRST-Transformationen einiger Felder nichtlinear sind, wird das bewährte Konzept der Kopplung an BRST-invariante Quellen verwendet. Die gesamte klassische Lagrangedichte, sowie die klassische Wirkung sind dann gegeben durch

$$\Gamma_{\text{cl}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{cl}}, \quad (2.22)$$

$$\mathcal{L}_{\text{cl}} = \mathcal{L}_{\text{inv}} + \mathcal{L}_{\text{fix,gh}} + \mathcal{L}_{\text{ext}}, \quad (2.23)$$

$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = Y_{A_a^\mu} s A_a^\mu + Y_{\phi_i} s \phi_i + Y_{c_a} s c_a. \quad (2.24)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass die Y_{ϕ_i} die jeweils zu ϕ_i entgegengesetzte Statistik haben und damit alle Quellen gemeint sind, deren BRST-Transformation in nichtlinearen Transformationen resultiert; dies sind alle außer den Transformationen von \bar{c} und B .

Folgende Gleichungen, die auf klassischem Niveau erfüllt sind, sollen als Grundforderung an die quantisierte Theorie gestellt werden

1. Gültigkeit der Eichbedingung

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta B_a} = \partial_\mu A_a^\mu + \xi B_a \quad (2.25)$$

2. Slavnov-Taylor Identität

$$S(\Gamma) = 0 \quad (2.26)$$

Die Konsistenz von (2.25) und (2.26) lässt sich in groben Zügen folgendermaßen skizzieren (siehe auch [18]). Nimmt man an, dass (2.25) bis zur Ordnung \hbar^n gilt, dann ist die allgemeine Verletzung der Bedingung (2.25) gemäß power-counting

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta B^a} = \partial^\mu A_\mu^a + \xi B^a + \hbar^n \Delta^a + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}). \quad (2.27)$$

Für $\Delta^a(x)$ kann eine Konsistenzbedingung formuliert werden

$$\frac{\delta}{\delta B^a(x)} \Delta^b(y) - \frac{\delta}{\delta B^b(y)} \Delta^a(x) = 0. \quad (2.28)$$

Schlussendlich folgt aus dieser Bedingung die Darstellung für $\Delta^a(x)$

$$\Delta^a(x) = \frac{\delta}{\delta B^a(x)} \hat{\Delta}. \quad (2.29)$$

Die Aufnahme von $-\hat{\Delta}$ als einen Counterterm der Ordnung n in die Lagrangedichte, sichert die Gültigkeit von (2.25) in der Ordnung \hbar^n , das heißt rekursiv lässt sich durch Addition geeigneter Korrekturen $\hat{\Delta}$ zu Γ (2.25) für alle Ordnungen \hbar erfüllen.

Die Nilpotenzeigenschaft des BRST-Operators in funktionaler Darstellung drückt sich in folgenden zwei Identitäten aus

$$s_\Gamma S(\Gamma) = 0 \quad \forall \Gamma, \quad (2.30)$$

$$s_\Gamma s_\Gamma = 0, \quad \text{falls } S(\Gamma) = 0. \quad (2.31)$$

Mit der Eigenschaft des linearisierten Slavnov–Taylor-Operators aus (1.80) führen diese Eigenschaften auf eine Konsistenzbedingung für eine allgemeine Brechung der Slavnov–Taylor Identität $S(\Gamma) = \hbar^n \Delta + \mathcal{O}(\hbar^{n+1})$, die sogenannte Wess–Zumino-Konsistenzbedingung

$$s_{\Gamma_{\text{cl}}} \Delta = 0. \quad (2.32)$$

Jedoch kann die Lösung dieser Bedingungen im Allgemeinen nicht als totale Variation $s_{\Gamma_{\text{cl}}} \hat{\Delta}$ geschrieben werden. Im Standardmodell ist die einzige Anomalie, die prinzipiell auftreten könnte, die sogenannte Adler–Bardeen-Anomalie, die jedoch aufgrund der speziellen Multipletstruktur im Standardmodell verschwindet. Verschwindet die Adler–Bardeen-Anomalie, können alle Brechungen der Slavnov–Taylor-Identität durch geeignete Counterterme absorbiert werden.

Insbesondere bedarf eine weitere Untersuchung das Prüfen der multiplikativen Renormierbarkeit, um so die freien Parameter in Bezug zu den Parametern der klassischen Wirkung zu setzen. Das heißt die allgemeinen symmetrischen Counterterme

müssen durch Feld- und Parameterrenormierung aus der klassischen Lagrangedichte hervorgehen. Dies zeigt die Untersuchung der allgemeinen Lösung der Gleichung

$$s_{\Gamma_{cl}}\Gamma_{\text{sym}} = 0 \quad (2.33)$$

durch ein lokales Funktional der Γ_{sym} der Geistzahl 0.

2.3 Supersymmetrie

2.3.1 Generatoren der Supersymmetrie

Wir hatten oben angedeutet, dass man sich innere Freiheitsgrade eines Feldes als einen an jeden Raum-Zeit-Punkt angehefteten Vektorraum vorstellen kann. Eine naive Annahme könnte sein, dass Symmetrien dieses Vektorraums in keiner Weise Symmetrien der Raumzeit beeinflussen können. Diese Vermutung hat sich als richtig erwiesen [26]. Man mag diese Aussage auch als ein „No-Go“-Theorem bezeichnen, drückt sie doch aus, dass die Symmetriegruppe einer S -Matrix, welche als Lie-Gruppe angenommen wird, stets in ein direktes Produkt der Poincaré-Gruppe mit einer Gruppe einer inneren Symmetrie zerfällt. Die bosonischen Generatoren sind somit der Impulsoperator P_μ und die sechs Lorentz-Generatoren $J_{\mu\nu}$, sowie eine zusätzliche Anzahl an hermiteschen Generatoren T_l . Für diese gilt

$$[P_\mu, T_l] = 0, \quad [J_{\mu\nu}, T_l] = 0, \quad (2.34)$$

wobei die T_l eine Lie-Algebra bilden

$$[T_l, T_m] = if_{lmk}T_k. \quad (2.35)$$

Anhand dieser Formeln erkennt man, dass die bosonischen Generatoren der inneren Symmetrie das Verhalten eines Feldes unter Poincaré-Transformationen nicht verändern können.

Ist man daran interessiert Generatoren in die Theorie einzuführen, welche eine Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen etabliert, so ist die Folgerung aus dem Coleman–Mandula-Theorem, dass dies nur fermionische Generatoren sein können. Dementsprechend ist man gezwungen die Struktur einer Lie-Algebra aufzubrechen und auch fermionische Generatoren zulassen muss, welche Antikommutator-Relationen genügen, um so eine nicht-triviale Erweiterung der Poincaré-Algebra zu erhalten. Nach dem Haag–Łopuszánnski–Sohnius-Theorem [27] sind als antikommutierende Generatoren Q_a nur solche erlaubt, die sich unter Translationen trivial, und unter homogenen Lorentz-Transformationen wie Spinoren der $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ Darstellung transformieren. Des Weiteren hat die zugrunde liegende Algebra die Struktur einer Z_2 -graduerten Algebra. Ein Ansatz für die Graduierung der Poincaré-Algebra ist

1. L_0 ist die Poincaré-Algebra (siehe hierzu Gleichung (A.27))
2. L_1 ist die lineare Hülle von $\{Q_a\}$ mit $a = 1, 2, 3, 4$

3. Das Produkt $\circ: L_0 \times L_1 \rightarrow L_1$ ist definiert durch

$$\text{a) } P_\mu \circ Q_a = 0$$

$$\text{b) } J_{\mu\nu} \circ Q_a = -(\sigma_{\mu\nu}^4)_{ab} Q_b \quad \text{mit } \sigma_{\mu\nu}^4 = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \ .$$

Mit der Wahl für $\sigma_{\mu\nu}^4$ aus Punkt 3b wird sichergestellt, dass die Koeffizienten des Produktes auf $L_0 \times L_1$ eine Matrixdarstellung von L_0 tragen, wie es eine graduierte Lie-Algebra verlangt. Mit der Forderung einer verallgemeinerten Jacobi-Identität und der Positivität von P^0 kommen zur Poincaré-Algebra noch folgende Vertauschungsrelationen hinzu [28]

$$\{Q_A, Q_B\} = \{\bar{Q}_{\dot{A}}, \bar{Q}_{\dot{B}}\} = 0 \ , \quad (2.36a)$$

$$\{Q_A, \bar{Q}_{\dot{B}}\} = 2\sigma_{A\dot{B}}^\mu P_\mu \ , \quad (2.36b)$$

$$[Q_A, P_\mu] = [\bar{Q}_{\dot{A}}, P_\mu] = 0 \ , \quad (2.36c)$$

$$[J^{\mu\nu}, Q_A] = -(\sigma^{\mu\nu})_A{}^B Q_B \ , \quad (2.36d)$$

mit

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) \quad \text{und} \quad Q_a = \begin{pmatrix} Q_A \\ \bar{Q}_{\dot{A}} \end{pmatrix} \ . \quad (2.37)$$

Obige Kommutatorrelationen gelten im Fall einer $N = 1$ Supersymmetrie, bei der nur ein Spinor Q_a mit $a = 1, 2, 3, 4$ existiert. Das stellt die „kleinste“ Supersymmetrie dar und der Teilcheninhalt dieser Theorie ermöglicht den Sprachgebrauch, dass man genau *einen* Superpartner zu jedem klassischen Teilchen finden kann. Das Minimale Supersymmetrische Standardmodell schreibt genau diese Sichtweise vor und wir werden uns im Folgenden auf $N = 1$ Supersymmetrie beschränken. Für $N = 1$ Supersymmetrie existiert nur eine innere Symmetrie $U(1)$ die nicht mit den Generatoren der Supersymmetrie vertauscht

$$[Q_A, R] = Q_A \quad \text{und} \quad [\bar{Q}^{\dot{A}}, R] = -\bar{Q}^{\dot{A}} \ , \quad (2.38)$$

die jedoch die Eigenschaft besitzt, mit allen anderen Generatoren einer inneren und äußeren Symmetrie zu kommutieren. Obige R -Symmetrie bedarf für das Minimale Supersymmetrische Standardmodell einer Revision. Wir werden dies in Abschnitt 5.2.2 näher erläutern.

Um irreduzible Darstellungen der Super-Poincaré-Algebra (siehe (2.36)) zu klassifizieren, kann die Methode der Casimir-Operatoren aus Abschnitt A.2 verwendet werden. Die Annahme besteht darin, dass P^μ , $J^{\mu\nu}$ und Q_a als lineare Operatoren auf einem unendlich dimensional Hilbertraum wirkend realisiert werden können. Es existiert noch eine weitere Möglichkeit irreduzible Darstellungen zu finden. Hierfür wird das Konzept des Superraumes eingeführt.

2.3.2 Superraum

Um endliche Supersymmetrietransformationen zu beschreiben, müssten die fermionischen Generatoren in irgendeiner Weise exponenziert werden können. Das heißt, dass das Produkt zweier Gruppenelemente e^A und e^B wieder ein Gruppenelement darstellt. Diese Situation wird im Allgemeinen durch die Baker–Campbell–Hausdorff-Formel beschrieben

$$e^A e^B = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} C_n(A, B) \right], \quad (2.39)$$

wobei auf die explizite Angabe der Multikommutatoren $C_n(A, B)$ hier verzichtet wird. In den C_n sind stets verschachtelte Kommutatoren enthalten. Eine entsprechende Exponenzierung der fermionischen Generatoren Q gelingt mit dem Trick

$$[\theta^A Q_{\dot{A}}, \bar{\theta}_{\dot{B}} \bar{Q}^{\dot{B}}] = 2\theta^A (\sigma^\mu)_{A\dot{B}} \bar{\theta}^{\dot{B}} P_\mu, \quad (2.40)$$

$$[\theta^A Q_A, \theta^B Q_B] = [\bar{\theta}_{\dot{A}} \bar{Q}^{\dot{A}}, \bar{\theta}_{\dot{B}} \bar{Q}^{\dot{B}}] = 0, \quad (2.41)$$

welche sich zu Antikommutatoren zwischen den Q s reduzieren, sofern man annimmt, dass θ^A und $\bar{\theta}^{\dot{A}}$ Grassmannvariablen sind. Jedes Element g der Super-Poincaré-Gruppe kann dargestellt werden durch

$$g = L(x_\mu, \theta^A, \bar{\theta}^{\dot{A}}) \circ e^{\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}} \quad (2.42)$$

mit \circ als Gruppenmultiplikation und $L(x_\mu, \theta^A, \bar{\theta}^{\dot{A}}) = \exp(i\theta Q + i\bar{Q}\bar{\theta} - ix_\mu P^\mu)$. Gleichung (2.42) drückt aus, dass die homogenen Lorentztransformationen eine Untergruppe der Super-Poincaré-Gruppe bilden.

Um Supersymmetrie manifest zu beschreiben wird der Minkowski-Raum um 4 fermionische Freiheitsgrade erweitert

$$\{x^\mu, \theta^A, \bar{\theta}_{\dot{A}}\} = \{x^\mu, \theta, \bar{\theta}\}. \quad (2.43)$$

Auf diesem Raum werden Superfelder definiert, die als eine Potenzreihe in θ und $\bar{\theta}$ zu verstehen sind

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z) \equiv \mathcal{F}(x, \theta, \bar{\theta}) &= f(x) + \sqrt{2}\theta\xi(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta M(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}N(x) \\ &+ \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\zeta(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Aufgrund der Nilpotenzeigenschaft der Grassmanvariablen $\theta^A, \bar{\theta}_{\dot{A}}$ bricht die obige Reihe nach einer endlich Anzahl von Termen ab. Die Koeffizienten dieser Entwicklung sind die sogenannten Komponentfelder. Die Felder $f(x)$, $M(x)$, $N(x)$ und $D(x)$ stellen Skalare dar, während $A_\mu(x)$ ein Vektorfeld ist und $\xi_A(x)$, $\zeta_A(x)$ rechtshändige und $\bar{\chi}^{\dot{A}}(x)$, $\bar{\lambda}^{\dot{A}}(x)$ links-chirale zweikomponentige Weyl-Spinor-Felder sind.

Aus der Transformationseigenschaft der Superfelder

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = L(x, \theta, \bar{\theta})\Phi(x_0, \theta_0, \bar{\theta}_0)L^{-1}(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (2.45)$$

und der Komposition zweier supersymmetrischer Transformationen

$$L(0, \epsilon, \bar{\epsilon})L(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = L(x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\epsilon} + i\epsilon\sigma^\mu\bar{\theta}, \theta + \epsilon, \bar{\theta} + \bar{\epsilon}) \quad (2.46)$$

erhält man für infinitesimale supersymmetrische Transformationen eine Darstellung der Generatoren Q_A und $\bar{Q}^{\dot{A}}$ auf dem Superraum

$$Q_A = -i\left(\partial_A + i\sigma_{A\dot{B}}^\mu\bar{\theta}^{\dot{B}}\partial_\mu\right), \quad \bar{Q}^{\dot{A}} = -i\left(\bar{\partial}^{\dot{A}} + i\theta^B\sigma_{B\dot{B}}^\mu\epsilon^{\dot{B}\dot{A}}\partial_\mu\right). \quad (2.47)$$

Wendet man eine infinitesimale Supersymmetrie-Transformation auf $\mathcal{F}(z)$ an

$$\delta_S\mathcal{F}(z) = (\mathbf{1} + i\epsilon Q + i\bar{\epsilon}\bar{Q})\mathcal{F}(z), \quad (2.48)$$

so muss das Ergebnis wieder ein Superfeld sein und sich schreiben lassen als

$$\begin{aligned} \delta_S\mathcal{F}(z) = & \delta_S f(x) + \sqrt{2}\theta\delta_S\xi(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\delta_S\bar{\chi}(x) + \theta\theta\delta_S M(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\delta_S N(x) \\ & + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}\delta_S A_\mu(x) + \theta\theta\bar{\theta}\delta_S\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\delta_S\zeta(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\delta_S D(x). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Dies definiert Supersymmetrie-Transformationen auf den Komponentefeldern, die man unter Zuhilfenahme von Fierz-Umordnungen [29] ausrechnen kann.

Um manifest supersymmetrische Lagrangedichten zu konstruieren, sind kovariante Ableitung \mathcal{D}_A und $\bar{\mathcal{D}}_{\dot{A}}$ hilfreiche Objekte. Sie sind definiert als

$$\mathcal{D}_A = \partial_A - i\sigma_{A\dot{B}}^\mu\bar{\theta}^{\dot{B}}\partial_\mu, \quad \bar{\mathcal{D}}_{\dot{A}} = -\bar{\partial}_{\dot{A}} + i\theta^B\sigma_{B\dot{B}}^\mu\partial_\mu, \quad (2.50)$$

wobei gilt

$$[\mathcal{D}_A, Q_B] = [\mathcal{D}_A, \bar{Q}^{\dot{B}}] = [\bar{\mathcal{D}}_{\dot{A}}, \bar{Q}^{\dot{B}}] = [\bar{\mathcal{D}}_{\dot{A}}, Q_B] = 0. \quad (2.51)$$

Unter Verwendung der kovarianten Ableitung, lässt sich eine mögliche ad hoc Definition für irreduzible Darstellungen finden

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{A}}\Phi = 0, \quad \mathcal{D}_A\Phi^\dagger = 0. \quad (2.52)$$

Die Freiheitsgrade dieser sogenannten chiralen Superfelder

$$\Phi(y, \theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\xi(y) + \theta\theta F(y) \quad (2.53)$$

$$\Phi^\dagger(\bar{y}, \bar{\theta}) = \phi^*(\bar{y}) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\xi}(y) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(\bar{y}), \quad (2.54)$$

mit den links und rechts chiralen Superraumkoordinaten $y^\mu = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$ und $\bar{y}^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$, haben die gleiche Anzahl an Freiheitsgrade der niedrigdimensionalen irreduziblen Darstellung, die man auch aus gruppentheoretischen Methoden schlussfol-

gert [30]. Das Weyl-Spinor-Feld $\xi(y)$ hat Spin 1/2 und das komplexe Skalarfeld $\phi(y)$ Spin 0. Diese können als Superpartner zu einander betrachtet werden, während $F(y)$ mit Spin 0 ein Hilfsfeld ist.

Vektorsuperfelder V sind Superfelder, die die Bedingung $V^\dagger = V$ erfüllen. Die so definierten Vektorsuperfelder implizieren, dass deren Komponentenfelder f , A_μ und D reell sind und $\bar{\chi} = \bar{\xi}$, $N = M^*$, $\zeta = \lambda$. Man kann Vektorsuperfelder aus chiralen Superfeldern konstruieren. Ist $i\Lambda$ ein chirales Superfeld, dann genügt auch $(i\Lambda - i\Lambda^\dagger) = V$ der Bedingung $V^\dagger = V$. Auf den Vektorsuperfeldern kann eine verallgemeinerte supersymmetrische Eichtransformation definiert werden

$$V \rightarrow V + i\Lambda - i\Lambda^\dagger . \quad (2.55)$$

Der Name als Eichtransformation ist gerechtfertigt, da das Komponentenfeld $A_\mu(x)$ von V genauso transformiert wie unter einer klassischen Eichtransformation $A_\mu \rightarrow A_\mu - 2\partial_\mu \Im \phi$. Wie im Falle gewöhnlicher Vektorfelder ist die Eichinvarianz notwendig, um die überzähligen Komponenten von den physikalischen zu trennen. Durch Verwendung der Wess–Zumino-Eichung werden zusätzlich die Felder f , $\bar{\xi}$, M eliminiert und man findet die Darstellung

$$V(z) = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) . \quad (2.56)$$

Die Felder $\lambda(x)$ und $\bar{\lambda}(x)$ können als Superpartner zum reellwertigen Feld $A_\mu(x)$ angesehen werden, wobei $D(x)$ wiederum ein Hilfsfeld darstellt.

Mit chiralen Superfeldern und Vektorsuperfeldern können Lagrangedichten supersymmetrischer Eichtheorien konstruiert werden.

2.3.3 Lagrangedichte supersymmetrischer Eichtheorien

Um eine Lagrangedichte zu konstruieren, die bis auf eine Viererdivergenz invariant unter Supersymmetrietransformation ist, macht man sich die Tatsache zu nutze, dass sich die jeweils höchste Komponente eines Superfeldes unter Supersymmetrietransformation in eine totale Ableitung transformiert, und dass Produkte von Superfeldern ebenfalls Superfelder sind. Eine allgemeine, renormierbare, supersymmetrische, lorentzinvariante Lagrangedichte, die nur links-chirale Superfelder Φ_i enthalten soll, ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \Phi_i^\dagger \Phi_i + \int d^2\theta \left(\mathcal{W}(\Phi_i) + \text{h. c.} \right) , \quad (2.57)$$

$$\mathcal{W}(\Phi_i) = a_i \Phi_i + \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3!} f_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k . \quad (2.58)$$

Die Funktion $\mathcal{W}(\Phi_i)$ bezeichnet man als Superpotential. Diese Lagrangedichte inkorporiert jedoch keine supersymmetrische nicht-abelsche Eichtransformation. Im Hinblick auf kinetische Terme für die Eichfelder führt man die supersymmetrische

Feldstärke ein.

$$W_A = -\frac{1}{4}\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}}e^{-V}\mathcal{D}_Ae^V, \quad W_A = 2gW_A^aT^a, \quad (2.59)$$

$$\bar{W}^{\dot{A}} = -\frac{1}{4}\mathcal{D}\mathcal{D}e^V\bar{\mathcal{D}}^{\dot{A}}e^{-V}, \quad \bar{W}^{\dot{A}} = 2g\bar{W}^{\dot{A}a}T^a, \quad (2.60)$$

wobei die T^a Generatoren der nicht-abelschen Eichgruppe sind. Wie sich zeigen lässt, sind auch diese Felder chirale Superfelder, das heißt sie genügen (2.52). Somit formen auch diese irreduzible Darstellungen der Supersymmetrie, jedoch mit Spinorindizes A und \dot{A} . Aus gruppentheoretischen Überlegungen erkennt man, dass dies gerade der zweit niedrigst-dimensionalen irreduziblen Darstellung der Super-Poincaré-Algebra entspricht [30].

Eine supersymmetrische Eichtransformation für eine nicht-abelsche Eichgruppe ist definiert durch

$$\Phi \rightarrow \exp(-i\Lambda(z))\Phi, \quad \bar{\mathcal{D}}^{\dot{A}}\Lambda^a(z)T^a = 0, \quad (2.61)$$

$$\Phi^\dagger \rightarrow \Phi^\dagger \exp(+i\Lambda^\dagger(z)), \quad \mathcal{D}_A\Lambda^{a\dagger}(z)T^a = 0, \quad (2.62)$$

wobei $\Lambda(z) \equiv 2g\Lambda^a(z)T^a$ und $\Lambda^a(z)$ eine komplexe chirale Superfunktion ist. Führt man Vektorsuperfelder $V^a(z)$ ein, die unter der Wirkung der Eichtransformation zu

$$e^V \rightarrow e^{-i\Lambda^\dagger}e^Ve^{i\Lambda}, \quad V \equiv 2gV^aT^a, \quad (2.63)$$

$$e^{-V} \rightarrow e^{-i\Lambda}e^{-V}e^{i\Lambda^\dagger} \quad (2.64)$$

übergehen, dann ist der Term $(\Phi^\dagger\Phi)$ nicht länger eichinvariant und wird ersetzt durch $(\Phi^\dagger e^V\Phi)$. Mit Hilfe von (2.63) und (2.64) erkennt man das Transformationsverhalten der chiralen Feldstärkesuperfelder

$$W_A \rightarrow e^{-i\Lambda}W_Ae^{i\Lambda}, \quad \bar{W}^{\dot{A}} \rightarrow e^{-i\Lambda^\dagger}\bar{W}^{\dot{A}}e^{i\Lambda^\dagger}. \quad (2.65)$$

Daraus schlussfolgert man, dass $\text{Tr}[W^AW_A]$ und $\text{Tr}[\bar{W}_{\dot{A}}\bar{W}^{\dot{A}}]$ eichinvariante Terme sind. Letztendlich kann folgende supersymmetrische eichinvariante Lagrangedichte angegeben werden

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{16g^2S_r} \int d^2\theta \text{Tr} [W^AW_A + \bar{W}_{\dot{A}}\bar{W}^{\dot{A}}] + \int d^4\theta \Phi_i^\dagger (e^V)_{ij} \Phi_j \\ & + \int d^2\theta (\mathcal{W}(\Phi_i) + \text{h. c.}), \end{aligned} \quad (2.66)$$

wobei das Superpotential eichinvariant sein muss. Die Konstante S_r ist der Dynkin-Index einer Darstellung r der Generatoren T^a der Eichgruppe

$$\text{Tr}(T^aT^b) = S_r\delta^{ab}. \quad (2.67)$$

Nach einer längeren Rechnung [31, 28, 29] erhält man die Komponentendarstellung

für (2.66)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\xi_i \sigma_\mu \Delta_{ij}^{\dagger\mu} \bar{\xi}_j + \left(\Delta_{ij}^\mu \phi_j \right)^\dagger \left(\Delta_{\mu ik} \phi_k \right) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + i\lambda^a \sigma^\mu \Delta_\mu \bar{\lambda}^a \\ & - \sqrt{2}g \left(\bar{\lambda}^a \bar{\xi}_i T_{ij}^a \phi_j + \text{h. c.} \right) - V(\phi_i, \phi_j^*) - \left[\frac{1}{2} \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 \mathcal{W}(\Phi)}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j} \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} + \text{h. c.} \right], \end{aligned} \quad (2.68)$$

wobei die eichkovariante Ableitung und das skalare Potential gegeben sind durch

$$\Delta_{ij}^\mu = \delta_{ij} \partial^\mu + ig A_a^\mu T_{ij}^a \quad (2.69)$$

$$V(\phi_i, \phi_j^*) = F_i F_j^* + \frac{1}{2} D^a D^a. \quad (2.70)$$

In der Lagrangedichte (2.68) wurde die Wess–Zumino-Eichung für das Vektorsuperfeld verwendet. Selbst in dieser Eichung treten noch unphysikalische Freiheitsgrade auf. Insbesondere enthält die Lagrangedichte keine kinetischen Terme für F_i und D^a . Diese können durch einsetzen ihrer Bewegungsgleichung $\partial \mathcal{L} / \partial D^a = \partial \mathcal{L} / \partial F_i = \partial \mathcal{L} / \partial F_i^* = 0$ eliminiert werden. Durch diese Einsetzung ergibt sich

$$F_i = - \frac{\partial \mathcal{W}^\dagger}{\partial \Phi_i^\dagger} \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0}, \quad D^a = -g \phi_i^\dagger T_{ij}^a \phi_j. \quad (2.71)$$

Der Lagrangian (2.68) ist auf Grund der verwendeten Eichung weder invariant unter den von (2.47) erzeugten Supersymmetrie-Transformationen

$$\delta_S V = \sigma_{AA}^\mu \bar{\theta}^{\dot{A}} A_\mu(x) + \dots, \quad (2.72)$$

noch unter den Eichtransformationen (2.61)–(2.64)

$$\delta_{\text{Eich}} V = (i\Lambda - i\Lambda^\dagger) + \dots, \quad (2.73)$$

da diese Transformationen aus der Wess–Zumino-Eichung herausführen. Die Lagrangedichte kann nur noch invariant bezüglich der gewöhnlichen Eichtransformation (2.9) und (2.10) sein, die einem Superfeld

$$\Lambda = A - i\theta \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu A - \frac{1}{4} \quad (2.74)$$

mit $A - A^\dagger = 0$ und $\alpha = A + A^\dagger$ entsprechen. Des Weiteren müssen die Erzeugenden der Supersymmetrie-Transformation abgeändert werden

$$Q_A^{\text{WZ}} = Q_A + \delta_{\text{Eich}}, \quad \bar{Q}_{\dot{A}}^{\text{WZ}} = \bar{Q}_{\dot{A}} + \delta_{\text{Eich}}, \quad (2.75)$$

so dass die Lagrangedichte invariant unter der Kombination aus Supersymmetrie- und Eichtransformation ist. Mit diesen neuen Erzeugenden ändert sich die Supersymmetriealgebra. Die genaue Form der Kommutatoren kann [32] entnommen werden.

Verwendet man zur Quantisierung der in (2.68) enthaltenen Eichbosonen die ge-

wöhnliche Eichfixierung (2.21), so bricht dies die Supersymmetrie, denn in (2.21) sind nur die Eichbosonen enthaltenen, nicht aber deren Superpartner. Die zur Quantisierung verwendete Lagrangedichte ist daher nicht supersymmetrisch.

2.3.4 Renormierbarkeit

Es hat sich herausgestellt, sofern Eichinvarianz und Supersymmetrie separat betrachtet werden, dass die Renormierung nicht vollständig durchführbar ist [33, 34]. Der Aspekt der engen Verknüpfung zwischen Eichtransformation und Supersymmetrie, wie er sich in einer modifizierten Supersymmetrie-Algebra manifestiert, muss sich bei den Symmetrieforderungen an die quantisierte Form einer supersymmetrischen Eichtheorie in Wess–Zumino-Eichung geeignet übertragen lassen. Batalin und Vilkovisky hatten die Idee [35, 36, 37] auch höhere Potenzen der externen Quellen Y_i , an der nicht-lineare BRST-Transformationen gekoppelt sind, in der Lagrangedichte zu zulassen. Damit war es möglich supersymmetrische Quantentheorien zu definieren und deren multiplikative Renormierbarkeit zu beweisen [32, 38].

Um eine Definition einer supersymmetrischen Eichtheorie in Wess–Zumino-Eichung anzugeben, werden Eich- und Supersymmetrietransformation, sowie Translation in einer BRST-Transformation zusammengefasst. Damit ist garantiert, dass Supersymmetrie und Eichinvarianz simultan behandelt werden. Diese Methode schreibt jedoch vor, dass die Transformationsparameter durch entsprechende Geister ersetzt werden. Damit werden der Faddeev–Popov-Geist, ein Supersymmetrie-Geist als auch ein Translationsgeist in die Theorie eingeführt. Da die Supersymmetrie als globale Symmetrie angesetzt wurde, besitzt weder der Supersymmetrie-Geist noch der Translationsgeist eine Ortsabhängigkeit. Die Form der BRST-Transformation für eine allgemeine supersymmetrische Lagrangedichte in Komponentenfeldschreibweise ist in [39] aufgelistet.

Wir entnehmen [39] definierende Bedingungen für eine supersymmetrische Quantentheorie, die sich folgendermaßen zusammenfassen lassen

1. *Slavnov-Taylor Identität*

$$S(\Gamma) = 0 \tag{2.76}$$

Diese Gleichung vereinigt Invarianz unter Eichtransformation, Supersymmetrie und Translationsinvarianz

2. *Eichfixierungsbedingung*

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta B_a} = \partial_\mu A_a^\mu + \xi B_a \tag{2.77}$$

Wie in Abschnitt 2.2.2 angedeutet kann diese Forderung auf Quantenniveau erhoben werden.

3. *Translations-Geistgleichung*

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\omega^\mu} = \int d^4x (-1)^{GP} Y_i^\dagger i\partial_\mu\phi_i \quad (2.78)$$

4. *Ward-Identität für R-Symmetrie*

$$\mathcal{W}\Gamma = 0 \quad (2.79)$$

Des Weiteren soll Γ invariant unter diskreten Symmetrietransformationen sein.

Sanfte Brechung der Supersymmetrie

In Abschnitt 2.3.2 haben wir erwähnt, dass sich alle irreduzible Darstellungen der Super-Poincaré-Algebra mit Hilfe der Methode der Casimir-Operatoren klassifizieren lassen. In unserer verwendeten Graduierung aus Abschnitt 2.3.1 ist $P^\mu P_\mu$ ein Casimir-Operator. Das bedeutet, dass zu jedem Elementarteilchen ein Superpartner mit gleicher Masse existieren müsste. Aus den Resultaten von entsprechenden Messungen von Teilchenspektren, konnte diese Tatsache nicht verifiziert werden. Man schlussfolgert, dass exakte Supersymmetrie in der Natur nicht gelten kann. Dieser experimentellen Beobachtung kann Rechnung getragen werden, indem man der Lagrangedichte explizit Supersymmetrie brechende Terme $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ hinzufügt,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{susy}} + \mathcal{L}_{\text{soft}} , \quad (2.80)$$

die überdies sogar die Eigenschaft besitzen sollen, dass keine quadratische Divergenzen in Schleifenkorrekturen zu produzieren – daher werden sie auch als „sanfte Brechungsterme“ bezeichnet. Eine notwendige Bedingung für die Abstinenz quadratischer Divergenzen in Schleifenkorrekturen, ist dass die Dimension eines jeden Feldes in $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ kleiner als vier ist. Girardello und Grisaru [40] gaben an, welche Terme die notwendige Bedingung erfüllen und zu keinen quadratischen Divergenzen führen. Die allgemeine Form einer Supersymmetrie brechenden, aber eichinvarianten Lagrangedichte, die zu (2.68) addiert werden kann, enthält folgende Terme

- Massenterme für Skalarfelder

$$-\phi_i^*(m^2)_{ij}\phi_j \quad (2.81)$$

- Polynome dritten Grades in den Skalarfeldern

$$\frac{1}{3!}\mathcal{A}_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k - \frac{1}{2}\mathcal{B}_{ij}\phi_i\phi_j + \mathcal{C}_i\phi_i + \text{h. c.} \quad (2.82)$$

- Massenterme für die Gauginos λ^a

$$-\frac{1}{2}M\bar{\lambda}^a P_L \tilde{\lambda}^a + \text{h. c.} \quad (2.83)$$

Hierbei bezeichnet ϕ die skalare Feldkomponente des chiralen Superfeldes Φ und $\tilde{\lambda}^a$ sind vierkomponentige Majoranaspinoren als Repräsentant eines Gauginofeldes.

Renormierbarkeit und sanfte Brechung

In [39] wurde ein Zugang gewählt, der die Eigenschaft ausnutzt, dass sich die Girardello-Grisaru-Terme als Wechselwirkungsterme mit einem externen, dimensionslosen Spurionfeld η schreiben lassen. Dieses Spurionfeld besitzt einen endlichen Vakuumerwartungswert in der F -Komponente

$$\eta(y, \theta) = a(y) + \sqrt{2}\theta\chi(y) + \theta\theta\hat{f}(y) , \quad (2.84)$$

$$\hat{f}(y) = f(y) + f_0 . \quad (2.85)$$

Mit diesem Superfeld η können die Girardello-Grisaru-Terme im Superraum wie folgt geschrieben werden

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{soft}} = & \int d^4\theta \bar{\eta}\eta\Phi_i^\dagger(m^2)_{ij}(e^V)_{jk}\Phi_k \\ & + \left[\int d^2\theta \eta \left(\frac{1}{6}\mathcal{A}_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k - \frac{1}{2}\mathcal{B}_{ij}\Phi_i\Phi_j + \mathcal{C}_i\Phi_i \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2}MW^{aA}W_{aA} \right) + \text{h. c.} \right] \end{aligned} \quad (2.86)$$

Wenn sich η wie ein chirales Multipllett transformiert ist $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ supersymmetrisch und das beschriebene Verfahren zur Renormierung kann angewendet werden. Wird η jedoch ersetzt durch

$$\eta \rightarrow \theta\theta f_0 , \quad (2.87)$$

dann bricht $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ die Supersymmetrie sanft. In [39] wurde vermerkt, dass die genaue Charakterisierung der Girardello-Grisaru-Terme durch die Eigenschaft der möglichen Kopplung an das Spurion η ersetzt werden kann. Dem sehr technischen Spurionmechanismus (2.86), wird durch den Niederenergie-Limes dynamischer Symmetriebrechung physikalische Bedeutung verliehen. Die Schwierigkeit in der Vorgehensweise unter Benutzung des Spurionformalismus liegt darin, dass dieser zu unendlich vielen freien Parametern in der Lagrangedichte führt, die im Prinzip alle renormiert werden müssten. Es konnte jedoch gezeigt werden [39], dass nur endlich viele, nämlich genau die supersymmetrischen Parameter und die Parameter der sanften Brechung, physikalisch relevant sind.

Wird die sanfte Supersymmetriebrechung durch ein Spurion-Supermultiplett vermittelt, so muss die Liste zur Definition einer supersymmetrischen Eichtheorie aus Abschnitt 2.3.4 noch um einen Punkt erweitert werden

5. Physikalischer Anteil des Modells

$$\Gamma|_{a=\chi=f=0} \quad (2.88)$$

Dies komplettiert die Definition einer supersymmetrischen Theorie in der Wess-Zumino-Eichung mit sanfter Supersymmetriebrechung und deren Renormierbarkeit konnte bewiesen werden [32, 39]. Insbesondere ist eine explizite Definition des MSSM im Sinne der oben angeführten Punkte in [41] gegeben.

3 Regularisierung supersymmetrischer Eichtheorien

3.1 Gegenwärtiger Status

Das in der Störungstheorie gebräuchlichste Regularisierungsverfahren ist die dimensionale Regularisierung [42]. Jedoch wurde gezeigt [43, 44], dass die dimensionale Regularisierung die Supersymmetrie explizit bricht. Eine modifizierte Form der dimensionalen Regularisierung ist die dimensionale Reduktion [43], welche im Hinblick auf Erhaltung der Supersymmetrie der aussichtsreichste Kandidat zu sein scheint. Eine ideale Regularisierung wäre solch eine Regularisierung, deren Renormierung nur durch Feld- und Parametertransformation auskommt und keine Symmetrie restaurierende Counterterme benötigt. Für supersymmetrische Eichtheorien ist keine konsistente Regularisierung mit dieser Eigenschaft bekannt. Zunächst mussten supersymmetrische Slavnov–Taylor Identitäten für physikalisch relevante Modelle formuliert werden, das heißt nur durch Symmetrie- und Normierungsbedingungen, sowie Bewegungsgleichungen für Felder, um auf alle notwendigen Counterterme eines Modells zu schließen. Für allgemeine supersymmetrische Yang–Mills-Theorien ist dies in [32, 45] geschehen. Insbesondere wurden für die SQED in [46] und in [41] für das phänomenologisch wichtige Minimale Supersymmetrische Standardmodell Slavnov–Taylor-Identitäten dargelegt. Jedoch wurden mögliche Verletzungen der Slavnov–Taylor-Identitäten und deren Restauration nicht gänzlich untersucht, sondern nur besonders wichtige Spezialfälle. In [47] wurden etwa supersymmetrische Ward-Identitäten, welche unterschiedliche Selbstenergien in Beziehung zu einander setzen, untersucht und gezeigt, dass trotz vorherrschenden mathematischer Inkonsistenzen der dimensionaler Reduktion, diese nicht zur einer Brechung führen können. Dass auch die Supersymmetrietransformationen Schleifenkorrekturen besitzen und in Symmetrieidentitäten einbezogen werden müssen wurde jedoch hierbei nicht berücksichtigt. So wurden in [46] supersymmetrische Slavnov–Taylor-Identitäten der SQED untersucht, und entsprechendes für die SQCD mit sanfter Brechung in [48]. In [48] wurden die Symmetrie restaurierenden Counterterme für alle Eich- und Gauginowechselwirkungen berechnet. Hierbei stellte sich heraus, dass die Anwesenheit von sanften Brechungstermen keinen Einfluss auf die Bestimmung der entsprechenden Counterterme hat. Spielt jedoch die sanfte Supersymmetriebrechung eine außerordentlich wichtige Rolle, etwa in der Massendifferenz für das Elektron und seinem supersymmetrischen Partner, dem Selektron, so konnte in [49] auch hier eine Respektierung der entsprechenden Slavnov–Taylor-

Identität in dimensionaler Reduktion, nicht aber in dimensionaler Regularisierung nachgewiesen werden. Des Weiteren wurden in [50, 51, 52] Abschätzungen vorgenommen, ab welcher Schleifenordnung dimensionale Reduktion prinzipiell Probleme bereiten könnte.

Trotz einiger noch ausstehenden Überprüfungen von supersymmetrischen Slavnov–Taylor-Identitäten, geben die oben beschriebenen zahlreichen Prüfungen Anlass zu behaupten, dass die dimensionale Reduktion die Supersymmetrie zumindest auf Einschleifenniveau respektiert, die Inkonsistenzen sich hier also nicht bemerkbar machen. Somit ist der Fokus der folgenden Rechnungen auf dimensionale Regularisierung und deren modifizierten Form, der dimensionalen Reduktion, gerichtet. Aus diesem Grund wollen wir hier die wichtigsten Eigenschaften und Unterschiede dieser Schemata kurz zusammenfassen.

3.2 Dimensionale Regularisierung und dimensionale Reduktion

Dimensionale Regularisierung wurde von von ‘t Hooft und Veltman entwickelt [42]. Allen dimensional Schemata ist gemeinsam, dass die Impulsintegrale in den Schleifenkorrekturen nicht als 4-dimensionale, sondern als d -dimensionale Integrale aufgefasst werden

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow \mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \quad (3.1)$$

wobei μ ein beliebiger Massenparameter ist, der bewirkt, dass die Massendimension des Integrals erhalten bleibt. Da in den Feynman-Regeln auch γ^μ und γ^5 auftauchen, müssen auch deren Definitionen auf d -Dimension verallgemeinert werden.

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1} , \quad (3.2)$$

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 , \quad (3.3)$$

$$\gamma_5^2 = \mathbf{1} . \quad (3.4)$$

Wie [53] zu entnehmen ist, kann der d -dimensionale Raum nur formal als ein endlicher Vektorraum verstanden werden. Die genaue Konstruktion zeigt, dass ein formales d -dimensionales Integral für Funktionen $f(p^2, pq_1, \dots, pq_n)$ existiert, bei denen die zugrunde liegenden Vektoren $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)$ Elemente eines unendlich dimensional Vektorraumes sind. Die Metrik des Vektorraumes sei definiert als

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots \quad (3.5)$$

Die Eigenschaften eines d -dimensionalen Integrals spiegeln sich in der Skalierbarkeit und der Normierbarkeit wider

$$\int d^d p f(sp) = s^{-d} \int d^d p f(p) , \quad \int d^d p e^{-p^2/2} = \pi^{d/2} . \quad (3.6)$$

Der kontravariante metrische Tensor $g^{\mu\nu}$ wird in üblicher Weise auf diesem unendlich dimensionalen Vektorraum definiert, das heißt $g^{\mu\nu} = 1$ für $\mu = \nu$, und 0 sonst. Naiv würde man diese Definition auch auf $g_{\mu\nu}$ übertragen, nur würde dann $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \infty$ gelten und dies entspricht nicht dem Verhalten eines formalen d -dimensionalen Raumes. Deswegen ist die richtige Definition für den kovarianten metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu}a^{\mu\nu} = \frac{d\Gamma(d/2)}{\pi^{d/2}} \int d^d p p_\mu p_\nu a^{\mu\nu} \delta(p^2 - 1). \quad (3.7)$$

Mit dieser Definition erhält man gerade das formal d -dimensionale Resultat $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = d$. Weitere Eigenschaften des d -dimensionalen Integrales und seiner expliziten Konstruktion sind [53] zu entnehmen. Der große Vorteil des d -dimensionalen Integrals ist, dass man auftretende Divergenzen isoliert und parametrisiert hat, das heißt Schleifenintegrale sind als meromorphe Funktionen in d aufzufassen, mit d als beliebige komplexe Zahl. Die Divergenzen eines Schleifenintegrals manifestieren sich demnach als Singularitäten in der komplexen d -Ebene.

Dimensionale Regularisierung erhält Eichsymmetrien, bricht aber Supersymmetrie. Denn in der regularisierten Theorie stimmen bosonischer und fermionische Freiheitsgrade nicht länger überein und Supersymmetrie ist damit gebrochen.

Als Ausweg bietet sich dimensionale Reduktion an. Im Gegensatz zu dimensionaler Regularisierung werden nicht alle Objekte von 4 nach $d = D$, sondern lediglich die Impulse fortgesetzt. Vektorfelder, γ -Matrizen und ϵ -Tensoren werden als 4-dimensional behandelt. Man fordert, dass die Beziehung

$$\not{p}\not{p} = \frac{1}{2}p_\mu p_\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = p_\mu p_\nu g^{\mu\nu} = p^2 \quad (3.8)$$

insbesondere für D -dimensionale Impulse gilt, um so zu garantieren, dass $(\not{p}+m)/(\not{p}-m^2)$ stets das Inverse zu $(\not{p}-m)$ ist. Damit ist die Interpretation des 4-dimensionalen Raumes als quasi-vierdimensionaler Raum gewiesen. Denn auf dem D -dimensionalen Raum ist der metrische Tensor $\hat{g}^{\mu\nu}$ definiert, im 4-dimensionalen Raum der entsprechende metrische Tensor $g^{\mu\nu}$ und aus (3.8) liest man ab, dass gelten muss

$$g^{\mu\nu}\hat{g}_\nu^\rho = \hat{g}^{\mu\rho}. \quad (3.9)$$

Der D -dimensionale Raum ist in dem quasi-vierdimensionalen Raum enthalten.

Das Impulsintegral ist in dimensionaler Regularisierung und dimensionaler Reduktion gleich. Jedoch wird in dimensionaler Reduktion das d -dimensionale Integral zweimal definiert, einmal für $d = D$ und einmal für $d = \epsilon = 4 - D$. Damit hat man zwei unendlich dimensionale Vektorräume QDS und Q ϵ S und zwei metrische Tensoren $\tilde{g}^{\mu\nu}$ und $\hat{g}^{\mu\nu}$ mit $\hat{g}_{\mu\nu}\hat{g}^{\mu\nu} = D$, $\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu} = \epsilon$. Das D -dimensionale Integral des ersteren dieser beiden Vektorräume bildet das Impulsintegral, das Integral in ϵ -dimensionen hat nur den Sinn $\tilde{g}^{\mu\nu}$ zu definieren.

Hiermit lässt sich der quasi-vierdimensionale Vektorraum Q4S konstruieren als

$$\text{Q4S} = \text{QDS} \oplus \text{Q}\epsilon\text{S} \quad (3.10)$$

mit metrischem Tensor

$$g^{\mu\nu} = \hat{g}^{\mu\nu} + \tilde{g}^{\mu\nu} . \quad (3.11)$$

Zur Konstruktion der γ -Matrizen in einem unendlich dimensionalen Vektorraum sei im Fall von dimensionaler Regularisierung auf [53] und für die dimensionale Reduktion auf [54] verwiesen.

Mit diesen Definitionen lassen sich nun kompakt folgende Rechenregeln angeben

$$g^{\mu\nu} = \hat{g}^{\mu\nu} + \tilde{g}^{\mu\nu} , \quad g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4 , \quad (3.12)$$

$$g^{\mu\nu} \hat{g}_\nu^\rho = \hat{g}^{\mu\rho} , \quad \hat{g}^{\mu\nu} \hat{g}_{\mu\nu} = D , \quad (3.13)$$

$$g^{\mu\nu} \tilde{g}_\nu^\rho = \tilde{g}^{\mu\rho} , \quad \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{g}_{\mu\nu} = \epsilon = 4 - D , \quad (3.14)$$

$$\hat{g}^{\mu\nu} \tilde{g}_\nu^\rho = 0 . \quad (3.15)$$

In eigentlichen Rechnungen nimmt man die Natur des unendlich-dimensionalen Vektorraumes nicht wahr. Die einzige praktische Konsequenz dieser Tatsache ist, dass nun die Lorentz-Indizes ihren Charakter der 4-dimensionalen Raumzeit verloren haben. Als Merkregel gilt, dass in praktischen Rechnungen niemals die explizite Darstellung einer Ortsableitung beziehungsweise eines Impulses oder eines Vektorfeldes maßgeblich ist, sondern nur algebraische Relationen, wie in (3.12)–(3.15) angegeben, von Bedeutung sind. Somit muss man in Rechnungen stets zwischen 4- und D -dimensionalen Indizes unterscheiden und kann die Umformungen der Dirac-Matrizen im Zähler des Integrals in 4 Dimensionen behandeln [47], denn in Q4S erfüllen die γ -Matrizen die Dirac-Algebra (3.2).

Auf mathematische Inkonsistenzen, die bei der dimensionalen Regularisierung mit antikommutierenden γ_5 entstehen und der dimensionalen Reduktion im Allgemeinen soll hier nicht eingegangen werden und wir verweisen auf entsprechende Arbeiten [43, 20, 52, 54].

3.3 Bestimmung restaurierender Counterterme

Um Symmetrie restaurierende Counterterme zu bestimmen stehen vielerlei Möglichkeiten zur Verfügung [55, 56, 57, 47, 46, 48]. So können etwa Slavnov–Taylor-Identitäten der Form

$$0 \stackrel{!}{=} \left. \frac{\delta S(\Gamma)}{\delta\phi_{k_1} \cdots \delta\phi_{k_N}} \right|_{\phi=0} \quad (3.16)$$

abgeleitet werden und die hier auftretenden Vertexfunktionen sind in dem jeweiligen Regularisierungsschema zu berechnen. Normalerweise sind diese Slavnov–Taylor-Identitäten nicht erfüllt, solange man nicht die richtigen restaurierenden Counterterme hinzugenommen hat. Im Allgemeinen setzt (3.16) 1PI Vertexfunktionen der Form

$$\Gamma_{\mathcal{M}Y_{\phi_i}}, \Gamma_{\tilde{\mathcal{M}}\phi_i}, \frac{\delta \int d^4x s\phi'_i}{\delta\mathcal{M}} \Gamma_{\mathcal{M}\phi_i} . \quad (3.17)$$

zueinander in Beziehung. Hierbei sind \mathcal{M} Feldmonome, die neutral bezüglich allen Quantenzahlen sind und keine diskreten Symmetrien verletzen. Der Ausdruck $\delta\mathcal{M}$ deutet daraufhin, dass nach allen im Feldmonom enthaltenen Feldern abgeleitet werden soll. Des Weiteren bezeichnet ϕ'_i Felder mit linearen Transformationseigenschaften. Gleichung (3.16) ist in Einschleifenordnung ein linearer Ausdruck sowohl in Einschleifen-Feynmanintegralen, als auch in den Einschleifen-Countertermen. Eine Bestimmungsgleichung für die Einschleifen-Counterterme erhält man, indem man $S(\Gamma) = 0$ ausschreibt in

$$s_{\Gamma_{\text{cl}}}\Gamma_{\text{ct}}^{(1)} = -S(\Gamma_{\text{reg}}^{(1)}) = -\Delta^{(1)} . \quad (3.18)$$

Bildet man hiervon die Ableitung $\delta^N/(\delta\phi_{k_1} \cdots \delta\phi_{k_N})$, so ist das Ergebnis äquivalent zu (3.16) zu betrachten

$$\left. \frac{\delta s_{\Gamma_{\text{cl}}}\Gamma_{\text{ct}}^{(1)}}{\delta\phi_{k_1} \cdots \delta\phi_{k_N}} \right|_{\phi=0} = - \left. \frac{\delta\Delta^{(1)}}{\delta\phi_{k_1} \cdots \delta\phi_{k_N}} \right|_{\phi=0} . \quad (3.19)$$

Diese Identität legt Relationen zwischen den nicht-symmetrischen Countertermen fest. Jedoch lassen sich jene Counterterme hieraus nicht einzeln ablesen, da diese nur in Kombination bestimmt sind. Allerdings lässt sich ein Gleichungssystem für die nicht-symmetrischen Counterterme in erster Ordnung gewinnen, indem man alle Symmetrieidentitäten ableitet, die sich aus (3.16) gewinnen lassen. Zunächst muss daher eine Basis Δ_j für die möglichen Brechungsterme gewonnen werden

$$\Delta^{(1)} = \sum_j a_j \Delta_j . \quad (3.20)$$

Diese Basis besteht im Ortsraum aus integrierten Monomen der Felder und ihrer Ableitungen. Wir hatten oben festgestellt, dass sich die Brechung $\Delta^{(1)}$ in Abwesenheit von Anomalien als Wirkung des linearisierten Slavnov–Taylor-Operators schreiben lassen muss

$$\Delta^{(1)} = s_{\Gamma_{\text{cl}}}(\hat{\Delta}^{(1)}) . \quad (3.21)$$

Der Ausdruck $\hat{\Delta}^{(1)}$ muss die gleichen Symmetrien wie die klassische Lagrangedichte haben. Hat man alle erlaubten Basiselemente gefunden, so ist es entscheidend ein Gleichungssystem zu finden, welches es gestattet, alle nicht-symmetrischen Counterterme eindeutig festzulegen. Wir verweisen zur Identifikation eindeutiger Festlegungen nicht-symmetrischer Counterterme und einer entsprechenden Auswahl der Basiselemente Δ_j auf [58, 49].

Wir befinden uns in einer komfortablen Lage und nehmen an, dass die dimensionale Reduktion zu keinen Verletzungen der Slavnov–Taylor-Identitäten auf Einschleifen-Niveau führt

$$S(\Gamma_{\text{DRed}}^{(0)} + \Gamma_{\text{DRed}}^{(1)} + \Gamma_{\text{ct,sym}}^{(1)}) = 0 . \quad (3.22)$$

In dimensionaler Regularisierung ist sie im Allgemeinen jedoch verletzt und es bedarf daher eines Symmetrie restaurierenden Countertermanteils in der Wirkung Γ

$$S(\Gamma_{\text{DReg}}^{(0)} + \Gamma_{\text{DReg}}^{(1)} + \tilde{\Gamma}_{\text{ct,sym}}^{(1)} + \Gamma_{\text{ct,restore}}^{(1)}) = 0. \quad (3.23)$$

Die nicht-symmetrischen Counterterme sind bis auf symmetrische eindeutig bestimmt

$$\Gamma_{\text{ct,sym}} \rightarrow \Gamma_{\text{ct,sym}} + \Gamma'_{\text{ct,sym}}, \quad \Gamma_{\text{ct,restore}} \rightarrow \Gamma_{\text{ct,restore}} - \Gamma'_{\text{ct,sym}}. \quad (3.24)$$

Demnach nach ist die Aufspaltung des Countertermanteils in symmetrische und nicht-symmetrische Counterterme nicht eindeutig. Eine eindeutige Wahl der Aufspaltung kann durch die Bedingung getroffen werden, dass der Symmetrie restaurierende Counterterm $\Gamma_{\text{ct,restore}}$ zu keinen Vertexfunktionen beiträgt, an die man Normierungsbedingungen stellt [49]. Als Beispiel sei die Normierungsbedingung der Elektronenmasse genannt $\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}(p^2 = m_e^2) = 0$, die dann gleichermaßen für die Symmetrie restaurierenden Counterterme gelten $\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}\text{ct,restore}}(p^2 = m_e^2) = 0$.

Setzt man jedoch die endlichen Anteile der symmetrischen Counterterme gleich $\Gamma_{\text{ct,sym}}^{(1)} = \tilde{\Gamma}_{\text{ct,sym}}^{(1)}$, so wird nicht nur die Supersymmetrie restauriert, sondern die regulierte Wirkung ist in beiden Regularisierungsschemata gleich. Es ist Grundforderung der Arbeit, dass gilt

$$\Gamma_{\text{DRed}}^{(0)} + \Gamma_{\text{DRed}}^{(1)} + \Gamma_{\text{ct,sym}}^{(1)} = \Gamma_{\text{DReg}}^{(0)} + \Gamma_{\text{DReg}}^{(1)} + \Gamma_{\text{ct,sym}}^{(1)} + \Gamma_{\text{ct,trans}}^{(1)}. \quad (3.25)$$

Es wurde die Notation $\Gamma_{\text{ct,trans}}^{(1)}$ des Übergangscountertermanteils eingeführt, um diesen von dem oben definierten Supersymmetrie restaurierenden Countertermanteil $\Gamma_{\text{ct,restore}}^{(1)}$ abzugrenzen. Denn im allgemeinen werden sich 2-Punkt-Greensfunktionen in den beiden Regularisierungen unterscheiden, deren Differenz insbesondere durch $\Gamma_{\text{ct,trans}}^{(1)}$ kompensiert wird. Für diese gilt in einer kompakten Notation

$$\Gamma_{\text{DRed}}^{(\leq 1)} = \Gamma_{\text{DReg}}^{(\leq 1)} + \Gamma_{\text{ct,trans}}^{(1)}. \quad (3.26)$$

Durch eine veränderte Notation sollen die Countertermanteile der linken und rechten Seite von (3.25) bezüglich der Regularisierung gekennzeichnet werden. Da sich der volle Countertermanteil $\Gamma_{\text{ct}}^{(n)}$ stets als eine Summe von symmetrischen und nicht-symmetrischen Countertermanteilen schreiben lässt, deutet die Notation $\Gamma_{\text{ct}}^{(1),\text{DRed}}$ daraufhin, dass dieser Countertermanteil der Einschleifenordnung gleich seinem symmetrischen ist und keiner weiteren Addition eines restaurierenden Countertermanteils bedarf. Im Gegensatz hierzu steht die Notation $\Gamma_{\text{ct}}^{(1),\text{DReg}}$ des vollen Countertermanteils in dimensionaler Regularisierung auf Einschleifen-Niveau, welcher insbesondere nicht-symmetrische Anteile enthält. Besteht der Wunsch oder der Zwang in dimensionaler Regularisierung zu rechnen, jedoch ein Normierungsschema zu verwenden, welches die endlichen Anteile der symmetrischen Einschleifen-Counterterme in dimensionaler Reduktion festlegt (etwa Absorbieren der Divergenzen durch minimale Subtraktion $\overline{\text{DR}}$), so muss gerade der Unterschied $\Gamma_{\text{DRed}}^{(\leq 1)} - \Gamma_{\text{DReg}}^{(\leq 1)}$ zu dem symmetrischen Countertermanteil der dimensional Reduktion addiert werden, um den vollen Counter-

termanteil der dimensionalen Regularisierung zu erhalten. Denn aus (3.25) lässt sich mit der oben erklärten Notation schlussfolgern

$$\Gamma_{\text{DRed}}^{(\leq 1)} + \Gamma_{\text{ct}}^{(1),\text{DRed}} = \Gamma_{\text{DReg}}^{(\leq 1)} + \Gamma_{\text{ct}}^{(1),\text{DReg}}. \quad (3.27)$$

Daraus folgt die Bestimmung von $\Gamma_{\text{ct}}^{(1),\text{DReg}}$, welches garantiert, die Differenz zwischen der regularisierten Wirkung in den beiden Regularisierungen zu kompensieren und Supersymmetrie zu restaurieren. Diese Aussage hat natürlich nur so lange Bestand, wie wir unsere Annahme über Supersymmetrieerhaltung der dimensional Reduktion auf Einschleifenniveau verteidigen können, das heißt, dass der Counterterm der dimensional Reduktion wirklich nur aus einem symmetrischen Anteil besteht. Durch Ableiten nach Feldern der Theorie in (3.27) setzt man 1PI Vertexfunktionen zwischen den beiden Regularisierungen in Beziehung

$$\frac{\delta^N \Gamma_{\text{DRed}}^{(\leq 1)}}{\delta \phi_{k_1} \cdots \delta \phi_{k_N}} + \frac{\delta^N \Gamma_{\text{ct}}^{(1),\text{DRed}}}{\delta \phi_{k_1} \cdots \delta \phi_{k_N}} = \frac{\delta^N \Gamma_{\text{DReg}}^{(\leq 1)}}{\delta \phi_{k_1} \cdots \delta \phi_{k_N}} + \frac{\delta^N \Gamma_{\text{ct}}^{(1),\text{DReg}}}{\delta \phi_{k_1} \cdots \delta \phi_{k_N}}. \quad (3.28)$$

Eine äquivalente Formulierung der Übersetzung zwischen dimensionaler Reduktion und dimensionaler Regularisierung lässt sich mit Hilfe von [59] gewinnen. In dimensionaler Reduktion ist der D -dimensionale Raum QDS in dem 4-dimensionalen Raum Q4S enthalten. Da Eichfelder in dimensionaler Reduktion in Q4S leben, gibt dies Anlass zu einer Zerlegung D - und $(4 - D)$ -dimensionale Anteile

$$G_\mu^a = V_\mu^a + S_\mu^a, \quad V_\mu^a = \hat{g}^{\mu\nu} G_\nu^a, \quad S_\mu^a = \tilde{g}^{\mu\nu} G_\nu^a. \quad (3.29)$$

Die D -dimensionalen Anteile V_μ^a verhalten sich wie Vektorfelder, die $(4 - D)$ -dimensionalen Anteile S_μ^a verhalten sich wie skalare Felder. Das heißt die eigentlichen Eichwechselwirkungen werden nur mit V_μ^a erzeugt, denn man bedenke, dass Impulse beziehungsweise Ortsableitungen in dimensionaler Reduktion ausschließlich D -dimensional sind. Somit führen die S_μ^a , auch ϵ -Skalare genannt, zu neue Wechselwirkungen gegenüber der dimensional Regularisierung. Mit den ϵ -Skalaren hat man einen neuen Freiheitsgrad in die Theorie eingeführt, der in der dimensionaler Regularisierung nicht existiert. Man kann daher den Standpunkt einer effektiven Feldtheorie einnehmen und wird erwarten, dass Umrechnungen zwischen den Parametern der beiden Theorien existieren. Betrachtet man Observablen einer Theorie, so dürfen diese natürlich nicht von der Berechnungsvorschrift einer Greensfunktion abhängen. Darum ist die Forderung gerechtfertigt, dass die renormierten 1PI Vertexfunktionen gleich sein müssen

$$\frac{\delta^N \Gamma_{\text{ren}}^{(\leq 1),\text{DRed}}}{\delta \phi_{k_1} \cdots \delta \phi_{k_N}} \stackrel{!}{=} \frac{\delta^N \Gamma_{\text{ren}}^{(\leq 1),\text{DReg}}}{\delta \phi_{k_1} \cdots \delta \phi_{k_N}}. \quad (3.30)$$

Durch diese Bedingung werden die jeweiligen Parameter in Beziehung gesetzt, sofern die endlichen Anteile der Counterterme der beiden Regularisierungen auf Grund von Normierungsbedingungen fixiert wurden. Denn schreibt man die Relation (3.30)

weiter aus so erhält man

$$\left. \frac{\delta^N \Gamma_{\text{DRed}}^{(\leq 1)}}{\delta\phi_{k_1} \cdots \delta\phi_{k_N}} + \frac{\delta^N \Gamma_{\text{ct}}^{(1)}}{\delta\phi_{k_1} \cdots \delta\phi_{k_N}} \right|_{\text{fixed}} \stackrel{!}{=} \left. \frac{\delta^N \Gamma_{\text{DReg}}^{(\leq 1)}}{\delta\phi_{k_1} \cdots \delta\phi_{k_N}} + \frac{\delta^N \Gamma_{\text{ct}}^{(1)}}{\delta\phi_{k_1} \cdots \delta\phi_{k_N}} \right|_{\text{fixed}} . \quad (3.31)$$

Der Bedingung (3.31) entnimmt man, dass durch die gleiche Wahl der fixierten Counterterme eine Übersetzungsmöglichkeit zwischen den nun regularisierungsabhängigen Parametern und Massen der Theorie gegeben ist. Dies entspricht in etwa dem Resultat einer effektiven Theorie, auch wenn hier kein Hoch- oder Niederenergielimes existiert, dafür aber ein Unterschied in den Freiheitsgraden der beiden Regularisierungsschemata. Diese Parameter und Massen sind in Baumgraphenniveau gleich, unterscheiden sich aber in $\mathcal{O}(\hbar)$.

In den beiden Fällen, in denen einerseits die Counterterme (3.25) und andererseits die Parameter und Massen (3.31) die volle Regularisierungsabhängigkeit tragen, sind die Anteile, die zur Übersetzung zwischen den beiden Regularisierungen bzw. Renormierungsverfahren notwendig sind, durch $\Gamma_{\text{DRed}}^{(\leq 1)} - \Gamma_{\text{DReg}}^{(\leq 1)}$ gegeben. Somit sind die beiden Methoden als äquivalent zu betrachten. Jedoch liegt die Regularisierungsabhängigkeit im letzten Fall bei den Parametern, deren Strahlungskorrekturen insbesondere im Supersymmetrie respektierenden Normierungsschema $\overline{\text{DR}}$ und dem Supersymmetrie brechenden Normierungsschema $\overline{\text{MS}}$ zu unterschiedlichen Ergebnissen führen können. Wir werden im Folgenden der Arbeit von [59] folgen, werden jedoch deren Diskussion unter dem Aspekt der Bedingung aus (3.28) folgen und fordern somit nicht die Gleichheit von physikalischen S -Matrixelementen, welche in beiden Regularisierungen berechnet werden, sondern die Gleichheit von den unphysikalischen 1PI Vertexfunktionen in beiden Regularisierungen. Des Weiteren tragen bei uns etwaige Counterterme wie der Feld-, Parameter- und Massenrenormierung die volle Regularisierungsabhängigkeit. Die Anteile, welche die Übersetzung zwischen den Countertermen der Kopplungen und Parameter vermitteln sind jedoch die gleichen wie in [59]. Über diese Anteile kann man aussagen, dass bei Verwendung von dimensionaler Reduktion oder dimensionaler Regularisierung diese in Einschleifenordnung stets endlich sind. Eine mögliche Erklärung dieser Tatsache, greift noch einmal das Quantenwirkungsprinzip auf. Wie bereits erwähnt wurde in [20] gezeigt, dass das Quantenwirkungsprinzip auch für die dimensionale Regularisierung existiert. So kann man [20] entnehmen, dass sich eine allgemeine Brechung der Slavnov–Taylor-Identität als

$$\Delta = \left[\int d^D x \delta \mathcal{L}_{\text{cl+ct}} \right] \cdot \Gamma \quad (3.32)$$

schreiben lässt, mit $\int d^D x \delta \mathcal{L}_{\text{cl+ct}}$ als Variation der klassischen Wirkung und der Counterterme unter der jeweiligen Symmetrietransformation in D Dimensionen. Ist die klassische Lagrangedichte \mathcal{L}_{cl} für $D = 4$ invariant unter einer Symmetrietransformation, so gilt

$$\delta \mathcal{L}_{\text{cl}} = \mathcal{O}(D - 4, \tilde{g}^{\mu\nu}) + \mathcal{O}(\hbar) , \quad (3.33)$$

wobei $\tilde{g}^{\mu\nu}$ für $D = 4$ verschwindet. In Einschleifenordnung können Feynmandiagramme genau eine Einsetzung von $\delta\mathcal{L}_{\text{cl}}$ enthalten. Da die regularisierten Einschleifendiagramme höchstens Divergenzen der Ordnung $1/(D - 4)$ liefern, kann die rechte Seite von (3.33) damit in der Ordnung \hbar keine Divergenzen für $D \rightarrow 4$ enthalten. Ist des Weiteren die klassische Wirkung invariant unter Anwendung eines Ward- oder Slavnov–Taylor-Operators, gilt also

$$\mathcal{W}\Gamma_{\text{cl}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad S(\Gamma_{\text{cl}}) = 0, \quad (3.34)$$

dann sind auch die divergenten Beiträge in Einschleifenordnung invariant unter Anwendung derselben Operatoren

$$\mathcal{W}\Gamma_{\text{div}}^{(1)} = 0 \quad \text{bzw.} \quad S(\Gamma_{\text{cl}} + \Gamma_{\text{div}}^{(1)}) = 0 + \mathcal{O}(\hbar^2). \quad (3.35)$$

Um die Divergenzen zu absorbieren, reichen daher symmetrische Counterterme aus und nicht-symmetrische Counterterme sind in Einschleifenordnung immer endlich. Gleiches gilt dann auch für die Übergangscouterterme, da diese nur endliche Anteile von den symmetrischen Countertermen aufnehmen.

4 Supersymmetrie restaurierende Counterterme in allgemeiner $N = 1$ Yang–Mills-Supersymmetrie

Dieses Kapitel orientiert sich an [59] und es wird das prinzipielle Vorgehen dargelegt, wie sich ein Übergangscounterterm auf Einschleifenniveau in einer supersymmetrischen $N = 1$ Yang–Mills-Theorie mit sanfter Brechung bestimmen lässt. Weisendes Kriterium zur Bestimmung der Übersetzungscounterterme von Feldnormierung, Massen oder Kopplungen wird die Erkenntnis aus (3.28) sein. Hierbei wurde der volle Counterterm der dimensional Regularisierung zu dem symmetrischen und alleinigen Counterterm der dimensional Reduktion um einen endlichen Anteil in Beziehung gesetzt.

4.1 Vorbemerkungen

Wir betrachten eine $N = 1$ supersymmetrische Eichtheorie, deren definierende Lagrangedichte in (2.68) angegeben ist. Die chiralen Superfelder Φ_i enthalten einen komplexen Skalar ϕ_i und einen zweikomponentigen Spinor ψ_i und transformieren sich unter einer Darstellung r einer Eichgruppe G . Das Superpotential soll in unserem Fall durch

$$W = \frac{1}{6} Y^{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \quad (4.1)$$

gegeben sein, mit der Eigenschaft $Y^{ijk} = (Y_{ijk})^*$.

Um eine realistische Theorie zu betrachten, muss die Supersymmetrie explizit gebrochen werden. Dies geschieht hier durch Hinzufügen sanfter Brechungsterme zu der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{soft}} \sim \frac{1}{2} m_\lambda \lambda^a \lambda^a + \text{h. c.} \quad (4.2)$$

Die anderen möglichen Brechungsterme aus (2.81)–(2.83) werden sich als nicht relevant für unsere Rechnung herausstellen.

In den Rechnungen wird stets zwischen einer einfachen Eichgruppe und einer Eichgruppe als direktes Produkt unterschieden werden. Ist T_{ij}^a eine Darstellungsmatrix

der Eichgruppe G , so bezeichnet

$$T^a T^a = C(r) \mathbf{1} \quad (4.3)$$

eine Invariante der Darstellung r . Für eine $SU(N)$ -Gruppe gilt im Fall einer fundamentalen Darstellung $r = N$

$$C(N) = \frac{N^2 - 1}{2N} . \quad (4.4)$$

In der adjungierten Darstellung $r = G$ gilt für den gleichen Fall einer $SU(N)$ -Gruppe

$$C(G) = N \quad (4.5)$$

mit $(T^a)^{bc} = -if^{abc}$. Die gesamte Lagrangedichte einer exemplarischen $N = 1$ Supersymmetrie wie der SQCD, und die daraus resultieren Feynmanregeln sind in [48, 29] dokumentiert und werden hier nicht reproduziert. Es sei hervorgehoben, dass wir an dieser Stelle noch keine Linearkombinationen von Zuständen zu sogenannten *Masseneigenzuständen* vornehmen werden. Daher betrachten wir hier den unrotierten Fall einer Lagrangedichte und werden im speziellen Fall des Minimalen Supersymmetrischen Standardmodells spontane Symmetriebrechung inkooperieren und Masseneigenzustände einführen, welche zu einer Diagonalisierung der Massenmatrizen führen. Es sei darauf hingewiesen, dass wir in all unseren Rechnungen $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ vorausgesetzt haben, da die damit verbundene mathematische Inkonsistenz in unseren Rechnungen keine Rolle spielt. Eine widerspruchsfreie Definition von γ^5 in D Dimensionen kann in [20] nachgeschlagen werden.

Wir wollen bereits das Ergebnis der Unabhängigkeit vom Eichfixierungsparameter der endlichen Unterschiede zwischen den regularisierten 1PI Vertexfunktionen vorwegnehmen. Der allgemeine Feynmanpropagator des Vektorbosons für beliebige Werte des Eichparameters ξ im Impulsraum lautet¹

$$D_{\text{F}}^{\mu\nu}(k) = \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} + \frac{\xi - 1}{\xi} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 + i\epsilon)} . \quad (4.8)$$

Impulse werden in beiden Regularisierungen nach D -Dimensionen fortgesetzt werden, daher kann dies insbesondere für Diagramme mit nur einem Propagator eines Vektorbosons, nicht Quelle eines Unterschiedes zwischen regularisierten 1PI Vertexfunktionen sein, sondern viel mehr der Anteil proportional zum metrischen Tensor. Auch für Diagramme mit zwei Eichbosonpropagatoren hat sich keine Abhängigkeit von der Eichfixierung für die Regularisierungsunterschiede aufgezeigt. Deshalb haben wir, der Übersichtlichkeit wegen, den Propagator des Eichbosons in seiner einfachsten Form,

¹Die Herleitung von (4.8) aus der definierenden Gleichung im Ortsraum

$$iD_{\text{F}}^{\mu\nu}(x - y) := \langle 0 | T (A^\mu(x) A^\nu(y)) | 0 \rangle , \quad (4.6)$$

$$(\square g^\mu{}_\nu + (\xi - 1) \partial^\mu \partial^\nu) D_{\text{F}}^{\nu\rho}(x - y) = g^{\mu\rho} \delta^4(x - y) \quad (4.7)$$

ist sehr schwierig und kann in [8] nachgeschlagen werden.

der Feynmanzeichnung ($\xi = 1$), angegeben, in der ausschließlich der metrische Tensor enthalten ist.

4.2 Übersetzungen zwischen Einschleifencountertermen

In diesem Abschnitt sollen die Übersetzungen zwischen den Countertermen der dimensional Regularisierung und dimensionaler Reduktion auf Grundlage von (3.28) bestimmt werden. Die so bestimmten Counterterme restaurieren einerseits die Supersymmetrie und andererseits besitzen diese weitere endliche Anteile um die Gleichheit der regularisierten 1PI Vertexfunktionen zu garantieren. Wie bereits erwähnt wollen wir die Counterterme der Felder und Parameter mit diesen Eigenschaften als *Übergangscounterterme* bezeichnen, wobei dies zusätzlich an dem jeweiligen Countertermen hervorgehoben wird, etwa δZ^{trans} .

Ist der Parameter c eine Kopplung zwischen den Feldern f_i, f_j, \dots, f_k , d.h. $\mathcal{L}_c = cf_i f_j \dots f_k$, so hängt der Counterterm dieser Kopplung in dimensionaler Regularisierung im Allgemeinen von dem mit der Kopplung c assoziierten Feldgehalt ab. Wir wollen dies durch folgende Indexabhängigkeit i, j, \dots, k verdeutlichen

$$\delta Z_{c_{ij\dots k}}^{\text{DReg}} c = \delta c_{ij\dots k}, \quad c = \mathcal{O}(\hbar^0) \quad (4.9)$$

Somit gilt für $\delta Z_{c_{ij\dots k}}^{\text{trans}}$

$$\delta Z_{c_{ij\dots k}}^{\text{trans}} = \delta Z_{c_{ij\dots k}}^{\text{DReg}} - \delta Z_c^{\text{DRed}}, \quad (4.10)$$

Die Abhängigkeit des Counterterms der Kopplung vom Feldgehalt stellt einen Unterschied zu der normalen Parametertransformation einer multiplikativen Renormierung (1.57) dar. Man bezeichnet daher Counterterme mit dieser Eigenschaft als nicht-symmetrische Counterterme oder Symmetrie restaurierende, da sie nicht durch normale Parametertransformation einer multiplikativen Renormierung entstehen. Für $\delta Z_f^{\text{trans}}$ eines Feldes f gilt

$$\delta Z_f^{\text{trans}} = \delta Z_f^{\text{DReg}} - \delta Z_f^{\text{DRed}}, \quad (4.11)$$

wobei $\frac{1}{2}\delta Z_f f = \delta f$. Der endliche Counterterm $\frac{1}{2}\delta Z_f$ des Feldes f ist in jedem betreffenden Anteil der Lagrangedichte gleich. Man bezeichnet ihn daher auch als einen symmetrischen Counterterm. Jeder Counterterm $\delta Z_{c/f}$ ist stets von der Ordnung $\mathcal{O}(\hbar)$. Auch wenn die Counterterme $\delta Z_{c/f}$ unterschiedlicher Natur sind, werden wir stets eine einheitliche Notation $\delta Z_{c/f}^{\text{trans}}$ verwenden, da beide Countertermtypen gleichermaßen die Gleichheit der regularisierten 1PI Vertexfunktionen gewährleisten. Es ist zu betonen, dass keine Counterterme der Feldrenormierung benötigt werden um Supersymmetrie zu restaurieren, sondern ausschließlich Counterterme der Parameter der Theorie. Wie Abschnitt 3.3 herausgearbeitet, liegt das an der Eindeutigkeit der Symmetrie restaurierenden Counterterme bis auf symmetrische.

Die Angabe der Counterterme $\delta Z_{c/f}^{\text{trans}}$ ist in dieser Arbeit stets so zu verstehen, dass diese aus der dimensionalen Regularisierung heraus zu einem Supersymmetrie respektierenden Normierungsschema wie dem $\overline{\text{DR}}$ -Schema vermitteln. Das heißt obwohl man eine Vertexfunktion in Einschleifenordnung mittels dimensionaler Regularisierung dargestellt hat, kann man trotzdem das $\overline{\text{DR}}$ -Schema verwenden, man muss nur die entsprechenden Übergangscounterterme hinzunehmen.

4.2.1 Selbstenergie des Gauginos

In Einschleifenordnung existiert nur ein Diagramm, welches eine regularisierungsabhängige Strahlungskorrektur zur Selbstenergie des Gauginos liefert. Auf Grundlage des allgemeinen Lagrangians einer supersymmetrischen Eichtheorie (2.68), welcher in zweikomponentigen Weyl-Spinoren ausgedrückt wurde, lassen sich Feynmanregeln für vierkomponentige Diracspinoren oder, im konkreten Fall des Gauginos, eines Majoranaspinors herleiten [29], sofern man den im Allgemeinen komplexen Brechungsparameter m aus (4.2) als reell definiert. Man kann diese Bedingung fallen lassen und entweder argumentieren, dass dessen komplexe Phase durch einen Majoranaspinor absorbiert wird oder explizit in zweikomponentigen Weyl-Spinoren rechnen. Hierzu müsste man die Matrix Γ_{ij} in

$$\mathcal{L}|_{\lambda\bar{\lambda}} = (\lambda \quad \bar{\lambda})_i \Gamma_{ij} \begin{pmatrix} \lambda \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix}_j \quad \text{mit} \quad \Gamma_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}m & \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu \\ -\frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu & -\frac{1}{2}m^* \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

invertieren, um die freien 2-Punkt-Greensfunktionen zu erhalten.² Wir wollen auf das Rechnen mit zweikomponentigen Spinoren verzichten und nehmen stattdessen an, dass die komplexe Phase in dem Majoranaspinor $\tilde{\lambda}$ absorbiert wurde. Das Anwenden der Feynmanregeln führt auf das analytische Äquivalent des regularisierungsabhängigen Diagrammes

$$i\Gamma_{\tilde{\lambda}^a\tilde{\lambda}^b}^{(1),\text{RS-dep.}}(p, -p) = \text{Diagramm} \quad (4.14a)$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[(-gf^{mna}\gamma_\alpha) \left(\frac{i\delta^{nn'}}{(\not{p} + \not{k} - m)} \right) \right. \\ \left. \times (-gf^{m'bn'}\gamma_\beta) \left(\frac{-ig^{\alpha\beta}\delta^{mm'}}{k^2} \right) \right]. \quad (4.14b)$$

²Den Ausdruck $\Gamma^{(0)}$ hatten wir in (1.46) mit der klassischen Wirkung identifizieren können. Für die freie 1PI Vertexfunktion $\Gamma_0^{(2)}(x_1, x_2)$ aus (1.45) gilt

$$\Gamma_0^{(2)}(x_1, x_2) = G_0^{(2)-1}(x_1, x_2), \quad (4.13)$$

wobei freie 2-Punkt-Greensfunktion $G_0^{(2)}(x_1, x_2)$ aus (1.20) ist.

Unter Verwendung der Dirac-Algebra und der üblichen Identifikation mit skalaren Standardintegralen (siehe Abschnitt A.1) ergibt sich

$$\begin{aligned} i\Gamma_{\tilde{\lambda}^a \tilde{\lambda}^b}^{(1)}(p, -p) &= \frac{-ig^2 \delta^{ab} C(G)}{16\pi^2} \\ &\times \left[(2 - D^*) \left(\frac{1}{2} B_0(p, 0, m) - \frac{1}{2p^2} A_0(m) + \frac{m^2}{2p^2} B_0(p, 0, m) \right) \not{p} \right. \\ &\quad \left. + D^* B_0(p, 0, m) m \mathbf{1}_{4 \times 4} \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Die Rechenregeln aus (3.12)–(3.15) bestimmen D^* in dimensionaler Regularisierung so, dass es durch $D = (4 - \epsilon)$ zu ersetzen ist. Dies führt zusammen mit der parametrisierten Divergenz $\Delta \sim (2/\epsilon + \text{finite})$, welche in den skalaren Integralen enthalten ist, zu den Unterschieden zwischen den regularisierten Integralen, da in dimensionaler Reduktion $D^* = 4$ gilt. Mit der Zerlegung einer lorentzinvarianten Kopplung zwischen zwei vierkomponentigen Diracspinoren nach Kovarianten und dem Ergebnis der regularisierungsabhängigen Strahlungskorrektur (4.15), resultiert aus (3.28) für den Einschleifen-Counterterm der Feldrenormierung des Gauginos $\delta Z_\lambda^{(1), \text{DReg}}$ in dimensionaler Regularisierung

$$\frac{\partial}{\partial \not{p}} \Gamma_{\tilde{\lambda}^a \tilde{\lambda}^b}^{(1), \text{DRed}}(p, -p) + \delta^{ab} \delta Z_\lambda^{\text{DRed}} = \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Gamma_{\tilde{\lambda}^a \tilde{\lambda}^b}^{(1), \text{DReg}}(p, -p) + \delta^{ab} \delta Z_\lambda^{\text{DReg}} \quad (4.16)$$

$$\Rightarrow \delta Z_\lambda^{\text{DReg}} = \delta Z_\lambda^{\text{DRed}} + \frac{g^2}{16\pi^2} C(G). \quad (4.17)$$

Im weiteren Verlauf werden wir den expliziten Index der Einschleifencounterterme $\delta Z^{(1)}$ fallen lassen und sie mit δZ identifizieren, sofern dies zu keinen Uneindeutigkeiten führt. Mit der Festlegung (4.17) lässt sich die Umrechnung für den Massencounterterm δZ_m des Gauginos gewinnen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial (m \mathbf{1}_{4 \times 4})} \Gamma_{\tilde{\lambda}^a \tilde{\lambda}^b}^{(1), \text{DRed}}(p, -p) - \delta^{ab} \left(\delta Z_\lambda^{\text{DRed}} - \delta Z_{m_\lambda}^{\text{DRed}} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial (m \mathbf{1}_{4 \times 4})} \Gamma_{\tilde{\lambda}^a \tilde{\lambda}^b}^{(1), \text{DReg}}(p, -p) - \delta^{ab} \left(\delta Z_\lambda^{\text{DReg}} - \delta Z_{m_\lambda}^{\text{DReg}} \right), \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\Rightarrow \delta Z_{m_\lambda}^{\text{DReg}} = \delta Z_{m_\lambda}^{\text{DRed}} + \frac{g^2}{16\pi^2} C(G). \quad (4.19)$$

Selbstenergie des chiralen Fermions

Ähnlich lässt sich mit der regularisierungsabhängigen Selbstenergie des chiralen Fermions verfahren. Das regularisierte Austauschdiagramm mit einem Vektorboson führt zu unterschiedlichen Ergebnissen in den beiden Regularisierungsschemata und für den

Differenz zwischen den beiden regularisierten 1PI Vertexfunktionen

$$\begin{aligned} i\Gamma_{V_a^\mu V_b^\nu}^{(1),\text{DRed}}(p, -p) - i\Gamma_{V_a^\mu V_b^\nu}^{(1),\text{DReg}}(p, -p) &= -\frac{i\delta^{ab}C(G)}{32\pi^2}\epsilon \\ &\times \left[-2p_\mu p_\nu B_0(p^2, 0, 0) - 8B_{\mu\nu}(p, 0, 0) \right. \\ &\quad \left. - 4(p_\mu B_\nu(p, 0, 0) + p_\nu B_\mu(p, 0, 0)) \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{3}\frac{i}{16\pi^2}C(G)\delta^{ab} \left[p^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \right] \\ &+ \mathcal{O}(\epsilon) . \end{aligned} \quad (4.26)$$

Der Counterterm der Feldrenormierung des Eichbosons δZ_V^{DReg} in dimensionaler Regularisierung ist bestimmt durch (3.28)

$$\Gamma_{V_a^\mu V_b^\nu}^{(1),\text{DRed}} - (p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)\delta^{ab}\delta Z_V^{\text{DRed}} = \Gamma_{V_a^\mu V_b^\nu}^{(1),\text{DReg}} - (p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)\delta^{ab}\delta Z_V^{\text{DReg}} . \quad (4.27)$$

Einsetzen des Ergebnisses aus (4.26) liefert

$$\delta Z_V^{\text{DReg}} = \delta Z_V^{\text{DRed}} + \frac{g^2}{48\pi^2}C(G) . \quad (4.28)$$

Es existiert kein Übergangscounterterm des Eichfixierungsparameters, da der Unterschied der Eichbosonselfenergie zwischen den beiden Regularisierungen sich nur in dem transversalen Anteil manifestiert.

Vertexkorrekturen zur Gauginokopplung

Um den Übergangscounterterm der Eichkopplungen zu gewinnen, muss ein entscheidender Unterschied zwischen der Eichkopplung g^0 , die im Zusammenhang mit der Wechselwirkung von Eichbosonen auftritt, und der im Folgenden als *Gauginokopplung* bezeichnete Kopplung \hat{g}^0 getroffen werden. Letztere ist dadurch ausgezeichnet, dass kein Vektorboson als partizipierendes Feld in dem jeweiligen Wechselwirkungsanteil der Gauginokopplung vertreten ist, sondern viel mehr durch die Yukawawechselwirkung zwischen dem Gaugino und seinen chiralen Superpartnern definiert ist

$$\mathcal{L}_{\hat{g}} = -\sqrt{2}g \left(\bar{\lambda}^a \bar{\psi}_i T_{ij}^a \phi_j + \text{h. c.} \right) . \quad (4.29)$$

Die Eichinvarianz erzwingt die Gleichheit der nackten Eichkopplungen g^0 in jedem Ausdruck des Lagrangians und die zusätzliche supersymmetrische Invarianz garantiert, dass $\hat{g}^0 = g^0$ gilt. Die dimensionale Reduktion ist so beschaffen, dass sie die Supersymmetrie erhält. Jedoch verletzt die dimensionale Regularisierung die Gleichheit der bosonischen und fermionischen Freiheitsgrade und man kann somit erwarten, dass die Strahlungskorrekturen der dimensionalen Regularisierung zu unterschiedlichen Ergebnissen der Counterterme der Eichkopplung g und der Gauginokopplung \hat{g} füh-

Vertexkorrekturen zur Eichkopplung

Wie bereits oben erwähnt sichert die Eichinvarianz der nackten Lagrangedichte die Gleichbehandlung der nackten Eichkopplung g^0 und daraus resultierend ist für jeden mit diesem Kopplungsparameter assoziierten Vertex der gleiche Counterterm δZ_g^{DReg} (insbesondere in dimensionaler Regularisierung) zu verwenden. Diese Eigenschaft zieht nach sich, dass eine beliebige Eichwechselwirkung herangezogen werden kann, um festzustellen wie deren regularisierungsabhängige Strahlungskorrekturen den Counterterm der Eichkopplung δZ_g^{DReg} in dimensionaler Regularisierung festlegen. Hierfür haben wir die Kopplung zwischen zwei chiralen Fermionen und einem Eichboson ausgewählt und erhalten zwei Strahlungskorrekturen die zu unterschiedlichen Beiträgen in den beiden Regularisierungsschemata führen

$$i\Gamma_{V_a^\mu \Psi_j \bar{\Psi}_i}^{(1), \text{RS-dep.}} = \underbrace{\text{Diagram 1}}_{i\Gamma_{V_a^\mu \Psi_j \bar{\Psi}_i}^{d_1}} + \underbrace{\text{Diagram 2}}_{i\Gamma_{V_a^\mu \Psi_j \bar{\Psi}_i}^{d_2}} . \quad (4.35)$$

Betrachten wir zunächst das Diagramm $i\Gamma_{V_a^\mu \Psi_j \bar{\Psi}_i}^{d_1}$, so ergibt sich für dieses

$$i\Gamma_{V_a^\mu \Psi_j \bar{\Psi}_i}^{d_1} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[(-ig\gamma_\nu P_L T_{ik}^b) \left(\frac{i\delta_{kk'}}{(k + \not{q})} \right) (-ig\gamma_\mu P_L T_{k'l'}^a) \left(\frac{i\delta_{l'l'}}{(k + \not{p})} \right) \right. \\ \left. \times (-ig\gamma_{\nu'} P_L T_{l'j}^{b'}) \left(\frac{-ig^{\nu\nu'} \delta_{bb'}}{(k^2 - \lambda^2)} \right) \right]. \quad (4.36)$$

Hierbei wurde eine Regulatormasse λ für das Eichboson eingeführt, da für die Bestimmung der UV-Divergenz-Counterterme der infrarote Limes keinerlei Bedeutung hat. In 4-Dimensionen zerfällt $\Gamma_{V_a^\mu \Psi_j \bar{\Psi}_i}^{d_1}$ in einen D -dimensionalen und einen ϵ -dimensionalen Anteil

$$\Gamma_{V_a^\mu \Psi_j \bar{\Psi}_i}^{d_1} = \hat{\Gamma}_{V_a^\mu \Psi_j \bar{\Psi}_i}^{d_1} \hat{\gamma}_\mu P_L + \tilde{\Gamma}_{V_a^\mu \Psi_j \bar{\Psi}_i}^{d_1} \tilde{\gamma}_\mu P_L . \quad (4.37)$$

Der notwendige endliche Anteil zur Restaurierung des Vertex $\Gamma_{V_a^\mu \Psi_j \bar{\Psi}_i}^{(1)}$ kann nur dem D -dimensionalen Anteil entspringen. Für diesen gilt mit Hilfe der Identität $T^b T^a T^b = [C(r) - 1/2C(G)]T^a$ und der üblichen Anwendung der Dirac-Algebra

$$i\hat{\Gamma}_{V_a^\mu \Psi_j \bar{\Psi}_i}^{d_1} = \frac{i}{16\pi^2} g^3 \left(\frac{1}{2} C(G) - C(r) \right) T_{ij} \left(\frac{(D^* - 2)(D - 2)}{D} \right) B_0(0, 0, \lambda) \\ + \text{UV-finite} . \quad (4.38)$$

eine analoge Feynmanregel zur Ankopplung an das Vektorboson hergeleitet werden. Auf den Spinor Ψ_{jB} wirkt die Darstellung $(T_{(j)}^a)_{B'B}$ der Gruppengeneratoren mit den freien Multipllettindizes B des j -ten Spinors Ψ_j . In diesem Sinne ist auch die Indexvergabe der anderen Felder zu verstehen. Das analytische Äquivalent zu obigem Feynmangraphen ist

$$i\Gamma_{\phi_{kC}\Psi_{jB}\bar{\Psi}_{iA}}^{(1),\text{RS-dep}} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[(-ig(-\gamma^\mu P_R)(T_{(i)}^{a*})_{AD}) \left(\frac{i\delta_{DD'}}{(\not{p} + \not{k})} \right) (-iY^{ijk} d_{CD'E'} P_L) \right. \\ \left. \times \left(\frac{i\delta_{E'E}}{(\not{p}' + \not{k})} \right) (-ig\gamma_\nu P_L (T_{(j)}^a)_{EB}) \left(\frac{-ig^{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)} \right) \right] \quad (4.45a)$$

$$= \frac{i}{16\pi^2} g^2 Y^{ijk} \left((T_{(i)}^a)_{A'A} (d_{CA'B'}) (T_{(j)}^a)_{B'B} \right) D^* B_0(0, 0, \lambda) \quad (4.45b)$$

Der Tensor d_{ABC} soll die Eigenschaft haben, dass er die Eichinvarianz des Yukawakopplungsanteils in der Lagrangedichte $d_{ABC} Y^{ijk} \psi_i^A \psi_j^B \phi_k^C$ garantiert. Aus dieser Forderung folgt, dass

$$(T_{(i)}^a)_{A'A} (d_{CA'B'}) (T_{(j)}^a)_{B'B} = \frac{1}{2} d_{ABC} (C(r_i) + C(r_j) - C(r_k)) \quad (4.46)$$

gilt. Diese Eigenschaft ist relativ leicht einzusehen. Denn die Eichinvarianz des Yukawakopplungsanteils gilt genau dann wenn

$$d_{ABC} \left[(T_{(i)}^a)_{AA'} \psi_{A'}^i \psi_B^j \phi_C^k + \psi_A^i (T_{(j)}^a)_{BB'} \psi_{B'}^j \phi_C^k + \psi_A^i \psi_B^j (T_{(k)}^a)_{CC'} \phi_{C'}^k \right] \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.47)$$

Diese Bedingung erhält man aus der Betrachtung einer infinitesimalen Eichtransformation in erster Ordnung der Eichkopplungskonstanten wirkend auf den Yukawakopplungsanteil in der Lagrangedichte. Aus (4.46) folgt als nicht-triviale Forderung

$$(T_{(i)}^a)_{A'A} d_{A'BC} + (T_{(j)}^a)_{B'B} d_{AB'C} + (T_{(k)}^a)_{C'C} d_{ABC'} \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.48)$$

Multipliziert man diese Gleichung jeweils mit $(T_{(i)}^a)_{AD}$, $(T_{(j)}^a)_{BD}$ und $(T_{(k)}^a)_{CD}$ und nutzt die Relation (4.3) so gelangt man zu einem Gleichungssystem. Dieses ist nach der linken Seite von (4.46) aufzulösen und man erhält die gewünschte Identität. Die bestimmende Gleichung des Counterterms der Yukawakopplung $\delta Z_{Y_{ijk}}^{\text{DReg}}$ in dimensionaler Regularisierung lautet

$$\Gamma_{\phi_{kC}\Psi_{jB}\bar{\Psi}_{iA}}^{(1),\text{DRed}} + \Gamma_{\phi_{kC}\Psi_{jB}\bar{\Psi}_{iA}}^{(0)} \left(\delta Z_{Y_{ijk}}^{\text{DRed}} + \frac{\delta Z_{\psi_i}^{\text{DRed}}}{2} + \frac{\delta Z_{\psi_j}^{\text{DRed}}}{2} + \frac{\delta Z_{\phi_k}^{\text{DRed}}}{2} \right) \\ = \Gamma_{\phi_{kC}\Psi_{jB}\bar{\Psi}_{iA}}^{(1),\text{DReg}} + \Gamma_{\phi_{kC}\Psi_{jB}\bar{\Psi}_{iA}}^{(0)} \left(\delta Z_{Y_{ijk}}^{\text{DReg}} + \frac{\delta Z_{\psi_i}^{\text{DReg}}}{2} + \frac{\delta Z_{\psi_j}^{\text{DReg}}}{2} + \frac{\delta Z_{\phi_k}^{\text{DReg}}}{2} \right). \quad (4.49)$$

Anwenden von (4.22) beziehungsweise (4.23) führt zu dem Ergebnis

$$\delta Z_{Y_{ijk}}^{\text{DReg}} = \delta Z_{Y_{ijk}}^{\text{DRed}} + \frac{g^2}{32\pi^2} (C(r_i) + C(r_j) - 2C(r_k)), \quad (4.50)$$

$$\delta Z_{Y_{ijk}}^{\text{DReg}} = \delta Z_{Y_{ijk}}^{\text{DRed}} + \frac{1}{32\pi^2} \left(\sum_c g_c^2 C_c(r_i) - \sum_d g_d^2 C_d(r_j) - 2 \sum_e g_e^2 C_e(r_k) \right). \quad (4.51)$$

Man beachte, dass der Counterterm der Yukawakopplung $\delta Z_{Y_{ijk}}^{\text{DRed}}$ in dimensionaler Reduktion total symmetrisch ist, jedoch wird diese Eigenschaft durch Strahlenkorrekturen in dimensionaler Regularisierung aufgehoben und der Counterterm wirkt sensitiv auf die wechselwirkenden chiralen Fermionen und den Skalar in der Yukawakopplung Y^{ijk} . Der so gewonnene nicht-symmetrische Counterterm $\delta Z_{Y_{ijk}}^{\text{DReg}}$ der dimensionalen Regularisierung beinhaltet auch den Spezialfall einer eichinvarianten, supersymmetrischen Masse eines Fermions, deren Ursprung in einem quadratischen Term im Superpotential aus (2.58) liegt. Das Ergebnis lässt sich aus (4.50) beziehungsweise (4.51) ableiten, indem das skalare Feld als ein Hilfsfeld angesehen wird mit $C(r_k) = 0$ beziehungsweise $C_e(r_k) = 0$ gesetzt wird.

Vertexkorrekturen zur Quartischen Kopplung

In einer $N = 1$ Supersymmetrie ist die skalare quartische Wechselwirkung

$$\mathcal{L}_{\text{quartic}} = -\frac{1}{4} \lambda_{ij}{}^{kl} \phi^{*i} \phi^{*j} \phi_k \phi_l \quad (4.52)$$

ausschließlich durch durch Yukawa- und Eichkopplungen bestimmt. In einer Supersymmetrie respektierenden Regularisierungsschema ergibt sich der Counterterm aus dem nackten Parameter, indem eine Parametertransformation auf die klassischen Größen angewendet wird

$$\lambda^0{}_{ij}{}^{kl} = Y_{ijm}^0 Y^{0klm} + g_0^2 \left(T^A{}_i{}^k T^A{}_j{}^l + T^A{}_j{}^k T^A{}_i{}^l \right). \quad (4.53)$$

Unterschiedliche Ergebnisse der Strahlungskorrekturen des Vertizes der quartischen Kopplung in den beiden Regularisierungen führen jedoch zu einem endlichen Übersetzungsanteil für den Counterterm $(\delta\lambda^{\text{DReg}})_{ij}{}^{kl}$ in dimensionaler Regularisierung. Es sei bemerkt, dass die Wahl $\delta Z_{\lambda_{ij}{}^{kl}}$ hier nicht möglich ist, da Übergangscouterterme existieren, die Vertizes ermöglichen für die es keine Entsprechung auf Baumgraphenniveau gibt. Für die regularisierungsabhängigen Anteile des Diagramms der quartischen Kopplung gilt

$$i\Gamma_{\phi_l \phi_k \phi_j^* \phi_i^*}^{(1), \text{RS-dep.}} = \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} + \quad (4.54a)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\left(ig^2 \{T^a, T^b\}_{ik} g_{\mu\nu} \right) \left(\frac{-ig^{\mu\mu'} \delta^{aa'}}{(k+q)^2} \right) \right. \\ \left. \times \left(ig^2 \{T^{a'}, T^{b'}\}_{jl} g_{\mu'\nu'} \right) \left(\frac{-ig^{\nu\nu'} \delta^{bb'}}{(k-p)^2} \right) \right] \\ + (i \leftrightarrow j) \quad (4.54b)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{i}{32\pi^2} g^4 \{T^a, T^b\}_{ik} \{T^a, T^b\}_{jl} D^* B(-p - q, 0, 0) \\
 &\quad + (i \leftrightarrow j) .
 \end{aligned} \tag{4.54c}$$

Die Übersetzung des Diagrammes enthält einen Symmetriefaktor $1/2$. Der zweite Summand entspricht dem Austauschdiagramm, wobei lediglich die Indizes i und j des ersten Summanden zu vertauschen sind. Da die Selbstenergie des skalaren Teilchens keine Regularisierungsabhängigkeit aufweist und somit auch nicht der Counterterm der Feldrenormierung des skalaren Feldes, ist der Counterterm der quartischen Kopplung in dimensionaler Regularisierung einzig aus der Differenz von (4.54a) in den beiden Regularisierungen bestimmt und somit gilt

$$(\delta\lambda^{\text{DReg}})_{ij}{}^{kl} = (\delta\lambda^{\text{DRed}})_{ij}{}^{kl} - \frac{g^4}{16\pi^2} \{T^a, T^b\}_i^k \{T^a, T^b\}_j^l + (i \leftrightarrow j) , \tag{4.55}$$

$$(\delta\lambda^{\text{DReg}})_{ij}{}^{kl} = (\delta\lambda^{\text{DRed}})_{ij}{}^{kl} - \frac{1}{16\pi^2} \sum_r \sum_s \{\mathbb{T}_r^a, \mathbb{T}_s^b\}_i^k \{\mathbb{T}_r^a, \mathbb{T}_s^b\}_j^l + (i \leftrightarrow j) . \tag{4.56}$$

Hierbei trifft (4.56) im Fall einer Gruppe als direktes Produkt zu, wobei über die Untergruppen der Eichgruppe summiert werden muss. Es liefern nur die Untergruppen einen von Null verschiedenen Beitrag, für die eine nicht-triviale Darstellung auf den Skalaren ϕ_k und ϕ_l gleichermaßen definiert ist. Wir haben folgende Notation gewählt

$$g_{(c)} T_{(c)}^a \rightarrow \mathbb{T}_c^a . \tag{4.57}$$

Der untere Index eines Generators $\mathbb{T}_{(c)}^a$ und der zugehörigen Eichkopplung $g_{(c)}$ soll den Freiheitsgrad der jeweiligen Untergruppe darstellen und folglich wird über diesen doppelt auftretenden Index nicht summiert. Man beachte, dass der untere Index des Generators in (4.46), die Darstellung auf dem jeweiligen Feld kennzeichnet und somit eine andere Funktion als in (4.57) besitzt.

Dies beschließt die Angabe aller Übersetzungen zwischen den Einschleifencountertermen der Felder sowie Kopplungsparameter und Massen einer sanft gebrochenen $N = 1$ Supersymmetrie. Keine weiteren Kopplungen bedürfen in dieser Schleifenordnung einer Übersetzung, da sich dimensionale Regularisierung und dimensionale Reduktion nur zwischen Graphen unterscheidet, in denen ein Eichboson nicht in einem Skalar–Skalar–Eichboson-Vertex mündet.

5 Das Minimale Supersymmetrische Standardmodell

Im Folgenden sollen Übergangscounterterme explizit für das *Minimale Supersymmetrische Standardmodell* (MSSM), den phänomenologisch interessantesten Fall einer $N = 1$ Supersymmetrie, bestimmt werden. Auf Grund der Implementierung der Übergangscounterterme des MSSM in ein Programm, muss das MSSM mit all seinem Feld- und Parameterinhalt genau dargelegt werden. Das MSSM ist definiert als die kleinste supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells. Dabei erhält jedes Standardmodellteilchen ϕ genau einen Superpartner $\tilde{\phi}$. Ein supersymmetrisches Standardmodell mit weniger Feldern ist nicht möglich. Da das MSSM das Standardmodell umfasst, sollen zunächst dessen grundlegenden Definitionen und Eigenschaften benannt werden. Dies gibt auch gleichzeitig eine Motivation für das MSSM.

5.1 Das Standardmodell

Das Standardmodell wurde in zahlreichen Messungen getestet und erlaubt die momentan genaueste Beschreibung der elektromagnetischen, schwachen und starken Wechselwirkung [60, 61].

5.1.1 Symmetrien und Teilcheninhalt

Die Eichgruppe des Standardmodells besteht aus dem Gruppenprodukt $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ mit den Subskripten c, L, Y , die sich auf die Farbe, die Chiralität und die schwache Hyperladung beziehen. Dabei bildet die $SU(3)_c$ -Gruppe die Grundlage der Theorie der starken Wechselwirkung (Quantenchromodynamik), während die Produktgruppe $SU(2)_L \times U(1)_Y$ die Basis der zur elektroschwachen Wechselwirkung vereinigten elektromagnetischen und schwachen Kräfte ist.

Der Teilcheninhalt des Standardmodells setzt sich aus den fermionischen Quarks und Leptonen, Vektorbosonen und dem noch nicht entdeckten skalaren Higgsboson zusammen. Leptonen bilden gegenüber der $SU(3)_c$ ein Singlett, da sie keine Farbe tragen, während Quarks als Farbtripletts auftreten. Sowohl Leptonen als auch Quarks treten in linkshändigen Dubletts und rechtshändigen Singletts der $SU(2)_L$ auf. Darüber hinaus gibt es von den beiden Teilchensorten jeweils drei bis auf die Masse identische Generationen. Die Vektorbosonen entspringen der geforderten Eichinvarianz der Theorie. Eine Angabe aller Standardmodellteilchen und deren Multiplettstruktur

kann Tabelle 5.1 und Tabelle 5.2 entnommen werden. Die abelsche Gruppe der

Tabelle 5.1: Teilchen des Standardmodells mit dem Generationenindex $f = 1, 2, 3$ und dem Farbindex $c = 1, 2, 3$ der Quarks. Die letzte Spalte verdeutlicht die Dimension des Darstellungsraumes der Gruppen $SU(3)_c$, $SU(2)_L$ auf den Materiefeldern und den Eigenwert der Hyperladung $Y/2$.

	Feld	dim rep G
Leptonen	$\Psi_{l f L} = (\Psi_{\nu f L} \quad \Psi_{e f L})^T$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
	$\Psi_{e f R}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1)$
Quarks	$\Psi_{Q f, c L} = (\Psi_{u f, c L} \quad \Psi_{d f, c L})^T$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$
	$\Psi_{u f, c R}$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \frac{2}{3})$
	$\Psi_{d f, c R}$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\frac{1}{3})$

Tabelle 5.2: Die Eichbosonen des Standardmodells. Die letzte Spalte spezifiziert die Dimension der Darstellung der Gruppen $SU(3)_c$, $SU(2)_L$ und der Hyperladung $Y/2$ auf den Vektorfeldern.

Feld	Eichgruppe	Kopplung	Generatoren	Strukturkonstante	dim rep G
V_B^μ	$U(1)_Y$	g_1	$Y/2$	0	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$
\vec{V}_W^μ	$SU(2)_L$	g_2	$\vec{\tau}/2$	ε_{abc}	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$
$V_G^{a, \mu}$	$SU(3)_c$	g_3	T^a	f_{abc}	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)$

elektromagnetischen Wechselwirkung kann nicht mit der schwachen Hyperladung identifiziert werden, sondern erst die Kombination

$$Q = Y/2 + \tau^3/2 \quad (5.1)$$

lässt das Higgsvakuum elektrisch neutral. Dies garantiert, dass die Photonen auch nach der elektroschwachen Symmetriebrechung weiterhin masselos bleiben, da ein expliziter Massenterm der Eichbosonen durch die Eichinvarianz verboten ist. V_B^μ und \vec{V}_W^μ können demnach nicht mit den physikalisch beobachtbaren Zuständen identifiziert werden. Hierfür bedarf es einer spontanen Brechung der elektroschwachen Symmetrie, um zu einer kompatiblen Beobachtung der Experimente zu gelangen.

5.1.2 Spontane Brechung der elektroschwachen Symmetrie

Die Motivation für die Brechung der elektroschwachen Symmetrie ist der Wunsch nach einer renormierbaren Theorie massiver Eichbosonen. Das naive Einfügen von Massenterm für Eichbosonen in die Lagrangedichte schlägt sich fatalerweise auf die Renormierbarkeit der Theorie nieder. Daher muss nach einem Trick gesucht werden, der die aus der Eichinvarianz resultierende Transversalität des vollen Eichbosonenpropagators garantiert. Wünschenswert wäre eine eichkovariante Beschreibung massiver

Eichbosonen. Technisch ist dies durch den *Higgsmechanismus* [62] realisiert. Dies erfordert die Existenz eines skalaren Higgsfeldes ϕ , welches ein $SU(2)_L$ Dublett $\phi = (\phi^+ \ \phi^0)^T$ mit Hyperladung $Y = 1$ darstellt und mittels minimaler Kopplung an die Eichfelder koppelt. Der nichtverschwindende Vakuumerwartungswert dieses Feldes

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad (5.2)$$

minimiert den Higgspotentialterm

$$V(\phi) = -\mu\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2, \quad \mu, \lambda > 0 \quad (5.3)$$

und bricht die Symmetrie spontan, da das Vakuum nicht unter $SU(2)_L \times U(1)_Y$ invariant ist. Die elektroschwache Eichgruppe $SU(2)_L \times U(1)_Y$ wird an der schwachen Energieskala spontan zu einer $U(1)_{\text{em}}$ Eichgruppe gebrochen [62, 63, 64]. Eine Entwicklung des Higgsfeldes um den Vakuumerwartungswert ergibt

$$\phi = \begin{pmatrix} G^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[v + h(x) + iG^0] \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

und ist die Ursache für Massen- und Mischungsterme der Eichbosonen V_B^μ und \vec{V}_W^μ . Hierbei bezeichnet $h(x)$ das physikalische Higgsfeld und G^\pm, G^0 stellen Freiheitsgrade spurioser Natur dar, die durch eine kombinierte $SU(2)_L$ - und $U(1)_Y$ -Eichtransformation eliminiert werden können.

Rotiert man zu Masseneigenzuständen, so kann man ein masseloses und drei massebehaftete Eichbosonen identifizieren

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(V_W^{1,\mu} \mp iV_W^{2,\mu} \right), \quad M_W = \frac{g_2}{2}v = M_Z \cos \theta_W, \quad (5.5)$$

$$Z_\mu = \cos \theta_W V_W^{3,\mu} - \sin \theta_W V_B^\mu, \quad M_Z = \frac{1}{2}v\sqrt{g_1^2 + g_2^2}, \quad (5.6)$$

$$A_\mu = \sin \theta_W V_W^{3,\mu} + \cos \theta_W V_B^\mu \quad M_A = 0. \quad (5.7)$$

Der Mischungswinkel θ_W ist durch die Eichkopplungen ausdrückbar

$$\sin \theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad \cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad (5.8)$$

mit den Abkürzungen $c_W \equiv \cos \theta_W$ und $s_W \equiv \sin \theta_W$. Das masselose Eichboson A_μ wird mit dem Photon identifiziert. Gleichung (5.1) legt es nah, dass die elektrische Ladung durch fundamentalere Kopplungen der zugrunde liegenden ungebrochenen Eichsymmetrien dargestellt werden kann

$$e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}. \quad (5.9)$$

Der nichtverschwindende Vakuumerwartungswert des Higgsfeldes ist im gleichen Maße auch für die Generierung von Massen der chiralen Fermionen des Standardmodells verantwortlich. Dies geschieht durch die bekannten Yukawawechselwirkungsterme, charakterisiert durch den Kopplungsparameter y mit den Generationenindizes f_1, f_2 . Der hierzu korrespondierende Anteil in der Lagrangedichte ist

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^1 = -y_{f_1 f_2}^{e*} \bar{\Psi}_{l f_1} \cdot \phi P_R \Psi_{e f_2} - y_{f_1 f_2}^{d*} \bar{\Psi}_{Q f_1} \cdot \phi P_R \Psi_{d f_2} + \text{h. c.} \quad (5.10)$$

für rechtshändige „down type“ Fermionen $(\Psi_{e f_R}, \Psi_{d f_R})$ und

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^2 = -y_{f_1 f_2}^{u*} \bar{\Psi}_{Q f_1} \cdot \phi^C P_R \Psi_{u f_2} + \text{h. c.} \quad (5.11)$$

für linkshändige „up type“ Fermionen $\Psi_{Q f_L}$, wobei $\phi^C = i\tau_2 \phi^*$ das ladungskonjugierte Higgsfeld ist. Die Matrizen der Massen der chiralen Fermionen ergeben sich somit zu

$$M_{f_1 f_2}^e = \frac{v}{\sqrt{2}} y_{f_1 f_2}^{e*}, \quad M_{f_1 f_2}^d = \frac{v}{\sqrt{2}} y_{f_1 f_2}^{d*}, \quad M_{f_1 f_2}^u = \frac{v}{\sqrt{2}} y_{f_1 f_2}^{u*}. \quad (5.12)$$

5.1.3 Quantisierung

In Abschnitt 2.2.1 hatten wir die Notwendigkeit der Eichfixierung der Lagrangedichte im Zusammenhang mit der Quantisierung der Eichfelder betont. Für das Standardmodell existieren zwei wichtige Eichfixierungsterme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{kov}} &= -\frac{1}{2\xi_B} (\partial_\mu V_B^\mu)^2 - \frac{1}{2\xi_W} (\partial_\mu V_W^{a\mu})^2 - \frac{1}{2\xi_3} (\partial_\mu V_G^{a\mu})^2, \\ \mathcal{L}_{\text{R}_\xi} &= -\frac{1}{2\xi_A} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2\xi_Z} (\partial_\mu Z^\mu - M_Z \xi_Z G^0)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2\xi_W} |\partial_\mu W^{+\mu} + iM_W \xi_W G^+|^2 - \frac{1}{2\xi_3} (\partial_\mu V_G^{a\mu})^2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Zu jedem Vektorboson korrespondiert ein Geistteilchen, deren Wechselwirkung mit den Eichbosonen aus (2.21) abgelesen werden kann. Wir hatten auch erwähnt, dass die Eichsymmetrie durch die BRST-Symmetrie der Lagrangedichte ersetzt wird, da erstere nicht mehr erhalten war. Die BRST-Transformation ist die Quantenversion der Eichtransformation, nur hängt der grassmannwertige Transformationsparameter λ in einer infinitesimalen BRST-Transformationen $\delta_{\text{BRST}}\psi(x) = \lambda Q_B \psi(x)$ nicht mehr von x^μ ab, das heißt die BRST-Invarianz ist global. Nach dem Noether-Theorem existiert ein der BRST-Symmetrie entsprechender erhaltener Strom $J_\mu^{(B)}$ und ein zu allen Zeiten erhaltene Ladung $Q_B = \int d^3x J_0^{(B)}$. Dieser Operator bietet ein wichtiges Werkzeug zur Definition des Hilbertraumes der physikalisch realisierten Zustände $|\text{phys}\rangle$

$$Q_B |\text{phys}\rangle = 0. \quad (5.15)$$

Obiges Kriterium unterscheidet die physikalischen Zustände, die durch eine positive

Norm ausgezeichnet sind, von den unphysikalischen Freiheitsgraden $|\psi\rangle$, die sich schreiben lassen als

$$|\psi\rangle = Q_B |\tilde{\psi}\rangle. \quad (5.16)$$

In diesem Sinne ist auch die spontane Symmetriebrechung in kovarianter Eichung zu verstehen. Denn mit kovarianter Eichfixierung \mathcal{L}_{kov} ist zwar noch eine globale $SU(2)_L \times U(1)_Y$ Symmetrie vorhanden, nur existiert kein wohldefinierter Operator auf dem Hilbertraum als zu dem erhaltenen Strom korrespondierender Generator der Symmetrietransformation. Dies und die Tatsache, dass der Vakuumzustand nicht invariant ist, definiert das Szenario einer spontanen Symmetriebrechung. Nur der Operator der elektrischen Ladung existiert und es ist $Q|0\rangle = 0$. Aus dem Goldstonetheorem [65, 66, 25] schlussfolgert man, dass drei masselose Freiheitsgrade existieren, die aber wegen der BRST-Symmetrie im nicht-observablen Bereich des Zustandsraum liegen. In R_ξ -Eichung liegt der Umstand einer expliziten Brechung der $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Eichgruppe zu $U(1)_{\text{em}}$ vor. Demnach ist die Voraussetzung des Goldstone-Theorems nicht erfüllt und die Goldstonebosonen können massiv werden. Deren Eigenschaft als nicht BRST-invariante Moden lässt sie aber im physikalischen Hilbertraum nicht beobachtbar werden.

5.1.4 Grenzen des Standardmodells

Trotz des großen experimentellen Erfolges des Standardmodell, beinhaltet es einige unphysikalisch anmutende bzw. unästhetische Aussagen, für deren Lösung weitere Modelle entwickelt werden müssen. Der aussichtsreichste Kandidat scheint eine *supersymmetrische* Erweiterung des Standardmodells zu sein.

Vereinheitlichung der Eichkopplungen

Naiverweise würde man erwarten, dass die Eichkopplungen konstante Parameter innerhalb der Theorie sind. Die Quantenfeldtheorie revidiert diese Aussage jedoch und lässt insbesondere die Kopplungskonstanten der jeweiligen Eichgruppe von der Energieskala abhängig werden. Diese Eigenschaft gewährleistet unter anderem die Beobachtung der asymptotischen Freiheit der Quarks. Das Standardmodell besitzt den Nachteil, dass es keine Vereinigung der Kopplungskonstanten der drei Eichgruppen des Standardmodells bei hohen Energien ($M_{\text{GUT}} \sim 10^{16}$ GeV) zu einer fundamentalen vorhersagt. Das würde eine gewisse Unästhetik hinsichtlich der Ordnung der Physik bei hohen Energien hervorrufen, da sich somit keine Möglichkeit ergibt, die Anzahl der freien Parameter des Standardmodells zu verringern. Das MSSM mit seinem erweiterten Teilcheninhalt der Superpartner besitzt die bemerkenswerte Eigenschaft einer Vereinheitlichung der Kopplungen zu garantieren.

Hierarchieproblem

Das Hierarchieproblem entspringt der Beobachtung, dass die Gravitation bei einem Energiebereich (~ 80 GeV) der schwersten experimentell beobachteten Elementar-

teilchen um den Faktor 10^{32} schwächer ist als die elektroschwache Wechselwirkung. An der Planckmassenskala ($\sim 10^{19}$ GeV) sind jedoch beide Wechselwirkungen gleich groß und mit der Beschreibung als effektive Feldtheorie ohne Stringteilchen könnte man bis zu einer Skala ($\sim 10^{17}$ GeV) vorstoßen. Daher lässt sich das Hierarchieproblem technischer fassen, indem man feststellt, dass die Masse des Higgsboson durch quadratisch divergente Strahlungskorrekturen sehr groß werden würde und in der natürlich erscheinenden Grenze zu neuer Physik liegen müsste. Aus Messungen ist aber bekannt, dass die Higgsmasse in der Massenskala der elektroschwachen Symmetriebrechung ($v/\sqrt{2} = 174$ GeV [61]) liegt. Diese Tatsache lässt sich nur durch eine ungewöhnlich genaue Aufhebung zwischen den dominierenden Termen der quadratischen Divergenzen und der nackten Masse des Higgsbosons erklären, um die physikalische Higgsmasse entstehen zu lassen. Dieses *Feinabstimmungsproblem* ist ästhetischer Natur und erhebt die Frage der erwarteten *Natürlichkeit* einer Theorie.

Eine Lösung dieses Problems stellt die systematische Auslöschung der divergenten Beiträge in den Higgsstrahlungskorrekturen dar. Die Existenz zusätzlicher Elementarteilchen liefert zusätzliche Beiträge zu den Schleifenkorrekturen. Besitzen Superpartner außer dem Spin exakt gleiche Quantenzahlen, so sind die Schleifenkorrekturen identisch im Betrag, unterscheiden sich jedoch (aufgrund des unterschiedlichen Spins) im Vorzeichen. Die problematischen Korrekturen addieren sich zu Null.

Dunkle Materie

Keines der Standardmodellteilchen, auch nicht das Neutrino, ist ein geeigneter Kandidat für dunkle Materie. Experimentelle Beobachtungen erzwingen eine starke Unterdrückung von Zerfallsprozessen von Superpartnern in Standardmodellteilchen (ohne einen weiteren Superpartner als Zerfallsprodukt) oder schließen diese komplett aus (R-Parität). Dadurch ist das leichteste supersymmetrische Partnerteilchen (LSP) praktisch stabil. In der Supersymmetrie stellt ein elektrisch neutrales LSP, wie das leichteste Neutralino, einen Kandidaten als Erklärung für dunkle Materie dar [67].

5.2 Das MSSM

5.2.1 Superfelder des MSSM

Wir definieren nun das MSSM, als im Sinne der Teilchenzahl kleinste Möglichkeit ein realistisches Teilchenphysikmodell aufzubauen. Dazu fordern wir, dass die Supersymmetrie nur sanft gebrochen wird, das bedeutet insbesondere, dass wir keinen expliziten Mechanismus angeben, warum die neuen Superpartner andere Massen besitzen als deren Standardmodellpartner. Statt dessen werden alle Supersymmetrie brechenden Terme, die renormierbar, eichinvariant und *R*-Paritäts erhaltend sind, explizit mit zunächst unbekanntem Kopplungskonstanten in das Modell aufgenommen.

Eine erste Forderung der Supersymmetrisierung des Standardmodells lautet, dass man für jedes chirales Fermion des Standardmodells ein chirales Superfeld in das Modell einführt. Unter diesem Gesichtspunkt betrachtet ergibt sich zunächst folgende Tabelle 5.3 für den Sektor der Materiefelder.

Tabelle 5.3: Links chirale Superfelder für den Materieanteil des MSSM mit den Indizes $f = 1, 2, 3$ als Generationenindex, $i = 1, 2$ als $SU(2)_L$ -Dublettindex und $c = 1, 2, 3$ stellvertretend für den Farbindex. Der vierkomponentige Diracspinor Ψ und dessen ladungskonjugierte Variante Ψ^C hängen über $\Psi^C = C\bar{\Psi}^T$ miteinander zusammen, wobei $C = i\gamma^2\gamma^0$ gilt. Die letzte Spalte verdeutlicht die Dimension des Darstellungsraumes der Gruppen $SU(3)_c$, $SU(2)_L$ auf den Materiefeldern und den Eigenwert der Hyperladung $Y/2$

	Superfeld	Komponentenfelder		dim rep G
		Spin 0	Spin 1/2	
Leptonen	$L_{f,i}$	$\phi_{lf,iL}$	$\Psi_{lf,iL}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
	\bar{E}_f	ϕ_{efR}^*	$(\Psi_{efR})^C$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1)$
Quarks	$Q_{f,i,c}$	$\phi_{Qf,i,cL}$	$\Psi_{Qf,i,cL}$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$
	$\bar{U}_{f,c}$	$\phi_{uf,cR}^*$	$(\Psi_{uf,cR})^C$	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{2}{3})$
	$\bar{D}_{f,c}$	$\phi_{df,cR}^*$	$(\Psi_{df,cR})^C$	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -\frac{1}{3})$

Es sollte hervorgehoben werden, dass das Superpotential (2.58) nur links-chirale Superfelder enthalten kann. Daher ist es erforderlich ladungskonjugierte Varianten der rechtshändigen fermionischen $SU(2)_L$ -Singlettfelder zu verwenden, das bedeutet zum Beispiel $(\Psi_{uR})^C = (\Psi_u^C)_L$. Eine entsprechende Eigenschaft gilt natürlich auch für die skalare Komponente, indem man die komplexe Konjugation auf die „rechtshändigen“ Sfermionfelder anwenden muss, das heißt ϕ_{uR}^* . Diese Komponentenfelder sind in den links-chiralen Superfeldern mit den Quantenzahlen der konjugierten Darstellung enthalten. Die Bedingung, dass alle Komponentenfelder in einem Superfeld die gleichen Quantenzahlen tragen, ist eine notwendige Bedingung zu einer *minimalen* supersymmetrischen Erweiterung des Standardmodells.

Ähnlich zum Materiesektor des MSSM wird im Eichsektor zu jedem Vektorfeld in der Eichgruppe $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ korrespondierend ein Vektorsuperfeld definiert. Damit ergibt sich folgende tabellarische Zusammenstellung, die in Tabelle 5.4 angegeben und als ergänzende Definition zu Tabelle 5.2 gedacht ist.

Tabelle 5.4: Vektorsuperfelder des MSSM. $\tilde{\lambda}$ stellt stets einen vierkomponentigen Majoranaspinor dar, für welchen $(\tilde{\lambda}_L)^C = \tilde{\lambda}_R$ gilt, der aber keine komplexe Phase trägt.

Superfeld	Komponentenfelder	
	Spin 1/2	Spin 1
V^Y	$\tilde{\lambda}_B$	$V_{B\mu}$
\vec{V}^W	$\tilde{\lambda}_W^a$	$V_{W\mu}^a$
V_g^a	$\tilde{\lambda}_G^a$	$V_{G\mu}^a$

Die Supersymmetrisierung des Higgssektors des Standardmodells orientiert sich an der Massenerzeugung durch spontane Brechung der elektroschwachen Eichgruppe

$SU(2)_L \times U(1)_Y$. Hier existiert ein $SU(2)_L$ -Dublett Higgsfeld ϕ mit einer Hyperladung $Y_\phi = 1$, welches durch Zuweisung eines nicht-verschwindenden Vakuumerwartungswertes v mittels den Yukawawechselwirkungen (5.10), (5.11) Massenterme für die Materieteilchen in der Lagrangedichte generieren konnte. Insbesondere konnte (5.11) nur durch Gebrauch des konjugierten Higgsfeldes ϕ^C realisiert werden, welches die Hyperladung $Y_{\phi^C} = -1$ besitzt. Solch ein Term ist jedoch in einer supersymmetrischen Theorie verboten. Yukawawechselwirkungsterme entspringen hier dem Superpotential \mathcal{W} , wobei das Superpotential eine analytische Funktion links-chiraler Superfelder sein muss. Daher können aus dem Superpotential abgeleitete Wechselwirkungsterme nicht ϕ und ϕ^C gemeinsam enthalten. Um alle notwendigen Massenterme des Standardmodells korrekt zu reproduzieren, müssen in einer minimalen supersymmetrischen Erweiterung zwei Higgsdubletts mit Hyperladungen $Y = -1$ und 1 existieren. Diese links-chiralen Higgsuperfelder und deren Komponentenfelder sind in Tabelle 5.5 angegeben. Dies beschließt die Angabe aller auftretenden Superfelder im MSSM und

Tabelle 5.5: Links chirale Superfelder des Higgssektors des MSSM. Die letzte Spalte verdeutlicht die Dimension des Darstellungsraumes der Gruppen $SU(3)_c$, $SU(2)_L$ auf den Materiefeldern und den Eigenwert der Hyperladung $Y/2$

Superfeld	Komponentenfelder		dim rep G
	Spin 0	Spin 1/2	
H_{di}	$\phi_{H_{di}}$	$\Psi_{H_{di}L}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
H_{ui}	$\phi_{H_{ui}}$	$\Psi_{H_{ui}L}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{1}{2})$

deren daraus resultierenden Komponentenfelder, welche natürlich nur Eigenzustände der jeweiligen Wechselwirkung darstellen. Die explizite Brechung der Supersymmetrie durch sanfte Brechungsterme und die spontane Brechung des elektroschwachen Sektors rufen Mischungen zwischen Eicheigenzuständen hervor und verlangen eine Diagonalisierung der Massenmatrizen.

5.2.2 Lagrangedichte

Der allgemeine MSSM-Lagrangian kann in einen supersymmetrischen und in einen sanften Brechungsanteil zerlegt werden

$$\mathcal{L}_{\text{MSSM}} = \mathcal{L}_{\text{SUSY}} + \mathcal{L}_{\text{soft}} , \quad (5.17)$$

$$\mathcal{L}_{\text{SUSY}} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{matter}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} , \quad (5.18)$$

wobei die Konstruktion des reinen Eichsektors $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ dem ersten Summanden aus (2.66) zugrunde liegt und der Materieanteil $\mathcal{L}_{\text{matter}}$, sowie die Higgs–Yukawa Anteile $\mathcal{L}_{\text{Higgs}}$ dem zweiten Summanden aus (2.66) entspringen. Es ergibt sich daher für den reinen Eichanteil

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = \frac{1}{4} \int d^2\theta \left(W_g^{aA} W_{gA}^a + \vec{W}_W^A \cdot \vec{W}_{WA} + W_Y^A W_{YA} \right) + \text{h. c.} \quad (5.19)$$

und für den Materieanteil erhält man

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{matter}} = \int d^4\theta & \left[L_{j_1}^\dagger \left(\exp \left(g_2 \vec{V}^W \cdot \vec{\tau} + g_1 V^Y Y \right) \right)_{j_1 j_2} L_{j_2} \right. \\
 & + \bar{E}_j^\dagger \exp \left(g_1 V^Y Y \right) \bar{E}_j \\
 & + Q_{j_1}^\dagger \left(\exp \left(g_3 V_g^a \lambda^a + g_2 \vec{V}^W \cdot \vec{\tau} + g_1 V^Y Y \right) \right)_{j_1 j_2} Q_{j_2} \\
 & + \bar{U}_{j_1}^\dagger \left(\exp \left(-g_3 V_g^a \lambda^a + g_1 V^Y Y \right) \right)_{j_1 j_2} \bar{U}_{j_2} \\
 & \left. + \bar{D}_{j_1}^\dagger \left(\exp \left(-g_3 V_g^a \lambda^a + g_1 V^Y Y \right) \right)_{j_1 j_2} \bar{D}_{j_2} \right], \quad (5.20)
 \end{aligned}$$

wobei ein allgemeiner Index j eingeführt wurde, der die entsprechende explizite Indizierung des jeweiligen Superfeldes umfassen soll. Für den Higgs-Yukawa Sektor erhält man

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \int d^4\theta & \left[\sum_{p \in \{u,d\}} H_{p,i_1}^\dagger \left(\exp \left(g_2 \vec{V}^W \cdot \vec{\tau} + g_1 V^Y Y \right) \right)_{i_1 i_2} H_{p,i_2} \right. \\
 & \left. + \mathcal{W}_{\text{MSSM}} \delta^{(2)}(\bar{\theta}) + \mathcal{W}_{\text{MSSM}}^\dagger \delta^{(2)}(\theta) \right] \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

mit dem Superpotential $\mathcal{W}_{\text{MSSM}}$, welches gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_{\text{MSSM}} = \mu \epsilon_{i_1 i_2} H_{d i_1} \cdot H_{u i_2} - y_{f_1 f_2}^e \epsilon_{i_1 i_2} H_{d i_1} L_{f_1, i_2} \bar{E}_{f_2} \\
 - y_{f_1 f_2}^d \epsilon_{i_1 i_2} H_{d i_1} Q_{f_1, i_2, c_1} \bar{D}_{f_2, c_1} - y_{ij}^u \epsilon_{i_1 i_2} Q_{f_1, i_1, c_1} H_u \bar{U}_{f_2, c_1}. \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

Der erste Summand in (5.22) enthält einen Parameter μ mit der Dimension einer Masse und kann als supersymmetrische Verallgemeinerung eines Higgsinomassentermes verstanden werden. Die Wahl der möglichen Terme des MSSM-Superpotentials wurde durch die Bedingung der Erhaltung der R -Parität eingeschränkt. In Abschnitt 2.3.1 hatten wir die R -Symmetrie definiert, welche als globale $U(1)$ -Invarianz der Supersymmetriealgebra gedeutet werden kann. Unter Phasentransformation der fermionischen Freiheitsgrade des Superraumes $\theta \rightarrow e^{i\varphi} \theta$ und $\bar{\theta} \rightarrow e^{-i\varphi} \bar{\theta}$ verhalten sich die Generatoren der Supersymmetrie unter Verwendung von (2.38) wie

$$Q_A \rightarrow e^{i\varphi R} Q_A e^{-i\varphi R} = e^{-i\varphi} Q_A, \quad (5.23)$$

$$\bar{Q}_{\dot{A}} \rightarrow e^{i\varphi R} \bar{Q}_{\dot{A}} e^{-i\varphi R} = e^{i\varphi} \bar{Q}_{\dot{A}}. \quad (5.24)$$

Dies bedeutet, dass θ , $\bar{\theta}$, Q und \bar{Q} die R -Ladungen 1, -1 , -1 und 1 besitzen. Eine R -Transformation wirkt auf ein allgemeines links-chirales Superfeld wie $\Phi \rightarrow \Phi'$, wobei

$$\Phi'(x, e^{i\varphi} \theta, e^{-i\varphi} \bar{\theta}) = e^{i\varphi R_\Phi} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (5.25)$$

gilt und die R -Ladung des Superfeldes Φ als R_Φ definiert ist. Man kann nun spekulieren, ob die R -Symmetrie eine definierende Invarianz des zu konstruierenden Lag-

rangians darstellen kann. Denn tatsächlich schränkt die R -Symmetrie die Form der Yukawawechselwirkungen und andere Wechselwirkungsterme ein. Jedoch würde sich im Fall einer R -invarianten klassischen Wirkung, eine Zerstörung dieser Symmetrie auf Quantenniveau in Form einer Anomalie auf tun [68] und kann somit keine exakte globale Symmetrie des Raums supersymmetrischer Zustände darstellen. Des Weiteren wären Majoranamassenterme der Gauginos durch die R -Symmetrie ausgeschlossen. Also kann die R -Symmetrie keine grundlegende Symmetrie des MSSM sein. Es stellt sich jedoch heraus, dass die zyklische Untergruppe Z_2 (für $\varphi = \pi$) als Symmetrie behalten werden kann. Diese Symmetrie wird im multiplikativen Sinn zu einer exakten der minimalen supersymmetrischen Erweiterung des Standardmodells erhoben [69, 70, 71], in der auch nichtverschwindende Gauginomassenterme erlaubt sind. Der Wert $e^{i\pi R} = (-1)^R$ eines jeden Komponentenfeldes wird als R -Parität R_p bezeichnet und kann mit der Baryonenzahl B , der Leptonzahl L und der Spinquantenzahl S in Beziehung gesetzt werden

$$R_p = (-1)^{(3B-L)+2S} . \quad (5.26)$$

Die Erhaltung der R -Parität als eine zentrale Annahme des MSSM diktiert die erlaubten Terme des Superpotentials $\mathcal{W}_{\text{MSSM}}$.

5.2.3 Sanfte Brechung der Supersymmetrie

In Abschnitt 2.3.4 hatten wir bereits vermerkt, dass keine gleich schweren Superpartner in der Natur beobachtet werden und daher die Superpartner der Standardmodellteilchen wesentlich höhere Massen besitzen müssen. Die in Abschnitt 2.3.4 diskutierten explizit Supersymmetrie brechenden Terme $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ einer allgemeinen eichinvarianten und R -Paritäts-erhaltenden Lagrangedichte ergeben angewendet auf das MSSM

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{soft}} = & \phi_{Q f_1 L}^* (m_{\phi_Q}^2)_{f_1 f_2} \phi_{Q f_2 L} + \phi_{u f_1 L}^* (m_{\phi_u}^2)_{f_1 f_2} \phi_{u f_2 L} + \phi_{d f_1 L}^* (m_{\phi_d}^2)_{f_1 f_2} \phi_{d f_2 L} \\ & + \phi_{l f_1 L}^* (m_{\phi_l}^2)_{f_1 f_2} \phi_{l f_2 L} + \phi_{e f_1 L}^* (m_{\phi_e}^2)_{f_1 f_2} \phi_{e f_2 L} \\ & + \left[\phi_{H_d} \cdot \phi_{l f_1} (y^e A^e)_{f_1 f_2} \phi_{e f_2 R}^* + \phi_{H_d} \cdot \phi_{Q f_1} (y^d A^d)_{f_1 f_2} \phi_{d f_2 R}^* \right. \\ & \quad \left. + \phi_{q f_1} \cdot \phi_{H_u} (y^u A^u)_{f_1 f_2} \phi_{u f_2 R}^* + \text{h. c.} \right] + m_d |\phi_{H_d}|^2 + m_u |\phi_{H_u}|^2 \\ & + (B\mu \phi_{H_d} \cdot \phi_{H_u} + \text{h. c.}) + \frac{1}{2} (m_{\lambda_B} \bar{\lambda}_B P_L \tilde{\lambda}_B + m_{\lambda_B}^* \bar{\lambda}_B P_R \tilde{\lambda}_B) \\ & + \frac{1}{2} (m_{\lambda_W} \bar{\lambda}_W^a P_L \tilde{\lambda}_W^a + m_{\lambda_W}^* \bar{\lambda}_W^a P_R \tilde{\lambda}_W^a) \\ & + \frac{1}{2} (m_{\lambda_G} \bar{\lambda}_G^a P_L \tilde{\lambda}_G^a + m_{\lambda_G}^* \bar{\lambda}_G^a P_R \tilde{\lambda}_G^a) . \end{aligned} \quad (5.27)$$

In (5.27) wurden nur die Generationenindizes ausgeschrieben, über alle anderen Indizes eines Feldes muss entsprechend summiert werden. Das Produkt der $SU(2)$ Dubletts ist definiert als $A \cdot B := \epsilon_{DE} A^D B^E$ (siehe Abschnitt A.3). Es ist zu bemerken, dass die sanfte Brechung für den Großteil der freien Parameter des MSSM

verantwortlich ist, wie man sich bei einem Vergleich mit der supersymmetrischen Lagrangedichte (5.19), (5.20), (5.21) und (5.22) überzeugen kann.

5.2.4 Übergang zu Masseneigenzuständen

Im Allgemeinen existieren zwei favorisierte Beschreibungen der Lagrangedichte. Einerseits kann sie ausgedrückt werden durch sogenannte Eigeigenzustände, bei denen auch gemischte Zweipunktfunktionen auftreten können und andererseits durch Zustände, welche die Massenmatrix diagonalisieren, sogenannte Masseneigenzustände. In letztem Fall hat man meistens einfachere Propagatoren, dafür aber kompliziertere Vertexfaktoren. Im Folgenden wird der Zusammenhang zwischen Eigeigenzuständen und Masseneigenzuständen des MSSM dargestellt.

Higgsektor

Das Higgspotential $V(\phi_{H_d}, \phi_{H_u}) = V_H$ entsteht aus den allgemeinen Termen (2.70), (2.71) unter Spezifizierung auf die Komponentenfelder ϕ_{H_d} bzw. ϕ_{H_u} und den entsprechenden Termen aus $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ in (5.27)

$$V_H = \frac{1}{8} (g_1^2 + g_2^2) (|\phi_{H_d}|^2 - |\phi_{H_u}|^2)^2 + \frac{g_2^2}{2} |\phi_{H_d}^\dagger \phi_{H_u}|^2 + m_d^2 |\phi_{H_d}|^2 + m_u^2 |\phi_{H_u}|^2 + [(B\mu + |\mu|^2) \phi_{H_d} \cdot \phi_{H_u} + \text{h. c.}] \quad (5.28)$$

Die ladungsneutralen Higgsvakuumerwartungswerte sind nach der elektroschwachen Symmetriebrechung durch Minimierung des Potentials V_H determiniert

$$\langle \phi_{H_d} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \phi_{H_u} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

Es ist dabei hervorzuheben, dass ein nicht-triviales Higgsvakuum nur dann existieren kann, wenn die Supersymmetrie gebrochen ist. Die Grundzustände des Higgspotentials führen auf die Massen der Eichbosonen

$$M_W = \frac{g_2}{2} \sqrt{v_d^2 + v_u^2}, \quad M_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \sqrt{v_d^2 + v_u^2}. \quad (5.30)$$

Die Massen der chiralen Fermionen ergeben sich aus den Yukawakopplungen

$$y_{f_1 f_2}^{e*} = \frac{g_2}{\sqrt{2} M_W c_\beta} M_{f_1 f_2}^e, \quad y_{f_1 f_2}^{d*} = \frac{g_2}{\sqrt{2} M_W c_\beta} M_{f_1 f_2}^d, \quad y_{f_1 f_2}^{u*} = \frac{g_2}{\sqrt{2} M_W s_\beta} M_{f_1 f_2}^d. \quad (5.31)$$

Der Parameter

$$\frac{v_u}{v_d} = \frac{s_\beta}{c_\beta} = t_\beta = \tan \beta \quad \text{mit} \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \quad (5.32)$$

ist ein freier Parameter der Theorie, sofern Massen der chiralen Fermionen betrachtet werden.

Die Massenterme für die Higgsbosonen stammen aus dem quadratischen Anteil des Higgspotentials V_H

$$V_H^{(2)} = \frac{1}{2} m_{lm}^2 \phi_l \phi_m, \quad m_{lm}^2 = \left\langle \frac{\partial^2 V_H}{\partial \phi_l \partial \phi_m} \right\rangle \Big|_{\min}. \quad (5.33)$$

Hierbei ist ϕ_l eine allgemeine Bezeichnung für den Real- oder Imaginärteil eines Higgskomponentenfeldes und die zweifache Ableitung des Higgspotentials wird im Minimum des Potentials ausgewertet. Die 8×8 quadrierte Massenmatrix der Higgsteilchen zerfällt in einen diagonalen Block aus 2×2 Massenmatrizen für $\phi_{H_{u,d}}^\pm$, $\Im \phi_{H_{u,d}}^0$ und $\Re \phi_{H_{u,d}}^0$. Aus der Diagonalisierung der Massenmatrizen erhält man die Eigeigenzustände in Abhängigkeit der Masseneigenzustände

$$\begin{pmatrix} \phi_{H_{d1}} \\ \phi_{H_{d2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (v_d + c_\alpha H^0 - s_\alpha h^0 + i(s_\beta A^0 - c_\beta G^0)) \\ s_\beta H^- - c_\beta G^- \end{pmatrix}, \quad (5.34)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_{H_{u1}} \\ \phi_{H_{u2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\beta H^+ + s_\beta G^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (v_u + s_\alpha H^0 + c_\alpha h^0 + i(s_\beta G^0 + c_\beta A^0)) \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

Dabei ist

$$\tan 2\alpha = \tan 2\beta \cdot \frac{m_A^2 + m_Z^2}{m_A^2 - M_Z^2} \quad \text{mit} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 0. \quad (5.36)$$

Von den acht skalaren Feldern sind die Goldstonebosonen G^0 und G^\pm unphysikalisch, denn sie bilden wie im Fall des Standardmodells die longitudinalen Moden der massiven Vektorbosonen. Es verbleiben fünf massive Higgsbosonen A^0, H^\pm, H^0, h^0 im MSSM. Wobei H^\pm, G^\pm die Massenmatrix für $\phi_{H_{u,d}}^\pm$ diagonalisieren, G^0, A^0 für $\Im \phi_{H_{u,d}}^0$ und H^0, h^0 für $\Re \phi_{H_{u,d}}^0$ in entsprechender Weise.

Sfermionen

Die Massen der Sfermionen erhalten einerseits Beiträge aus der sanften Brechung (5.27) und andererseits aus dem supersymmetrischen Teil (5.22) der Lagrangedichte in Form von F -Termen aus (2.71). Zusätzlich tragen noch die D -Terme aus (2.71) bei. Allgemein lässt sich für Sfermionen ϕ_t des Typs t folgendes Konzept zur Rotation auf Masseneigenzustände angeben. Definiert wird ein sechskomponentiger Vektor

$$\phi_t = \begin{pmatrix} \phi_{tL} \\ \phi_{tR} \end{pmatrix}, \quad (5.37)$$

wobei ϕ_{tL}, ϕ_{tR} jeweils dreikomponentige Spaltenvektoren im Generationenraum sind.¹ Im Raum, der durch die Vektoren aus (5.37) aufgespannt wird, kann die hermitesche

¹Die „Händigkeit“ L und R eines Sfermions ϕ_t soll andeuten, dass es sich um den Superpartner des entsprechenden chiralen Fermions Ψ_t handelt, für welches die Händigkeit wohldefiniert ist. Ausnahme bildet das rechtshändige Sneutrino das auf Null gesetzt wird.

2×2 Matrix (5.38) als quadrierte Massenmatrix der Sfermionen aufgefasst werden. Jeder Eintrag dieser Matrix ist eine 3×3 Blockmatrix im Generationenraum

$$M_{\phi_t}^2 = \begin{pmatrix} M_{\phi_t LL}^2 & M_{\phi_t LR}^2 \\ M_{\phi_t LR}^{2\dagger} & M_{\phi_t RR}^2 \end{pmatrix}. \quad (5.38)$$

Zusammengefasst lassen sich die Massenterme für Sfermionen ϕ_t als

$$\mathcal{L}_{\text{sfermion}} = -\phi_t^\dagger M_{\phi_t}^2 \phi_t \quad (5.39)$$

notieren, wobei die Sfermion-Massenmatrix $M_{\phi_t}^2$ durch eine unitäre 6×6 Matrix W^t diagonalisiert wird

$$M_{\phi_t}^{2(D)} = W^{t\dagger} M_{\phi_t}^2 W^t \quad \forall \phi_t. \quad (5.40)$$

Die sechskomponentigen Sfermionen ϕ_t können einerseits durch einen alleinigen Index belegt werden, der Werte von 1 bis 6 annehmen kann oder durch ein Indexpaar $[s, f]$, der Bezug auf die Struktur der Matrix aus (5.38) nimmt. Die Rotation auf Masseneigenzustände $\tilde{\mathbf{f}}_t$ lässt sich in dieser Notation schreiben als

$$\tilde{\mathbf{f}}_{t[s,f]} = W_{[s,f][s',f']}^t \phi_{t[s',f']}. \quad (5.41)$$

Die 6×6 Matrix $W_{[s,f][s',f']}^t$ stellt den allgemeinen Fall dar, der auch Mischungen zwischen den Generationen einschließt. Dies wird im Rahmen dieser Arbeit allerdings nicht betrachtet. Im Fall verschwindender Familienmischung ergibt sich für die Indizierung der Matrix W eine mögliche Darstellung zu

$$W_{[s,f][s',f']}^t \rightarrow W_{f,s,s'}^t \delta_{ff'}. \quad (5.42)$$

Demnach kann bei der Indizierung der Sfermionmischungsmatrix W auf einen zweiten Generationenindex verzichtet werden und um diesen Fall hervorzuheben, dass nur die linken und rechten Anteile eines jeden Sfermionstyps t mischen, wird diese zu $\mathcal{U}_{t,f,s,s'}$ unbenannt. Der Index s wird als Sfermionindex bezeichnet und kann die Werte 1 und 2 annehmen, während die gestrichenen Indizes s' auf die Eigenzustände wirken, erhält man einerseits für die Sleptonen des MSSM

$$\phi_{lf,1L} = \phi_{\nu fL} = \tilde{\nu}_f, \quad \phi_{lf,2L} = \phi_{efL} = \mathcal{U}_{2,f,s,1}^* \tilde{l}_{s,f}, \quad (5.43)$$

$$\phi_{efR} = \mathcal{U}_{2,f,s,2}^* \tilde{l}_{s,f}, \quad (5.44)$$

und andererseits für die Squarks

$$\phi_{Qf,1,cL} = \phi_{uf,cL} = \mathcal{U}_{3,f,s,1}^* \tilde{u}_{s,f,c}, \quad \phi_{Qf,2,cL} = \phi_{df,cL} = \mathcal{U}_{4,f,s,1}^* \tilde{d}_{s,f,c}, \quad (5.45)$$

$$\phi_{uf,cR} = \mathcal{U}_{3,f,s,2}^* \tilde{u}_{s,f,c}, \quad \phi_{df,cR} = \mathcal{U}_{4,f,s,2}^* \tilde{d}_{s,f,c}. \quad (5.46)$$

Chirale Fermionen

Massenterme für Diracspinoren des leptonischen und des Quarksektors werden in den Yukawakopplungen aus (5.22) durch den Vakuumerwartungswert der Higgsfelder erzeugt. Die Diracspinoren setzen sich folgendermaßen zusammen

$$\begin{aligned} \nu_f &= \Psi_{lf,1L}, & l_f &= \Psi_{lf,2L} + \Psi_{efR}, \\ & & &= \Psi_{efL} + \Psi_{efR}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} u_{f,c} &= \Psi_{Qf,1,cL} + \Psi_{uf,cR}, & d_{f,c} &= \Psi_{Qf,2,cL} + \Psi_{df,cR}, \\ &= \Psi_{uf,cL} + \Psi_{uf,cR}, & &= \Psi_{df,cL} + \Psi_{df,cR}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Es sei auch hier hervorgehoben, dass in dieser Arbeit keine Generationenmischung zwischen den Quarks betrachtet wird.

Charginos

Obwohl explizite Massenterme der Gauginos in dem sanften Brechungsanteil $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ der Lagrangedichte enthalten sind, zwingt die spontane Brechung $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{\text{em}}$ die geladenen Gauginofelder

$$\tilde{\lambda}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\tilde{\lambda}_W^1 \mp i\tilde{\lambda}_W^2 \right) \quad (5.49)$$

mit den geladenen Higgsinos $\Psi_{H_d 2L} = \Psi_{H_d L}^-$ und $\Psi_{H_u 1L} = \Psi_{H_u L}^+$ zu mischen. Dies resultiert in den Masseneigenzuständen $\tilde{\chi}_{1,2}^\pm$. Dieser Umstand kann durch einen entsprechenden Blick auf die Lagrangedichte verdeutlicht werden, nachdem die Higgsfelder ihren Vakuumerwartungswert erlangt haben und stets zweikomponentige Spinoren der $(\frac{1}{2}, 0)$ -Darstellung (siehe Abschnitt A.2) verwendet werden

$$\mathcal{L}_{\text{chargino}} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \left(v_d \lambda^+ \psi_{H_d}^- + v_u \lambda^- \psi_{H_u}^+ + \text{h. c.} \right) \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} &- \left(M_2 \lambda^+ \lambda^- + \mu \psi_{H_d}^- \psi_{H_u}^+ + \text{h. c.} \right) \\ &= - \left(\psi^- \right)^T \mathbf{X} \psi^+ + \text{h. c.} \end{aligned} \quad (5.51)$$

Die Lagrangedichte (5.50) setzt sich aus dem Beitrag der Gauginokopplung in (2.68), dem supersymmetrischen bilinearen Higgsinomischungsterm in (5.22) und explizit brechenden Anteilen aus (5.27) zusammen. In (5.51) wurde die Bezeichnung

$$\psi^+ := \begin{pmatrix} \lambda^+ \\ \psi_{H_u}^+ \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \psi^- := \begin{pmatrix} \lambda^- \\ \psi_{H_d}^- \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

gewählt. \mathbf{X} ist die asymmetrische Massenmatrix. Sie lautet, ausgedrückt durch Standardparameter des MSSM

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} m_{\lambda_W} & \sqrt{2}M_W s_\beta \\ \sqrt{2}M_W c_\beta & \mu \end{pmatrix}. \quad (5.53)$$

Mit Hilfe der Singulärwertzerlegung (SVD) gelingt es zwei unitäre Matrizen U und V zu finden, die \mathbf{X} in eine Diagonalmatrix überführen

$$U^* \mathbf{X} V^{-1} = \text{diag}(M_{\chi_1^-}, M_{\chi_2^-}). \quad (5.54)$$

Mit dieser Definition transformieren die positiv geladenen Komponenten mit V und die negativen mit U auf die Masseneigenzustände ($k = 1, 2$)

$$\tilde{\chi}_k^+ = V_{km} \psi_m^+ \quad \text{und} \quad \tilde{\chi}_k^- = U_{km} \psi_m^-. \quad (5.55)$$

Die Lagrangedichte der zweikomponentigen Charginos

$$\mathcal{L}_{\text{chargino}} = \left(\tilde{\chi}_1^- M_{\chi_1^-} \tilde{\chi}_1^+ + \tilde{\chi}_2^- M_{\chi_2^-} \tilde{\chi}_2^+ \right) + \text{h. c.} \quad (5.56)$$

kann zu Massenterme der vierkomponentigen Dirac-Charginofelder umgeschrieben werden. Dies gibt Anlass zu folgender Definition

$$\tilde{\chi}_1^- = \begin{pmatrix} \chi_1^- \\ \chi_1^{+T} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\chi}_2^- = \begin{pmatrix} \chi_2^- \\ \chi_2^{+T} \end{pmatrix}. \quad (5.57)$$

Die Eigeigenzustände sind demnach in Abhängigkeit der Masseneigenzustände gegeben durch

$$\tilde{\lambda}_W^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(P_L (U_{k1}^* \tilde{\chi}_k^- + V_{k1}^* \tilde{\chi}_k^{-C}) + P_R (U_{k1} \tilde{\chi}_k^{-C} + V_{k1} \tilde{\chi}_k^-) \right), \quad (5.58)$$

$$\tilde{\lambda}_W^2 = \frac{1}{i\sqrt{2}} \left(P_L (U_{k1}^* \tilde{\chi}_k^- - V_{k1}^* \tilde{\chi}_k^{-C}) + P_R (U_{k1} \tilde{\chi}_k^{-C} - V_{k1} \tilde{\chi}_k^-) \right), \quad (5.59)$$

$$\Psi_{H_d L}^- = \Psi_{H_d 2L} = P_L U_{k2}^* \tilde{\chi}_k^-, \quad (5.60)$$

$$\Psi_{H_u L}^+ = \Psi_{H_u 1L} = P_L V_{k2}^* \tilde{\chi}_k^{-C}. \quad (5.61)$$

Neutralinos

Analog zum dem Fall geladener Fermionen, die keine Lepton- oder Baryonzahl tragen, lassen sich auf für die entsprechenden neutralen Fermionen die Masseneigenzustände bestimmen. Unter Beachtung von Termen, die nach der elektroschwachen Symmetriebrechung nur für den neutralen Sektor relevant sind, ergibt sich mit $\Psi_{H_d 1L} = \psi_{H_d}^0$

und $\Psi_{H_u 2L} = \psi_{H_u}^0$

$$\mathcal{L}_{\text{neutralino}} = -\frac{g_2}{2}\lambda_W^3 (v_d\psi_{H_d}^0 - v_u\psi_{H_u}^0) + \frac{g_1}{2} (v_d\psi_{H_d}^0 - v_u\psi_{H_u}^0) + \mu\psi_{H_d}^0\psi_{H_u}^0 \quad (5.62)$$

$$= -\frac{1}{2}m_{\lambda_W}\lambda_W^3 - \frac{1}{2}m_{\lambda_B}\lambda_B\lambda_B \\ = -\frac{1}{2}(\psi^0)^T \mathcal{M}^n \psi^0 + \text{h. c.} \quad (5.63)$$

Hierbei bezeichnet $(\psi^0)^T$ einen Zeilenvektor mit zwei Gauginofeldkomponenten und zwei Higgsinofeldkomponenten

$$(\psi^0)^T = (\lambda_B, \lambda_W^3, \psi_{H_d}^0, \psi_{H_u}^0). \quad (5.64)$$

Das Symbol \mathcal{M}^n bezeichnet die Neutralino-Massenmatrix

$$\mathcal{M}^n = \begin{pmatrix} m_{\lambda_B} & 0 & -M_{ZC\beta s_w} & M_{ZS\beta s_w} \\ 0 & m_{\lambda_W} & M_{ZC\beta c_w} & -M_{ZS\beta c_w} \\ -M_{ZC\beta s_w} & M_{ZS\beta s_w} & 0 & -\mu \\ M_{ZC\beta c_w} & -M_{ZS\beta c_w} & -\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.65)$$

Diese symmetrische komplexe Matrix kann durch einen Spezialfall des SVD-Theorems (Takagi-Faktorisierung) mittels einer unitären Matrix Z auf Diagonalform gebracht werden

$$Z^* \mathcal{M}^n Z^{-1} = \text{diag}(M_{\chi_1^0}, M_{\chi_2^0}, M_{\chi_3^0}, M_{\chi_4^0}). \quad (5.66)$$

Die Matrix Z vermittelt dann auch zwischen Wechselwirkungs- und Masseneigenzuständen der Neutralinos ($i = 1, 2, 3, 4$)

$$\tilde{\chi}_i^0 = Z_{ij} \psi_j^0. \quad (5.67)$$

Damit lassen sich in (5.63) für $\tilde{\chi}_l^{0T} = (\chi_l^0, \overline{\chi_l^0})^T$ Majoranamassenterme formulieren. Diese geben Anlass zur folgenden Darstellung der Eigeigenzustände in Abhängigkeit der Masseneigenzustände

$$\lambda_B = P_L Z_{k1}^* \tilde{\chi}_k^0 + P_R Z_{k1} \tilde{\chi}_k^0, \quad (5.68)$$

$$\lambda_W^3 = P_L Z_{k2}^* \tilde{\chi}_k^0 + P_R Z_{k2} \tilde{\chi}_k^0, \quad (5.69)$$

$$\Psi_{H_d 1L} = P_L Z_{k3}^* \tilde{\chi}_k^0, \quad (5.70)$$

$$\Psi_{H_u 2L} = P_L Z_{k4}^* \tilde{\chi}_k^0. \quad (5.71)$$

Glunos

Die Glunos $\tilde{\lambda}_g^a$ mischen mit keinen anderen Teilchen, sondern sind bereits Masseneigenzustände. Die Masse der Glunos ist direkt durch den soften Brechungsterm m_{λ_G}

gegeben

$$M_{\tilde{g}}(e^{i\frac{\varphi}{2}})^2 = m_{\lambda_G} . \quad (5.72)$$

Durch absorbieren der komplexen Phase in die Gluinofeldern kann die Masse $M_{\tilde{g}}$ stets reell gewählt werden. Die Umdefinition zu dem neuen Majoranaspinor lautet dann

$$\tilde{\lambda}_G^a := P_L e^{-i\frac{\varphi}{2}} \tilde{g}_a + P_R e^{i\frac{\varphi}{2}} \tilde{g}_a . \quad (5.73)$$

5.3 Übergangscounterterme des MSSM

Nachdem wir die grundlegenden Definitionen und Eigenschaften des MSSM dargelegt haben, wollen wir noch einmal an ausgewählten Beispielen verdeutlichen, wie sich die Übergangscounterterme des MSSM ergeben. Leitfaden ist dabei stets der allgemeine $N = 1$ supersymmetrische, eichinvariante Lagrangian aus Gleichung (2.68) und dessen sanfte Brechungsanteile (2.81)–(2.83). Für diesen allgemeinen Fall hatten wir in Abschnitt 4.2 bereits alle Counterterme der jeweiligen Feldrenormierung als auch Massen- und Kopplungsparameter in dimensionaler Regularisierung bestimmt.

Besitzt eine 1PI Vertexfunktion auf Einschleifenniveau in den beiden Regularisierungen unterschiedliche Ergebnisse, so können nur Kopplungen von der Ordnung \hbar zwischen den jeweiligen äußeren Feldern in der Lagrangedichte zu entsprechenden Vertexkorrekturen beitragen. Der Übergangscounterterm, der die Übersetzung zwischen den Countertermen der beiden Regularisierung angibt, wurde gerade so bestimmt, dass er die Differenz zwischen den regularisierten 1PI Vertexfunktionen aufhebt. Die vollständige Übergangscounterterm-Lagrangedichte in Eicheigenzuständen des MSSM kann Abschnitt B.1 entnommen werden. Diese restauriert die Supersymmetrie und ermöglicht die endlichen Anteile der symmetrischen Counterterme gleich zu wählen, d.h. der Unterschied zwischen den regularisierten 1PI Vertexfunktionen wird kompensiert. Elektroschwache Beispiele Übergangscounterterm-Feynmanregeln sind in Abschnitt B.2 angegeben.

5.3.1 Übergangscounterterme der Selbstenergien

Übergangscounterterme der Gauginoselbstenergien

In Abschnitt 4.2 hatten wir diskutiert, dass die Selbstenergie in Einschleifenordnung eines Gauginos in den beiden Regularisierungen zu unterschiedlichen Ergebnissen führt. Um diesen Unterschied zu kompensieren, müssen alle bilinearen Ausdrücke eines Gauginos der Lagrangedichte (2.68) und den zugehörigen Übersetzungscountertermen in Betracht gezogen werden. Exemplarisch erhält man etwa für den Countertermanteil der Lagrangedichte des Spin-1/2 Freiheitsgrades eines Vektorsuperfeldes

\vec{V}_W

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{trans}} \Big|_{\tilde{\lambda}_W^a, \tilde{\lambda}_W^a} &= \delta Z_{\lambda_W}^{\text{trans}} \left(i \tilde{\lambda}_W^a \gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\lambda}_W^a - m_{\lambda_W} \tilde{\lambda}_W^a P_L \tilde{\lambda}_W^a - m_{\lambda_W}^* \tilde{\lambda}_W^a P_R \tilde{\lambda}_W^a \right) \\ &\quad - \frac{\delta Z_{m_{\lambda_W}}^{\text{trans}}}{2} \left(m_{\lambda_W} \tilde{\lambda}_W^a P_L \tilde{\lambda}_W^a + m_{\lambda_W}^* \tilde{\lambda}_W^a P_R \tilde{\lambda}_W^a \right). \end{aligned} \quad (5.74)$$

Da λ_W^a an das Eichboson $V_{W\mu}^a$ der $SU(2)$ -Eichgruppe koppelt, schlussfolgert man aus (4.5) $C(G) = 2$, was die endlichen Countertermen aus (4.17) und (4.19) festlegt. Man erhält

$$\delta Z_{\lambda_W}^{\text{trans}} = \frac{g_2^2}{8\pi^2} \quad \text{und} \quad \delta Z_{m_{\lambda_W}}^{\text{trans}} = \frac{g_2^2}{8\pi^2}. \quad (5.75)$$

Anschließend rotiert man mit den entsprechen Transformationsmatrizen aus (5.58), (5.59) und (5.69) auf Masseneigenzustände und drückt den sanften Brechungsparameter m_{λ_W} durch die Charginomassenmatrix $M_{\chi_c^-}$ oder durch die Neutralinomassenmatrix $M_{\chi_n^0}$ aus

$$m_{\lambda_W} = \sum_{c_i} U_{c_i 1} M_{\chi_{c_i}^-} V_{c_i 1} \quad \text{oder} \quad m_{\lambda_W} = \sum_{n_i} Z_{n_i 2} M_{\chi_{n_i}^0} Z_{n_i 2}. \quad (5.76)$$

Der vollständige Countertermanteil aller Gauginos im MSSM ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{2-pt, gaugino}}^{\text{trans}} &= \frac{g_2^2}{16\pi^2} \left(i \tilde{\lambda}_W^a \gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\lambda}_W^a - 2m_{\lambda_W} \tilde{\lambda}_W^a P_L \tilde{\lambda}_W^a - 2m_{\lambda_W}^* \tilde{\lambda}_W^a P_R \tilde{\lambda}_W^a \right) \\ &\quad + \frac{3g_3^2}{32\pi^2} \left(i \tilde{\lambda}_G^a \gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\lambda}_G^a - 2m_{\lambda_G} \tilde{\lambda}_G^a P_L \tilde{\lambda}_G^a - 2m_{\lambda_G}^* \tilde{\lambda}_G^a P_R \tilde{\lambda}_G^a \right). \end{aligned} \quad (5.77)$$

Übergangscounterterme der Selbstenergien eines chiralen Fermions

Als Beispiel wählen wir die Selbstenergie des Quarkdubletts Ψ_{QL} . Zu dem Unterschied zwischen den regularisierten 1PI Vertexfunktion trägt nur der kinetische Anteil bei und dementsprechend nur der Counterterm der Feldrenormierung

$$\mathcal{L}^{\text{trans}} \Big|_{\bar{\Psi}_Q \Psi_Q} = \delta Z_{\psi_Q}^{\text{trans}} \left(\bar{\Psi}_{Q_{f_1, i_1, c_1}} \gamma^\mu \partial^\mu P_L \Psi_{Q_{f_1, i_1, c_1}} \right). \quad (5.78)$$

Das chirale Fermion $\Psi_{Q_{f,i,cL}}$ koppelt an alle drei Vektorbosonen innerhalb der Produktgruppe $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ und der Übergangscounterterm (4.23) angewendet auf das Feld $\Psi_{Q_{f,i,cL}}$ ist bestimmt durch (4.4)

$$\delta Z_{\psi_Q}^{\text{trans}} = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{g_1^2}{36} + \frac{3g_2^2}{4} + \frac{4g_3^2}{3} \right). \quad (5.79)$$

Es sei angemerkt, dass die Darstellungsinvariante $C(r)$ für die $U(1)_Y$ -Eichgruppe durch $(Y/2)^2$ gegeben ist und für Fundamentaldarstellungen nicht-abelscher $SU(N)$ -Eichgruppen ansonsten Gleichung (4.4) zu verwenden ist. Der entsprechende rechts-

händige Anteil der up- und down-Quarks koppelt nicht an das Vektorboson der $SU(2)_L$ -Eichgruppe und der zugehörige Countertermanteil in der Lagrangedichte, zum Beispiel des up-Quarks, ist daher modifiziert zu

$$\mathcal{L}^{\text{trans}} \Big|_{\bar{\Psi}_u \Psi_u} = \delta Z_{\psi_u}^{\text{trans}} \left(\bar{\Psi}_{u f_1, c_1}^C \gamma_\mu \partial^\mu P_L \Psi_{u f_1, c_1}^C \right) \quad (5.80)$$

$$= -\delta Z_{\psi_u}^{\text{trans}} \left(\bar{u}_{f_1, c_1} \gamma_\mu \partial^\mu P_R u_{f_1, c_1} \right) , \quad (5.81)$$

$$\text{mit } \delta Z_{\psi_u}^{\text{trans}} = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{4g_1^2}{9} + \frac{4g_3^2}{3} \right) . \quad (5.82)$$

In (5.81) wurde mit Hilfe einer Flip-Regel [72] der Beitrag zu dem Einschleifen-counterterms des vierkomponentigen Diracspinors u verdeutlicht. Der bilineare Anteil der Übergangscountertermlagrangedichte der chiralen Fermionen betreffend lautet in Eigeigenzuständen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2\text{-pt, chir. Fer.}}^{\text{trans}} &= \frac{i(g_1^2 + 27g_2^2 + 48g_3^2)}{576\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{Q f_1, i_1, c_1} \gamma_\mu \partial^\mu P_L \Psi_{Q f_1, i_1, c_1} \right) \\ &+ \frac{i(g_1^2 + 3g_2^2)}{64\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{l f_1, i_1} \gamma_\mu \partial^\mu P_L \Psi_{l f_1, i_1} \right) \\ &+ \frac{i(g_1^2 + 3g_2^2)}{64\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{H_u i_1} \gamma_\mu \partial^\mu P_L \Psi_{H_u i_1} \right) \\ &+ \frac{i(g_1^2 + 3g_2^2)}{64\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{H_d i_1} \gamma_\mu \partial^\mu P_L \Psi_{H_d i_1} \right) \\ &+ \frac{i(g_1^2 + 3g_3^2)}{36\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{u f_1, c_1}^C \gamma_\mu \partial^\mu P_L \Psi_{u f_1, c_1}^C \right) \\ &+ \frac{i(g_1^2 + 12g_3^2)}{144\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{d f_1, c_1}^C \gamma_\mu \partial^\mu P_L \Psi_{d f_1, c_1}^C \right) \\ &+ \frac{ig_1^2}{16\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{e f_1}^C \gamma_\mu \partial^\mu P_L \Psi_{e f_1}^C \right) . \end{aligned} \quad (5.83)$$

Übergangscounterterme der Selbstenergien eines Eichbosons

Die Bestimmung des Übergangscounterterms der Selbstenergie eines Eichbosons, etwa des nicht-abelschen Eichbosons \vec{V}_W , ist bestimmt durch den Übergangscounterterm der Feldrenormierung $\delta Z_{V_W}^{\text{trans}}$. Dieser wiederum ist festgelegt durch die Angabe $C(G) = 2$. Mit (4.28) ergibt sich für den übersetzenden Anteil der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}^{\text{trans}} \Big|_{V_W V_W} = -\delta Z_{V_W}^{\text{trans}} \left((\partial_\mu V_{W\nu}^a) (\partial^\mu V_{W\nu}^a) - (\partial^\mu V_{W\mu}^a) (\partial^\nu V_{W\nu}^a) \right) , \quad (5.84)$$

$$\text{mit } \delta Z_{V_W}^{\text{trans}} = \frac{g_2^2}{24\pi^2} . \quad (5.85)$$

Wie in (5.5) und (5.6) angeben, mischen die Eichbosonen der elektroschwache Eichgruppe $SU(2)_L \times U(1)_Y$ aufgrund des Higgseffektes untereinander. Der bilineare Anteil der Countertermlagrangedichte der Übergangscounterterme der Eichbosonen

betreffend lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2\text{-pt, Gauge Bos.}}^{\text{trans}} = & -\frac{g_2^2}{48\pi^2} \left((\partial_\mu V_{W\nu}^a)(\partial^\mu V_W^{\nu,a}) - (\partial^\mu V_{W\mu}^a)(\partial^\nu V_{W\nu}^a) \right) \\ & - \frac{g_3^2}{32\pi^2} \left((\partial_\mu V_{G\nu}^a)(\partial^\mu V_G^{\nu,a}) - (\partial^\mu V_{G\mu}^a)(\partial^\nu V_{G\nu}^a) \right). \end{aligned} \quad (5.86)$$

5.3.2 Übergangscounterterme der Gauginokopplungsvertizes

Als Gauginokopplung \hat{g}^0 hatten wir den Kopplungsparameter der Eichwechselwirkung bezeichnet, bei der kein Eichboson als äußeres Feld partizipiert, sondern viel mehr die Yukawawechselwirkung zwischen einem Gaugino und dessen chiralen Superpartnern gemeint ist. Das fehlende Eichboson als äußeres Feld in der Wechselwirkung zeichnet deren Strahlungskorrekturen gegenüber anderen Eichwechselwirkungen mit partizipierenden Eichboson als äußeres Feld in dimensionaler Regularisierung aus. Greifen wir die Gauginokopplung zwischen den Feldern λ_W , ψ_Q und ϕ_Q auf, so ist klar, dass $C(G) = 2$ in (4.17) und (4.34) zu wählen ist und in (4.23) als auch in (4.34) über alle Darstellungsinvarianten $C(r_i)$ der Gruppen $SU(3)_c$, $SU(2)_L$ und $U(1)_Y$ zu summieren ist. Damit hat man für den betreffenden Übergangscountertermanteil eines Gauginokopplungsvertizes in der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}^{\text{trans}} \Big|_{\bar{\lambda}_W \Psi_Q \phi_Q^*} = \left(\delta Z_{\hat{g}_2}^{\text{trans}} + \frac{1}{2} \delta Z_{\lambda_W}^{\text{trans}} + \frac{1}{2} \delta Z_{\psi_Q}^{\text{trans}} \right) \quad (5.87)$$

$$\begin{aligned} & \times \left(-\sqrt{2} g_2 \phi_{Q_{f_1, i_1, c_1}}^* \tau_{i_1 i_2}^a \bar{\lambda}_W^a P_L \Psi_{Q_{f_1, i_2, c_1}} \right) \\ & = \frac{g_2^2}{8\pi^2} \left(-\sqrt{2} g_2 \phi_{Q_{f_1, i_1, c_1}}^* \tau_{i_1 i_2}^a \bar{\lambda}_W^a P_L \Psi_{Q_{f_1, i_2, c_1}} \right), \end{aligned} \quad (5.88)$$

wobei

$$\delta Z_{\hat{g}_2}^{\text{trans}} = \frac{g_2^2}{16\pi^2} - \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{g_1^2}{36^2} + \frac{3g_2^2}{4} + \frac{4g_3^2}{3} \right) \quad (5.89)$$

und die Werte aus (5.75) und (5.79) für $\delta Z_{\lambda_W}^{\text{trans}}$ und $\delta Z_{\psi_Q}^{\text{trans}}$ in (5.87) eingesetzt wurden. Mit den Transformationsmatrizen aus (5.58), (5.59) und (5.69) für $\bar{\lambda}_W^a$ und der entsprechenden Matrix für $\phi_{Q_{f,i,cL}}$ aus (5.45) rotiert man auf Masseneigenzustände.

Der Anteil in der Lagrangedichte zur Gleichheit aller Gauginokopplungsvertizes lautet

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{gaugino}}^{\text{trans}} = & -\frac{g_2^3}{4\sqrt{2}\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{l_{f_1, i_1}} P_R \tilde{\lambda}_W^a \phi_{l_{f_1, i_2}} + \tilde{\lambda}_W^a P_L \Psi_{l_{f_1, i_2}} \phi_{l_{f_1, i_1}}^* \right) \tau_{i_1 i_2}^a \\
 & -\frac{g_2^3}{4\sqrt{2}\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{H_u i_1} P_R \tilde{\lambda}_W^a \phi_{H_u i_2} + \tilde{\lambda}_W^a P_L \Psi_{H_u i_2} \phi_{H_u i_1}^* \right) \tau_{i_1 i_2}^a \\
 & -\frac{g_2^3}{4\sqrt{2}\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{H_d i_1} P_R \tilde{\lambda}_W^a \phi_{H_d i_2} + \tilde{\lambda}_W^a P_L \Psi_{H_d i_2} \phi_{H_d i_1}^* \right) \tau_{i_1 i_2}^a \\
 & -\frac{g_2^3}{4\sqrt{2}\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{Q_{f_1, i_1, c_1}} P_R \tilde{\lambda}_W^a \phi_{Q_{f_1, i_2, c_1}} + \tilde{\lambda}_W^a P_L \Psi_{Q_{f_1, i_2, c_1}} \phi_{Q_{f_1, i_1, c_1}}^* \right) \tau_{i_1 i_2}^a \quad (5.90) \\
 & -\frac{3g_3^3}{8\sqrt{2}\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{Q_{f_1, i_1, c_1}} P_R \tilde{\lambda}_G^a \phi_{Q_{f_1, i_1, c_2}} + \tilde{\lambda}_G^a P_L \Psi_{Q_{f_1, i_1, c_2}} \phi_{Q_{f_1, i_1, c_1}}^* \right) T_{c_1 c_2}^a \\
 & +\frac{3g_3^3}{8\sqrt{2}\pi^2} \left(\tilde{\lambda}_G^a P_L \Psi_{u_{f_1, c_2}}^C \phi_{u_{f_1, c_1}} + \bar{\Psi}_{u_{f_1, c_1}}^C P_R \tilde{\lambda}_G^a \phi_{u_{f_1, c_2}}^* \right) T_{c_2 c_1}^a \\
 & +\frac{3g_3^3}{8\sqrt{2}\pi^2} \left(\tilde{\lambda}_W^a P_L \Psi_{d_{f_1, c_2}}^C \phi_{d_{f_1, c_1}} + \bar{\Psi}_{d_{f_1, c_1}}^C P_R \tilde{\lambda}_W^a \phi_{d_{f_1, c_2}}^* \right) T_{c_2 c_1}^a .
 \end{aligned}$$

5.3.3 Übergangscounterterme der Eichkopplungsvertizes

Die Eichinvarianz der Lagrangedichte des MSSM gestattet uns, überall den gleichen Counterterm δZ_g für die Eichkopplung g zu benutzen. Für den Countertermanteil $\delta Z_{g_3}^{\text{trans}}$ der Wechselwirkung zwischen dem Eichboson V_G^a und dem Majoranaspinorpaar $\tilde{\lambda}_G^a$ und $\tilde{\lambda}_G^a$ ergibt sich

$$\mathcal{L}^{\text{trans}} \Big|_{\tilde{\lambda}_G \tilde{\lambda}_G V_G} = - \left(\delta Z_{g_3}^{\text{trans}} + \delta Z_{\lambda_G}^{\text{trans}} + \frac{\delta Z_{V_G}^{\text{trans}}}{2} \right) \left(ig_3 \tilde{\lambda}_G^a \gamma_\mu \tilde{\lambda}_G^c f^{abc} V_G^{b, \mu} \right) \quad (5.91)$$

$$= -\frac{3g_3^2}{16\pi^2} \left(ig_3 \tilde{\lambda}_G^a \gamma_\mu \tilde{\lambda}_G^c f^{abc} V_G^{b, \mu} \right) . \quad (5.92)$$

Für die $SU(3)_c$ -Eichgruppe ist die Darstellungsinvariante $C(G) = 3$ zu wählen. Somit hat man einzeln für die Übersetzungscounterterme aus (4.42), (4.17) und (4.28)

$$\delta Z_{g_3}^{\text{trans}} = -\frac{g_3^2}{32\pi^2}, \quad \delta Z_{\lambda_G}^{\text{trans}} = \frac{3g_3^2}{16\pi^2}, \quad \delta Z_{V_G}^{\text{trans}} = \frac{g_3^2}{16\pi^2} . \quad (5.93)$$

Da die Gluinos ihren eigenen Masseneigenzustände bzw. lediglich eine komplexe Phase aufnehmen, ist deren Rotation trivial. Die Eichbosonen der starken Wechselwirkung bleiben masselos und es ist keine weitere Transformation notwendig. Wiederum seien alle Anteile in der Übergangscounterterm-lagrangedichte, die zu Eichkopplungsvertizes

beitragen, aufgeführt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{gauge}}^{\text{trans}} = & -\frac{g_1 (g_1^2 + 27g_2^2 + 48g_3^2)}{3456\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{Q_{f_1, i_1, c_1}} \gamma_\mu P_L \Psi_{Q_{f_1, i_1, c_1}} V_B^\mu \right) \\
 & + \frac{g_1^3 + 3g_2^2 g_1}{128\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{l_{f_1, i_1}} \gamma_\mu P_L \Psi_{l_{f_1, i_1}} V_B^\mu \right) \\
 & - \frac{g_1 (g_1^2 + 3g_2^2)}{128\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{H_{u i_1}} \gamma_\mu P_L \Psi_{H_{u i_1}} V_B^\mu \right) \\
 & + \frac{g_1 (g_1^2 + 3g_2^2)}{128\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{H_{d i_1}} \gamma_\mu P_L \Psi_{H_{d i_1}} V_B^\mu \right) \\
 & + \frac{g_1 (g_1^2 + 3g_3^2)}{54\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{u_{f_1, c_1}}^C \gamma_\mu P_L \Psi_{u_{f_1, c_1}}^C V_B^\mu \right) \\
 & - \frac{g_1 (g_1^2 + 12g_3^2)}{432\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{d_{f_1, c_1}}^C \gamma_\mu P_L \Psi_{d_{f_1, c_1}}^C V_B^\mu \right) \\
 & - \frac{g_1^3}{16\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{e_{f_1}}^C \gamma_\mu P_L \Psi_{e_{f_1}}^C V_B^\mu \right) \\
 & - \frac{g_2 (g_1^2 + 27g_2^2 + 48g_3^2)}{576\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{Q_{f_1, i_1, c_1}} \gamma^\mu P_L \Psi_{Q_{f_1, i_2, c_1}} \tau_{i_1 i_2}^a V_{W\mu}^a \right) \\
 & - \frac{g_2 (g_1^2 + 3g_2^2)}{64\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{l_{f_1, i_1}} \gamma^\mu P_L \Psi_{l_{f_1, i_2}} \tau_{i_1 i_2}^a V_{W\mu}^a \right) \\
 & - \frac{g_2 (g_1^2 + 3g_2^2)}{64\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{H_{u i_1}} \gamma^\mu P_L \Psi_{H_{u i_2}} \tau_{i_1 i_2}^a V_{W\mu}^a \right) \\
 & - \frac{g_2 (g_1^2 + 3g_2^2)}{64\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{H_{d i_1}} \gamma^\mu P_L \Psi_{H_{d i_2}} \tau_{i_1 i_2}^a V_{W\mu}^a \right) \\
 & - \frac{g_3 (g_1^2 + 27g_2^2 + 48g_3^2)}{576\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{Q_{f_1, i_1, c_1}} \gamma^\mu P_L \Psi_{Q_{f_1, i_1, c_2}} T_{c_1 c_2}^a V_{G\mu}^a \right) \\
 & + \frac{g_3 (g_1^2 + 3g_3^2)}{36\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{u_{f_1, c_1}}^C \gamma^\mu P_L \Psi_{u_{f_1, c_2}}^C T_{c_2 c_1}^a V_{G\mu}^a \right) \\
 & + \frac{g_3 (g_1^2 + 12g_3^2)}{144\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{d_{f_1, c_1}}^C \gamma^\mu P_L \Psi_{d_{f_1, c_2}}^C T_{c_2 c_1}^a V_{G\mu}^a \right) \\
 & - \frac{ig_2^3}{16\pi^2} \left(\bar{\lambda}_W^a \gamma_\mu \tilde{\lambda}_W^c \varepsilon^{abc} V_W^{b, \mu} \right) - \frac{3ig_3^3}{32\pi^2} \left(\bar{\lambda}_G^a \gamma_\mu \tilde{\lambda}_G^c f^{abc} V_G^{b, \mu} \right) \\
 & - \frac{g_2^3}{24\pi^2} \left(\varepsilon^{abc} V_{W\mu}^a V_{W\nu}^b (\partial^\nu V_W^{c, \mu}) \right) - \frac{g_3^3}{16\pi^2} \left(f^{abc} V_{G\mu}^a V_{G\nu}^b (\partial^\nu V_G^{c, \mu}) \right) \\
 & - \frac{g_2^4}{96\pi^2} \left(\varepsilon^{abc} \varepsilon^{ade} V_{W\mu}^b V_W^{d, \mu} V_{W\nu}^c V_W^{e, \nu} \right) \\
 & - \frac{g_3^4}{64\pi^2} \left(f^{abc} f^{ade} V_{G\mu}^b V_G^{d, \mu} V_{G\nu}^c V_G^{e, \nu} \right) .
 \end{aligned} \tag{5.94}$$

5.3.4 Übergangscounterterme der Yukawakopplungsvertizes

Wie oben betont, ist der Einschleifencounterterm der Yukawakopplung $\delta Z_{Y_{ijk}}$ in dimensionaler Reduktion vollkommen symmetrisch. An einem Beispiel soll gezeigt werden, dass der entsprechende Counterterm in dimensionaler Regularisierung ex-

plizit von der Reihenfolge der Felder abhängt. Betrachten wir zunächst folgenden Countertermanteil in der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}^{\text{trans}} \Big|_{(\overline{\Psi}_{H_d})^C \Psi_l \phi_e^*} = \left(\delta Z_{Y_{H_d l e}}^{\text{trans}} + \frac{\delta Z_{\psi_{H_d}}^{\text{trans}}}{2} + \frac{\delta Z_{\psi_l}^{\text{trans}}}{2} \right) \quad (5.95)$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\epsilon_{i_1 i_2} y_{f_2 f_3}^e \right) \left((\overline{\Psi}_{H_d})_{i_1}^C P_L \Psi_{l f_2, i_2} \phi_{e f_3}^* \right) \\ & = \frac{(g_1^2 - 3g_2^2)}{32\pi^2} \left(\epsilon_{i_1 i_2} y_{f_2 f_3}^e \right) \left((\overline{\Psi}_{H_d})_{i_1}^C P_L \Psi_{l f_2, i_2} \phi_{e f_3}^* \right). \end{aligned} \quad (5.96)$$

Unter Spezifizierung von (4.51) und (4.23) auf die hier vorliegenden chiralen Fermionen und dem Skalar erhält man

$$\delta Z_{Y_{H_d l e}}^{\text{trans}} = -\frac{3(g_1^2 - g_2^2)}{64\pi^2}, \quad \delta Z_{\psi_{H_d}}^{\text{trans}} = \frac{g_1^2 + 3g_2^2}{64\pi^2}, \quad \delta Z_{\psi_l}^{\text{trans}} = \frac{g_1^2 + 3g_2^2}{64\pi^2}. \quad (5.97)$$

Im Gegensatz hierzu erhält man für die gleiche Yukawawechselwirkung $y_{f_2 f_3}^e$, in der aber die skalare Komponente durch ϕ_{H_d} gebildet wird

$$\mathcal{L}^{\text{trans}} \Big|_{(\overline{\Psi}_l)^C \Psi_e^C \phi_{H_d}} = \left(\delta Z_{Y_{l e H_d}}^{\text{trans}} + \frac{\delta Z_{\psi_l}^{\text{trans}}}{2} + \frac{\delta Z_{\psi_e}^{\text{trans}}}{2} \right) \quad (5.98)$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\epsilon_{i_1 i_2} y_{f_2 f_3}^e \right) \left((\overline{\Psi}_l)_{f_2, i_2}^C P_L \Psi_e^C \phi_{H_d i_1} \right) \\ & = \frac{g_1^2}{16\pi^2} \left(\epsilon_{i_1 i_2} y_{f_2 f_3}^e \right) \left((\overline{\Psi}_l)_{f_2, i_2}^C P_L \Psi_e^C \phi_{H_d i_1} \right). \end{aligned} \quad (5.99)$$

Der Vollständigkeit halber seien auch hier noch mal die einzelnen Counterterme aufgelistet

$$\delta Z_{Y_{l e H_d}}^{\text{trans}} = \frac{3(g_1^2 - g_2^2)}{128\pi^2}, \quad \delta Z_{\psi_l}^{\text{trans}} = \frac{g_1^2 + 3g_2^2}{64\pi^2}, \quad \delta Z_{\psi_e}^{\text{trans}} = \frac{g_1^2}{16\pi^2}. \quad (5.100)$$

Da in der Lagrangedichte des MSSM der μ -Parameter eine Kopplung insbesondere zwischen den Fermionen $(\overline{\Psi}_{H_d})^C$ und Ψ_{H_u} ermöglicht, ist das regularisierungsabhängige Diagramm aus (4.43) in analoger Weise als Strahlungskorrektur zu der damit verbundenen 1PI 2-Punkt-Vertexfunktion zu betrachten. Damit lässt sich der Übergangscounterterm $\delta Z_{\mu}^{\text{trans}}$ des μ -Parameters als Spezialfall aus dem Counterterm $\delta Z_{Y_{H_d H_u}}^{\text{trans}}$ der Yukawakopplung gewinnen, in der jedoch kein skalares Teilchen existiert.

Der Übergangscountertermanteil der Lagrangedichte lautet demnach

$$\mathcal{L}^{\text{trans}} \Big|_{(\overline{\Psi}_{H_d})^C \Psi_{H_u}} = - \left(\delta Z_{\mu}^{\text{trans}} + \frac{\delta Z_{\psi_{H_d}}^{\text{trans}}}{2} + \frac{\delta Z_{H_u}^{\text{trans}}}{2} \right) \quad (5.101)$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\mu \epsilon_{i_1 i_2} \right) \left((\overline{\Psi}_{H_d})_{i_1}^C P_L \Psi_{H_u i_2} \right) \\ & = -\frac{g_1^2 + 3g_2^2}{32\pi^2} \left(\mu \epsilon_{i_1 i_2} \right) \left((\overline{\Psi}_{H_d})_{i_1}^C P_L \Psi_{H_u i_2} \right). \end{aligned} \quad (5.102)$$

Spezifiziert man die allgemeinen Counterterme (4.23) und (4.51) mit verschwindendem Skalar auf den hier vorliegenden Teilcheninhalt, so ergibt sich einzeln

$$\delta Z_\mu^{\text{trans}} = \frac{g_1^2 + 3g_2^2}{64\pi^2}, \quad \delta Z_{\psi_{H_d}}^{\text{trans}} = \delta Z_{H_u}^{\text{trans}} = \frac{g_1^2 + 3g_2^2}{64\pi^2}. \quad (5.103)$$

Mit den entsprechenden Transformationsmatrizen (5.70), (5.60), (5.61) und (5.71) auf die Masseneigenzustände, trägt obiger Einschleifencounterterm des μ -Parameters zu der Neutralino- und Chargino-2-Punktfunktion bei. Es seien an dieser Stelle alle Übergangscounterterme, die zu Vertizes des μ -Parameters und Yukawakopplungsvertizies führen, angegeben

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2\text{-pt,higgsino}}^{\text{trans}} &= \frac{g_1^2 + 3g_2^2}{32\pi^2} \left(\mu \epsilon_{i_1 i_2} (\bar{\Psi}_{H_d})_{i_1}^C P_L \Psi_{H_u i_2} + \mu^* \epsilon_{i_1 i_2}^\dagger \bar{\Psi}_{H_u i_2} P_R (\Psi_{H_d})_{i_1}^C \right) \quad (5.104) \\ \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{trans}} &= \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \epsilon_{i_1 i_2}^\dagger y_{f_2 f_3}^{e^\dagger} \left[(g_1^2 - 3g_2^2) \bar{\Psi}_{l f_2, i_2} P_R (\Psi_{H_d})_{i_1}^C \phi_{e f_3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2g_1^2 \left(\bar{\Psi}_e^C P_R (\Psi_l)_{f_2, i_2}^C \phi_{H_d i_1}^* + \bar{\Psi}_{H_d i_1} P_R \Psi_{e f_3} \phi_{l f_2, i_2}^* \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \epsilon_{i_1 i_2} y_{f_2 f_3}^e \left[(g_1^2 - 3g_2^2) (\bar{\Psi}_{H_d})_{i_1}^C P_L \Psi_{l f_2, i_2} \phi_{e f_3}^* \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2g_1^2 \left((\bar{\Psi}_l)_{f_2, i_2}^C P_L \Psi_e^C \phi_{H_d i_1} + \bar{\Psi}_{e f_3} P_L \Psi_{H_d i_1} \phi_{l f_2, i_2} \right) \right] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{288\pi^2} \left\{ \epsilon_{i_1 i_2}^\dagger y_{f_2 f_3}^{d^\dagger} \left[3 (g_1^2 + 9g_2^2) \bar{\Psi}_{Q f_2, i_2, c_2} P_R (\Psi_{H_d})_{i_1}^C \phi_{d f_3, c_2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 (g_1^2 - 24g_3^2) \bar{\Psi}_{d f_3, c_2}^C P_R (\Psi_Q)_{f_2, i_2, c_2}^C \phi_{H_d i_1}^* \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 6g_1^2 \bar{\Psi}_{H_d i_1} P_R \Psi_{d f_3, c_2} \phi_{Q f_2, i_2, c_2}^* \right] \right. \\ &\quad \left. + \epsilon_{i_1 i_2} y_{f_2 f_3}^d \left[3 (g_1^2 + 9g_2^2) (\bar{\Psi}_{H_d})_{i_1}^C P_L \Psi_{Q f_2, i_2, c_2} \phi_{d f_3, c_2}^* \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 (g_1^2 - 24g_3^2) (\bar{\Psi}_Q)_{f_2, i_2, c_2}^C P_L \Psi_{d f_3, c_2}^C \phi_{H_d i_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 6g_1^2 \bar{\Psi}_{d f_3, c_2} P_L \Psi_{H_d i_1} \phi_{Q f_2, i_2, c_2} \right] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{288\pi^2} \left\{ \epsilon_{i_1 i_2}^\dagger y_{f_1 f_3}^{u^\dagger} \left[4 (g_1^2 + 12g_3^2) \bar{\Psi}_{Q f_1, i_1, c_3} P_R \Psi_{u f_3, c_3} \phi_{H_u i_2}^* \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 12g_1^2 \bar{\Psi}_{u f_3, c_3}^C P_R (\Psi_{H_u})_{i_2}^C \phi_{Q f_1, i_1, c_3}^* \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 3 (g_1^2 - 9g_2^2) \bar{\Psi}_{H_u i_2} P_R (\Psi_Q)_{f_1, i_1, c_3}^C \phi_{u f_3, c_3} \right] \right. \\ &\quad \left. + \epsilon_{i_1 i_2} y_{f_1 f_3}^u \left[4 (g_1^2 + 12g_3^2) \bar{\Psi}_{u f_3, c_3} P_L \Psi_{Q f_1, i_1, c_3} \phi_{H_u i_2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 12g_1^2 (\bar{\Psi}_{H_u})_{i_2}^C P_L \Psi_{u f_3, c_3}^C \phi_{Q f_1, i_1, c_3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 3 (g_1^2 - 9g_2^2) (\bar{\Psi}_Q)_{f_1, i_1, c_3}^C P_L \Psi_{H_u i_2} \phi_{u f_3, c_3}^* \right] \right\}. \quad (5.105) \end{aligned}$$

Übergangscounterterme der quartischen Kopplungsvertizes

Die Übersetzungscounterterme der quartischen Kopplung $\Delta\lambda^{\text{trans}}$ zerfallen in zwei Klassen; einerseits existieren Counterterme, die gänzlich ohne den Austauschgraphen aus (4.54a) bestimmt sind und andererseits liefert der Austauschgraph für gewisse Counterterme einen Beitrag. Dies kann verdeutlicht werden, indem wir die Kenntnis nutzen, dass die quartische Kopplung nur dann von Null verschieden ist, wenn mindestens zwei Indizes in λ_{ij}^{kl} gleich sind, so kann man allgemein schreiben

$$\mathcal{L}_{\text{quartic}} = -\frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} \lambda_{ij}^{kl} \phi^{*i} \phi^{*j} \phi_k \phi_l \quad (5.106a)$$

$$= -\frac{1}{4} \left(\sum_{\substack{i=k,j=l \\ i \neq j}} + \sum_{\substack{i=l,j=k \\ i \neq j}} + \sum_{i=j=k=l} \right) \lambda_{ij}^{kl} \phi^{*i} \phi^{*j} \phi_k \phi_l. \quad (5.106b)$$

Durch Ausnutzen der Symmetrie der quartischen Kopplung λ_{ij}^{kl} erhält man

$$\mathcal{L}_{\text{quartic}} = -\frac{1}{4} \left(2 \sum_{i=k,j=l,i \neq j} + \sum_{i=j=k=l} \right) \lambda_{ij}^{kl} \phi^{*i} \phi^{*j} \phi_k \phi_l \quad (5.106c)$$

$$= -\sum_{i=k,j=l,i < j} \lambda_{ij}^{kl} \phi^{*i} \phi^{*j} \phi_k \phi_l - \frac{1}{4} \left(\sum_{i=j=k=l} \lambda_{ij}^{kl} \phi^{*i} \phi^{*j} \phi_k \phi_l \right). \quad (5.106d)$$

Aus dem ersten Summanden liest man ab, dass die quartische Kopplung zwischen Paaren von Skalaren ϕ_i^*, ϕ_k und ϕ_j^*, ϕ_l vermittelt. Für diese Terme kann der Indexaustausch ($i \leftrightarrow j$) in (4.56) keinen Beitrag liefern, da die hieraus resultierende Indexvergabe keine Darstellung der jeweiligen Generatoren ermöglichen kann. Die Darstellung des Generators wäre dann als lineare Abbildung zwischen zwei unterschiedlichen Vektorräumen definiert, was der allgemeinen linearen Darstellung einer Gruppe widersprechen würde und somit müssen diese Objekte Null sein. Für den zweiten Summanden vermittelt die Kopplung zwischen gleichen Paaren von Skalaren ϕ_i^*, ϕ_k und der eben diskutierte Indexaustausch ($i \leftrightarrow j$) liefert in offensichtlicher Weise einen Beitrag.

Als Beispiel für den ersten Summanden aus (5.106d), wollen wir die quartischen Kopplung $\lambda_{eH_d}^{eH_d}$ zwischen den „rechtshändigen“ elektronartigen Skalaren ϕ_{eR}^* und „linkshändigen“ down-artigen $SU(2)_L$ -Dublett Higgsen ϕ_{H_dL} näher betrachten. Ausführen der Summe aus (4.56) führt auf

$$\mathcal{L}^{\text{trans}} \Big|_{\phi_e \phi_e^* \phi_{H_d} \phi_{H_d}^*} = \frac{g_1^4}{16\pi^2} \phi_{ef_1} \phi_{ef_1}^* \phi_{H_d i_2} \phi_{H_d i_2}^*. \quad (5.107)$$

Dieses Ergebnis ist anschaulich klar, da zwischen den Skalarpaaren ϕ_e, ϕ_e^* und $\phi_{H_d}, \phi_{H_d}^*$ in dem Feynmandiagramm (4.54a) nur ein Eichboson der $U(1)_Y$ -Eichgruppe umlaufen kann.

Die Symmetrie restaurierende Countertermlagrangedichte für die quartische Wech-

selwirkung zwischen den vier down-artigen Higgsen ϕ_{H_d} ist unter Beachtung des Austauschdiagrammes aus (4.54a) explizit gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{trans}} \Big|_{\phi_{H_d} \phi_{H_d}^* \phi_{H_d} \phi_{H_d}^*} &= \frac{1}{256\pi^2} \phi_{H_d i_3} \phi_{H_d i_1}^* \phi_{H_d i_4} \phi_{H_d i_2}^* \\ &\times \left\{ g_1^4 \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} + g_1^4 \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} \right. \\ &\quad + 4g_2^2 \left[2g_1^2 (\tau_{i_1 i_4}^a \tau_{i_2 i_3}^a) + 2g_1^2 (\tau_{i_1 i_3}^a \tau_{i_2 i_4}^a) \right. \\ &\quad \quad \left. + g_2^2 (\{\tau^a, \tau^b\}_{i_1 i_3} \{\tau^a, \tau^b\}_{i_2 i_4} \right. \\ &\quad \quad \left. \left. + \{\tau^a, \tau^b\}_{i_2 i_3} \{\tau^a, \tau^b\}_{i_1 i_4}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Dies vereinfacht sich durch Indexumbenennung zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{trans}} \Big|_{\phi_{H_d} \phi_{H_d}^* \phi_{H_d} \phi_{H_d}^*} &= \frac{1}{128\pi^2} \phi_{H_d i_3} \phi_{H_d i_1}^* \phi_{H_d i_4} \phi_{H_d i_2}^* \\ &\times \left[g_1^4 \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} + 4g_2^2 \left(2g_1^2 (\tau_{i_1 i_4}^a \tau_{i_2 i_3}^a) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + g_2^2 (\{\tau^a, \tau^b\}_{i_1 i_3} \{\tau^a, \tau^b\}_{i_2 i_4}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Es ist klar, dass die folgenden quartischen Kopplungsanteile des Countertermlagrangians

$$\mathcal{L}^{\text{trans}} \Big|_{\phi_{H_d} \phi_{H_d}^* \phi_{H_d} \phi_{H_d}^*}, \quad \mathcal{L}^{\text{trans}} \Big|_{\phi_{H_u} \phi_{H_u}^* \phi_{H_u} \phi_{H_u}^*} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}^{\text{trans}} \Big|_{\phi_{H_d} \phi_{H_d}^* \phi_{H_u} \phi_{H_u}^*} \quad (5.110)$$

Quelle von Tadpolecountertermen sind, wenn die Wechselwirkungszustände durch Masseneigenzustände ersetzt werden. Wie bereits diskutiert ist der Higgsmechanismus dadurch bestimmt, dass die Higgsfelder sich in einem Grundzustand des Higgsfeldes befinden. Technisch betrachtet kann somit die quartische Kopplung zwischen vier nicht-verschwindenden Feldern zu einem Beitrag einer 1-Punktfunktion zusammenfallen. In unserem Fall geschieht dies gerade für h^0 und H^0 aus (5.34) und (5.35).

Die Übergangscountertermlagrangedichte der quartischen Kopplungen ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{quartic}}^{\text{trans}} &= \frac{1}{5184\pi^2} \phi_{d f_1, c_1} \phi_{d f_2, c_2} \left[9g_3^2 (8g_1^2 + 15g_3^2) \phi_{d f_1, c_2}^* \phi_{d f_2, c_1}^* \right. \\ &\quad \left. + (8g_1^4 - 24g_3^2 g_1^2 + 99g_3^4) \phi_{d f_1, c_1}^* \phi_{d f_2, c_2}^* \right] \\ &\quad + \frac{g_1^4}{144\pi^2} \phi_{d f_1, c_1} \phi_{d f_1, c_1}^* \phi_{H_d i_2} \phi_{H_d i_2}^* + \frac{g_1^4}{144\pi^2} \phi_{d f_1, c_1} \phi_{d f_1, c_1}^* \phi_{H_u i_2} \phi_{H_u i_2}^* \\ &\quad + \frac{g_1^4}{144\pi^2} \phi_{d f_1, c_1} \phi_{d f_1, c_1}^* \phi_{l f_2, i_2} \phi_{l f_2, i_2}^* \\ &\quad + \frac{1}{2592\pi^2} \phi_{d f_1, c_1} \phi_{Q f_2, i_2, c_2} \left[9g_3^2 (15g_3^2 - 4g_1^2) \phi_{d f_1, c_2}^* \phi_{Q f_2, i_2, c_1}^* \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(2g_1^4 + 12g_3^2g_1^2 + 99g_3^4 \right) \phi_{df_1,c_1}^* \phi_{Q_{f_2,i_2,c_2}}^* \\
 & + \frac{1}{2592\pi^2} \phi_{df_1,c_1} \phi_{uf_2,c_2} \left[9g_3^2 \left(15g_3^2 - 16g_1^2 \right) \phi_{df_1,c_2}^* \phi_{uf_2,c_1}^* \right. \\
 & \quad \left. + \left(32g_1^4 + 48g_3^2g_1^2 + 99g_3^4 \right) \phi_{df_1,c_1}^* \phi_{uf_2,c_2}^* \right] \\
 & + \frac{g_1^4}{36\pi^2} \phi_{df_2,c_2} \phi_{df_2,c_2}^* \phi_{ef_1} \phi_{ef_1}^* + \frac{g_1^4}{8\pi^2} \phi_{ef_1} \phi_{ef_1}^* \phi_{ef_2} \phi_{ef_2}^* \\
 & + \frac{g_1^4}{16\pi^2} \phi_{ef_1} \phi_{ef_1}^* \phi_{Hdi_2} \phi_{Hdi_2}^* + \frac{g_1^4}{16\pi^2} \phi_{ef_1} \phi_{ef_1}^* \phi_{Hui_2} \phi_{Hui_2}^* \\
 & + \frac{g_1^4}{16\pi^2} \phi_{ef_1} \phi_{ef_1}^* \phi_{lf_2,i_2} \phi_{lf_2,i_2}^* + \frac{g_1^4}{144\pi^2} \phi_{ef_1} \phi_{ef_1}^* \phi_{Q_{f_2,i_2,c_2}} \phi_{Q_{f_2,i_2,c_2}}^* \\
 & + \frac{g_1^4}{9\pi^2} \phi_{ef_1} \phi_{ef_1}^* \phi_{uf_2,c_2} \phi_{uf_2,c_2}^* \\
 & + \frac{1}{128\pi^2} \phi_{Hdi_3} \phi_{Hdi_1}^* \phi_{Hdi_4} \phi_{Hdi_2}^* \\
 & \quad \times \left[g_1^4 \delta_{i_1i_4} \delta_{i_2i_3} + 4g_2^2 \left(2g_1^2 \left(\tau_{i_1i_4}^a \tau_{i_2i_3}^a \right) + g_2^2 \left(\{ \tau^a, \tau^b \}_{i_1i_3} \{ \tau^a, \tau^b \}_{i_2i_4} \right) \right) \right] \\
 & + \frac{1}{64\pi^2} \phi_{Hdi_3} \phi_{Hdi_1}^* \phi_{Hui_4} \phi_{Hui_2}^* \\
 & \quad \times \left[g_1^4 \delta_{i_1i_3} \delta_{i_2i_4} + 4g_2^2 \left(-2g_1^2 \left(\tau_{i_1i_3}^a \tau_{i_2i_4}^a \right) + g_2^2 \left(\{ \tau^a, \tau^b \}_{i_1i_3} \{ \tau^a, \tau^b \}_{i_2i_4} \right) \right) \right] \\
 & + \frac{1}{64\pi^2} \phi_{Hdi_3} \phi_{Hdi_1}^* \phi_{lf_2,i_4} \phi_{lf_2,i_2}^* \\
 & \quad \times \left[g_1^4 \delta_{i_1i_3} \delta_{i_2i_4} + 4g_2^2 \left(2g_1^2 \left(\tau_{i_1i_3}^a \tau_{i_2i_4}^a \right) + g_2^2 \left(\{ \tau^a, \tau^b \}_{i_1i_3} \{ \tau^a, \tau^b \}_{i_2i_4} \right) \right) \right] \\
 & + \frac{1}{576\pi^2} \phi_{Hdi_3} \phi_{Hdi_1}^* \phi_{Q_{f_2,i_4,c_2}} \phi_{Q_{f_2,i_2,c_2}}^* \\
 & \quad \times \left[g_1^4 \delta_{i_1i_3} \delta_{i_2i_4} + 12g_2^2 \left(-2g_1^2 \left(\tau_{i_1i_3}^a \tau_{i_2i_4}^a \right) + 3g_2^2 \left(\{ \tau^a, \tau^b \}_{i_1i_3} \{ \tau^a, \tau^b \}_{i_2i_4} \right) \right) \right] \\
 & + \frac{1}{128\pi^2} \phi_{Hui_3} \phi_{Hui_1}^* \phi_{Hui_4} \phi_{Hui_2}^* \\
 & \quad \times \left[g_1^4 \delta_{i_1i_4} \delta_{i_2i_3} + 4g_2^2 \left(2g_1^2 \left(\tau_{i_1i_4}^a \tau_{i_2i_3}^a \right) + g_2^2 \left(\{ \tau^a, \tau^b \}_{i_1i_3} \{ \tau^a, \tau^b \}_{i_2i_4} \right) \right) \right] \\
 & + \frac{1}{64\pi^2} \phi_{Hui_3} \phi_{Hui_1}^* \phi_{lf_2,i_4} \phi_{lf_2,i_2}^* \\
 & \quad \times \left[g_1^4 \delta_{i_1i_3} \delta_{i_2i_4} + 4g_2^2 \left(-2g_1^2 \left(\tau_{i_1i_3}^a \tau_{i_2i_4}^a \right) + g_2^2 \left(\{ \tau^a, \tau^b \}_{i_1i_3} \{ \tau^a, \tau^b \}_{i_2i_4} \right) \right) \right] \\
 & + \frac{1}{576\pi^2} \phi_{Hui_3} \phi_{Hui_1}^* \phi_{Q_{f_2,i_4,c_2}} \phi_{Q_{f_2,i_2,c_2}}^* \\
 & \quad \times \left[g_1^4 \delta_{i_1i_3} \delta_{i_2i_4} + 12g_2^2 \left(2g_1^2 \left(\tau_{i_1i_3}^a \tau_{i_2i_4}^a \right) + 3g_2^2 \left(\{ \tau^a, \tau^b \}_{i_1i_3} \{ \tau^a, \tau^b \}_{i_2i_4} \right) \right) \right] \\
 & + \frac{1}{128\pi^2} \phi_{lf_1,i_3} \phi_{lf_1,i_1}^* \phi_{lf_2,i_4} \phi_{lf_2,i_2}^* \\
 & \quad \times \left[g_1^4 \delta_{i_1i_3} \delta_{i_2i_4} + 4g_2^2 \left(g_1^2 \left(\tau_{i_1i_3}^a \tau_{i_2i_4}^a \right) + g_2^2 \left(\{ \tau^a, \tau^b \}_{i_1i_3} \{ \tau^a, \tau^b \}_{i_2i_4} \right) \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{576\pi^2} \phi_{f_1, i_3} \phi_{f_1, i_1}^* \phi_{Q_{f_2, i_4, c_2}} \phi_{Q_{f_2, i_2, c_2}}^* \\
 & \quad \times \left[g_1^4 \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + 12g_2^2 \left(-2g_1^2 \left(\tau_{i_1 i_3}^a \tau_{i_2 i_4}^a \right) + 3g_2^2 \left(\{\tau^a, \tau^b\}_{i_1 i_3} \{\tau^a, \tau^b\}_{i_2 i_4} \right) \right) \right] \\
 & + \frac{g_1^4}{36\pi^2} \phi_{H_d i_2} \phi_{H_d i_2}^* \phi_{u_{f_1, c_1}} \phi_{u_{f_1, c_1}}^* + \frac{g_1^4}{36\pi^2} \phi_{H_u i_2} \phi_{H_u i_2}^* \phi_{u_{f_1, c_1}} \phi_{u_{f_1, c_1}}^* \\
 & + \frac{g_1^4}{36\pi^2} \phi_{l_{f_2, i_2}} \phi_{l_{f_2, i_2}}^* \phi_{u_{f_1, c_1}} \phi_{u_{f_1, c_1}}^* \\
 & + \frac{1}{2592\pi^2} \phi_{u_{f_1, c_1}} \phi_{Q_{f_2, i_2, c_2}} \left[\left(8g_1^4 - 24g_3^2 g_1^2 + 99g_3^4 \right) \phi_{u_{f_1, c_1}}^* \phi_{Q_{f_2, i_2, c_2}}^* \right. \\
 & \quad \left. + 9g_3^2 \left(8g_1^2 + 15g_3^2 \right) \phi_{u_{f_1, c_2}}^* \phi_{Q_{f_2, i_2, c_1}}^* \right] \\
 & + \frac{1}{5184\pi^2} \phi_{u_{f_1, c_1}} \phi_{u_{f_2, c_2}} \left[9g_3^2 \left(32g_1^2 + 15g_3^2 \right) \phi_{u_{f_1, c_2}}^* \phi_{u_{f_2, c_1}}^* \right. \\
 & \quad \left. + \left(128g_1^4 - 96g_3^2 g_1^2 + 99g_3^4 \right) \phi_{u_{f_1, c_1}}^* \phi_{u_{f_2, c_2}}^* \right] \\
 & + \frac{1}{10368\pi^2} \phi_{Q_{f_1, i_3, c_3}} \phi_{Q_{f_1, i_1, c_1}}^* \phi_{Q_{f_2, i_4, c_4}} \phi_{Q_{f_2, i_2, c_2}}^* \\
 & \quad \times \left[18g_3^2 \left(2g_1^2 + 15g_3^2 \right) \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} \delta_{c_2 c_3} \delta_{c_1 c_4} \right. \\
 & \quad + \left(g_1^4 - 12g_1^2 g_3^2 + 198g_3^4 \right) \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} \delta_{c_1 c_3} \delta_{c_2 c_4} \\
 & \quad + 18g_2^2 \left(48g_3^2 \delta_{c_2 c_3} \delta_{c_1 c_4} \tau_{i_1 i_3}^a \tau_{i_2 i_4}^a + 4g_1^2 \delta_{c_1 c_3} \delta_{c_2 c_4} \tau_{i_1 i_3}^a \tau_{i_2 i_4}^a \right. \\
 & \quad \left. + 9g_2^2 \delta_{c_1 c_3} \delta_{c_2 c_4} \left(\{\tau^a, \tau^b\}_{i_1 i_3} \{\tau^a, \tau^b\}_{i_2 i_4} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + 2 \left(\tau^a \tau^b \right)_{i_2 i_4} \{\tau^a, \tau^b\}_{i_1 i_3} \right) \right]. \quad (5.111)
 \end{aligned}$$

6 Implementierung

Nachdem das Prinzip der Übergangscounterterme für eine allgemeine $N = 1$ Yang–Mills-Supersymmetrie in Kapitel 4 dargelegt wurde und dieses in Abschnitt 5.3 für das MSSM spezifiziert wurde, ist man nun bestrebt diese Counterterme für praktische Rechnungen nutzbar zu machen. Dies sieht eine Implementierung in ein Computerprogramm vor, so dass die Übergangscounterterme schnell durch den Benutzer abgerufen werden können.

In diesem Kapitel sollen die grundlegenden Gedanken einer automatisierten Bestimmung der Supersymmetrie Übergangscounterterme des MSSM beschrieben werden. Die Implementierung basiert auf dem Programmpaket `FeynRules` 1.4.9 [73], welches für unsere Zwecke geeignet modifiziert wurde. Dieses Programmpaket bestimmt die Feynmanregeln aus einer zuvor definierten Lagrangedichte und der Deklaration des Feld- und Parameterinhaltes eines Modells. Anschließend stehen vielerlei Schnittpunkte zu anderen Programmpaketen zur Verfügung, für die `FeynRules` auf Grundlage der bestimmten Feynmanregeln sogenannte „Model Files“ generiert. Aufgabe war es eine kompatible Modelldefinition der Übergangscounterterme für eine bereits existierende MSSM-Modelldefinition des Programmpaketes `FeynArts` [74] zu generieren. Die Modifikation von `FeynRules` umfasst eine inhaltliche Änderung der Schnittstelle zu `FeynArts`. Es wurden Regeln zur Bestimmung von Kopplungen zwischen zwei Feldern und eines skalaren Tadpolecounterterms hinzugefügt und die Schnittstelle zu `FeynArts` so verändert, dass Kopplungen stets von Einschleifenordnung behandelt werden.

6.1 Erstellung des Model Files

6.1.1 Vorüberlegungen

Für eine erfolgreiche Implementierung der Übersetzungscounterterme des MSSM muss das MSSM mit seinem Feld- und Parameterinhalt exakt vorliegen. Darunter ist zu verstehen, dass jedes Wechselwirkungsfeld und dessen mögliche Mischungsmatrix von der Indexstruktur her genau spezifiziert werden muss. Um eine gewisse Systematisierungen der Kopplungen im MSSM zu bewahren, ist zu berücksichtigen, dass dessen Lagrangedichte nur unterschiedliche Ausprägungen der allgemeinen, sanft gebrochenen, supersymmetrischen, eichinvarianten Lagrangedichte (2.68), (2.81)–(2.83) beinhaltet. Dieses Leitgedanken verfolgend kann man Fehlerquellen um ein Vielfaches verringern. Kompakt lassen sich folgende Schritte zur Implementierung der Übersetzungscounterterme des MSSM benennen

1. Spezifizierung des Feld- und Parameterinhaltes des MSSM

2. Ausdrücken der Eicheigenzustände durch ihre Masseneigenzustände
3. Eingabe der allgemeinen Übergangscoutertermlagrangedichte

Im Folgenden sollen die einzelnen Arbeitsschritte genauer erklärt werden.

6.1.2 Feld- und Parameterinhalt

Um den oben ausgesprochenen Leitgedanken der Implementierung der Übergangscouterterme zu erfüllen, wurden seitens `FeynRules` zwingend erforderliche Definitionen des Feld- und Parameterinhaltes des jeweiligen Modells ausgenutzt.

In Tabelle 6.1 sind einige definierende Eigenschaften eines Feldes des Modells `FeynRules` angegeben. Im weiteren Verlauf der Arbeit wollen wir mit `restMSSM` auf die Implementierung der Übergangscouterterme in `FeynRules` Bezug nehmen. Um eine gewisse systematische Behandlung der Freiheitsgrade des MSSM durchzuführen, ist jeder `ClassName` eines Feldes in `restMSSM` eine Konkatenation des Symbols des Spinfreiheitsgrades und dem Symbols des zugrunde liegenden Superfeldes. Materiefelder mit dem Spin $s = 0$ beginnen stets mit `S` und Materiefelder die Spin $s = 1/2$ besitzen werden durch den beginnenden Buchstaben `F` identifiziert. Die Komponentfelder eines Vektorsuperfeldes beginnen mit `f` für die Gauginos, und die Vektorfelder werden durch den beginnenden Buchstaben `V` symbolisiert. Einen Sonderfall in der Bezeichnung nehmen die Geister ein, die jedoch nicht weiter diskutiert werden sollen, da für diese Felder im MSSM kein Übergangscouterterm notwendig ist. In Tabelle 6.2 sind noch einmal alle Eicheigenzustände des MSSM aufgeführt und deren zu `restMSSM` korrespondierende Bezeichnung. Auf eine Besonderheit sei bei der Angabe der Hyperladung rechtshändiger Materiefelder hingewiesen. Die jeweiligen Komponentfelder besitzen in `restMSSM` die entgegengesetzte Ladung zu der wie in Tabelle 5.3 definierten. Der Umstand, dass die ladungskonjugierten Zustände rechtshändiger Felder in links-chiralen Superfelder enthalten sind, macht die Definition in dieser Weise notwendig.

In Tabelle 6.3 sind alle notwendigen Parameter der Übergangscoutertermlagrangedichte des MSSM aufgeführt. Für die sanften Brechungsterme der Gauginos besteht in `restMSSM` die Regel, dass diese eine Konkatenation aus dem Buchstaben `m` und dem `ClassName` des Gauginos bilden.

6.1.3 Übergang zu Masseneigenzuständen

Der Übergang zu Masseneigenzustände wurde wie in Abschnitt 5.2.4 dargelegt in `restMSSM` eingebaut und mit Hilfe von `FeynRules` vollzogen. Hierfür ist ein genaues Verständnis der Indizierung der jeweiligen Eicheigenzustände im MSSM und wie sich deren Übersetzung zu `FeynRules` gestaltet zwingend erforderlich. Hier ergaben sich einige Probleme, die auf die nicht berücksichtigte Generationenmischung zwischen den Feldern zurückzuführen ist. Wird keine Generationenmischung betrachtet, so ist die Yukawakopplung bereits in Diagonalform und die Sfermionmischungsmatrix verliert einen Generationenindex, wie bereits in Abschnitt 5.2.4 diskutiert. Dies führt zu einem Problem in `FeynRules`, da hier nur über doppelt auftretende Indizes summiert

werden kann (Einsteinsche Summenkonvention). Nachdem die Feynmanregeln durch `FeynRules` bestimmt wurden, mussten anschließend die nicht-diagonalen Parameter mit Hilfe eines `sed`-Skriptes durch ihre diagonalisierte Form ersetzt werden. Die Notation der Masseneigenzustände orientiert sich an der von `FeynArts` gewählten. Wir verzichten hier auf eine explizite Angabe der Bezeichnung der Masseneigenzustände des MSSM in `FeynArts`-Notation und anderer mit den in Tabelle 6.3 assoziierten Parametern. Diese können stattdessen [75] entnommen werden.

Tabelle 6.1: Auszug der Optionen einer Teilchenklasse in `FeynRules`

Optionen einer Teilchenklasse	Beschreibung
<code>ClassName</code>	Deklaration des Symbols mit dem auf die Teilchenklasse Bezug genommen werden soll.
<code>Indices</code>	Eine Liste aller Indizes die das Feld besitzt, Lorentz- und Spinindizes sind davon ausgeschlossen.
<code>QuantumNumbers</code>	Eine Liste aller $U(1)$ -Eichtransformationen, mit Ersetzung zu der Quantenzahl des Feldes.
<code>Definitions</code>	Eine Liste von Ersetzungen der Felder, etwa durch ihre Masseneigenzustände.

Tabelle 6.2: Superfelder des MSSM und Benennung deren Komponentenfelder in `restMSSM`. f sind Generationenindizes ($f = 1, 2, 3$), i stellen Dublettindizes dar ($i = 1, 2$) und c sind Farbindizes ($c = 1, 2, 3$).

Superfeld	Komponentenfelder			HyperCharge
	Spin 0	Spin 1/2	Spin 1	
$Q_{f,i,c}$	SQL	FQL		1/3
$\bar{U}_{f,c}$	SuR	FuR		4/3
$\bar{D}_{f,c}$	SdR	FdR		-2/3
$L_{f,i}$	S1L	F1L		-1
\bar{E}_i	SeR	FeR		-2
H_{di}	SHd	FHd		-1
H_{ui}	SHu	FHu		1
V_g^a		fG	VG	
\vec{V}^W		fW	VW	
V^Y		fB	VB	

6.1.4 Countertermlagrangedichte

Wir wollen anhand eines Beispiels die Implementierung der Übergangscountertermlagrangedichte in `restMSSM` verdeutlichen. Trennen wir der Übersichtlichkeit wegen

Tabelle 6.3: Erklärung der Symbole in `restMSSM` und deren Bezug zu Parametern des MSSM. Gestrichene Indizes wirken auf Eicheigenzustände. Erklärungen der jeweiligen Indizes der Tensorparameter sind Abschnitt 5.2.4 zu entnehmen.

Symbole	Beschreibung
<code>g1, g2, g3</code>	Eichkopplungen g_1, g_2, g_3 der Eichgruppen $U(1)_Y, SU(2)_L$ und $SU(3)_c$
<code>mfB, mfW, mfG</code>	sanfte Brechungsparameter m der Gauginos λ_B, λ_W und λ_G
<code>alpha</code>	Mischungswinkel α der neutralen Higgs
<code>beta</code>	β ist arctan des Verhältnisses zwischen zwei Higgsvakua, siehe hierzu auch Gleichung (5.32)
<code>MUE</code>	Mischungsparameter μ zwischen den beiden links-chiralen Higgssuperfeldern
<code>CW</code>	Kosinus des schwachen Mischungswinkel θ_W
<code>SW</code>	Sinus des schwachen Mischungswinkel θ_W
<code>vev</code>	Wurzel aus der Summe der quadrierten Higgsvakua v_u und v_d
<code>vd</code>	Vakuumerwartungswert v_d des down-artigen Higgs
<code>SqrtEG1</code>	Wurzel $e^{i\frac{\alpha}{2}}$ der komplexen Phase des Parameters m_{λ_G}
<code>yuk[t, f1, f2]</code>	Yukawakopplungen y_{f_1, f_2}^t
<code>UCha[c, c'], VCha[c, c']</code>	Charginomischungsmatrizen $U_{cc'}, V_{cc'}$
<code>ZNeu[n, n']</code>	Neutralinomischungsmatrix $Z_{nn'}$
<code>USf[t, s, f, s', f']</code>	Sfermionmischungsmatrix $W_{[s, f][s', f']}^t$

zunächst den Countertermanteil von dem Feldgehalt ab, so entnehmen wir der allgemeinen Lagrangedichte (2.68), dass die Gauginokopplung gegeben ist durch

$$\mathcal{L}_{\text{gaugino}} = -\sqrt{2}g \left(\bar{\lambda}^a \bar{\xi}_i T_{ij}^a \phi_j + \text{h. c.} \right) \in \int d^4\theta \Phi_i^\dagger (e^V)_{ij} \Phi_j, \quad (6.1)$$

wobei die unterschiedlichen Ausprägungen dieser Wechselwirkung im MSSM in (5.20) angegeben ist. Um Fehleranfälligkeiten bei der Eingabe des Lagrangians des MSSM zu vermeiden, sollte man daher die allgemeine Gauginowechselwirkung (6.1) implementieren und anschließend auf den Teilcheninhalt des MSSM spezifizieren. Technisch wurde dies so realisiert, dass stets auf die für `FeynRules` zwingend notwendige Definition des Feld- und Parameterinhaltes eines Modells mit Hilfe eigener Funktion zugegriffen wurde. Somit sind die Indizes eines Feldes nur einmal definiert und Indexkontraktionen in der Lagrangedichte müssen nicht manuell eingegeben werden, sondern werden automatisch auf Grundlage der Felddefinition in `FeynRules` bestimmt.

Daher ergibt sich der Einschleifencountertermanteil der Gauginokopplung ohne den

hermitisch konjugierten Part in `restMSSM` zu

```

1  LGaugino := Module[{LGaugino=0, FLGaugino},
2
3    FLGaugino[chirferm_,
4                gaugino_,
5                scalar_]
6
7    := Module[{s1, index1, index2, a},
8              (DeltaZGauginoCoupling[gaugino, chirferm]
9                +1/2*DeltaZGaugino[gaugino]+1/2*DeltaZChiralFermion[chirferm])
10             *(-Sqrt[2]*couplinggauge[gaugino]
11              *HC[ChiralFermion[chirferm, s1, index1]].Gaugino[gaugino, s1, a]
12              *Generator[couplinggauge[gaugino], scalar, index1, index2, a]
13              *Scalar[scalar, index2])];
14
15    LGaugino := (FLGaugino @@@ combogaugino) /. {List -> Plus};
16
17  LGaugino]

```

Die Funktion `ChiralFermion` besitzt drei Argumente. Sie entscheidet, ob auf das chirale Fermion der Projektor P_L oder P_R wirkt, was im letzten Fall eine zusätzliche Ladungskonjugation erfordert. Standardmäßig wirkt auf jedes chirale Fermion der Projektor P_L , jedoch sind in `restMSSM` rechtshändige Materiefelder gegenüber linkshändigen ausgezeichnet, da deren Symbole stets auf R enden. Des Weiteren fügt die Funktion alle definierten Indizes des jeweiligen chiralen Fermions an. In entsprechender Weise ist die Funktion `Scalar` zu betrachten, die ebenfalls sensitiv auf die Endung R ist, was eine hermitesche Konjugation nach sich zieht. Die Funktion `Gaugino` überprüft, ob das jeweilige Gaugino einen Eichindex trägt oder nicht, und behält ihn im ersten Fall bei. Durch die Funktion `couplinggauge` wird mittels eines Komponentenfeldes eines Supervektorfeldes die Eichgruppe und die hierzu korrespondierende Eichkopplung bestimmt. Die Funktion `Generator` besitzt vier Argumente. Das erste Argument spezifiziert die Eichgruppe mit Hilfe der Eichkopplung und damit einhergehend ob das letzte Argument, der Eichindex, zur vollständigen Angabe des Generators notwendig ist. Das zweite Argument der Funktion `Generator` gibt Kenntnis auf welches Feld der Generator wirkt. Im Fall einer abelschen Gruppe wird somit die Quantenzahl des Feldes eingesetzt und im nicht-abelschen Fall die Fundamentaldarstellung auf linkshändigen Materiefeldern oder die konjugierte Darstellung auf rechtshändigen Materiefeldern bzw. die adjungierte Darstellung auf Komponentenfelder eines Vektorsuperfeldes. Mit den anderen beiden Argumenten werden die Indizes der Darstellung auf das Feld spezifiziert.

Die Namensgabe der Counterterme ist selbsterklärend, wobei in `restMSSM` damit stets die endlichen Übersetzungscouterterme gemeint sind und durch Einsetzen eines Symbol eines MSSM-Feldes ausgelesen werden.

Die Variable `combogaugino` ist eine Liste der Symbole der Felder, die die verschiedenen Ausprägungen der Gauginowechselwirkung auf Grundlage des MSSM darstellt. Auch diese Variable soll allein durch den Superfeldinhalt des MSSM bestimmt werden. Daher existiert in `restMSSM` die Variable `mattercontrib`. Sie ist im MSSM definiert als

```

1  mattercontrib = {{QL, {G, W, B}},
2                   {1L, {W, B}},
3                   {Hu, {W, B}},
4                   {Hd, {W, B}},

```

```

5      {uR, {G, B}},
6      {dR, {G, B}},
7      {eR, {B}}};

```

Diese Variable besitzt eine verschachtelte Listenstruktur. Jedes Element dieser Liste ist selbst wieder eine Liste, gebildet aus zwei Einträgen. Der erste Eintrag stellt ein chirales Superfeld dar und in dem zweiten Eintrag sind alle daran ankoppelnden Vektorsuperfelder als eine Liste aufgeführt. Durch Hilfsfunktionen, die hier nicht weiter aufgeführt werden, lassen sich alle Feldkombinationen der Gauginokopplung aus `mattercontrib` erzeugen

```

1  combogaugino = {{FQL, fG, SQL}, {FQL, fW, SQL}, {FQL, fB, SQL},
2                  {F1L, fW, S1L}, {F1L, fB, S1L}, {FHu, fW, SHu},
3                  {FHu, fB, SHu}, {FHd, fW, SHd}, {FHd, fB, SHd},
4                  {FuR, fG, SuR}, {FuR, fB, SuR}, {FdR, fG, SdR},
5                  {FdR, fB, SdR}, {FeR, fB, SeR}}

```

Auf diese Variable wirkt die Funktion `FLgaugino` und die Indizes der Felder werden in entsprechender Weise kontrahiert.

Analog wurde auch mit den verbleibenden Anteilen der Lagrangedichte verfahren, wobei stets eine automatisierte Indexkontraktion vorgenommen wurde. In Tabelle 6.4 sind noch ein mal die notwendige Funktionen und deren Argumente vorgestellt um die Übergangscoutertermlagrangedichte zu erzeugen. Diese Funktionen wirken auf Listen, die den Feldgehalt des MSSM spezifizieren und sind in Analogie zu dem oben geschilderten Beispiel zu verstehen.

Bei der Implementierung der Countertermlagrangedichte wurde darauf geachtet, MSSM-spezifische Eigenschaften zu vermeiden, so dass der Charakter der Übergangscouterterme einer *allgemeinen* $N = 1$ Supersymmetrie erhalten bleibt. Inwiefern dieses Ziel erreicht wurde, konnte jedoch unter Anwendung auf ein anderes Modell einer sanft gebrochenen $N = 1$ Supersymmetrie nicht getestet werden.

Durch `FeynRules` wurden 233 Übergangscouterterme des MSSM ausgedrückt durch Masseneigenzustände bestimmt. Davon entsprechen 2 Übergangscoutertermen einer 1-Punkt-Funktion, 23 einer 2-Punkt-Funktion, 104 einer 3-Punkt-Funktion und 104 einer 4-Punkt-Funktion. Um die 2-Punkt-Funktionen zu erhalten musste der `FeynRules`-Quellcode um einige Variablen erweitert werden. Hierfür war es notwendig generische Kopplungen zwischen zwei Fermionen Ψ_1 und $\bar{\Psi}_2$ zu implementieren

$$\Gamma_{\Psi_1\bar{\Psi}_2}(k_1, k_2) = \vec{G}_{\Psi_1\bar{\Psi}_2} \cdot \begin{pmatrix} k_2 P_L \\ k_1 P_R \\ P_L \\ P_R \end{pmatrix}_- . \quad (6.2)$$

Wobei $\vec{G}_{\Psi_1\bar{\Psi}_2}$ die Kopplungskonstante zwischen den beiden fermionischen Feldern bezeichnet und das Subskript $-$ deutet auf eine antisymmetrische Kopplung hin ($+$ für eine symmetrische). Analog wurden 2-Punkt-Funktionen zwischen zwei Vektorbosonen, zwei Skalaren, sowie eine Ein-Punkt-Funktion für einen Skalar eingebaut

$$\Gamma_{V_1 V_2}(k_1, k_2) = \vec{G}_{V_1 V_2} \cdot \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(k_1 k_2) \\ g_{\mu\nu} \\ k_{1\mu} k_{2\nu} \end{pmatrix}_+ , \quad (6.3)$$

Tabelle 6.4: Erklärung der Funktionen in `restMSSM` und deren Bezug zu Übergangscountertermanteilen in einer allgemeinen $N = 1$ supersymmetrischer Yang–Mills-Lagrangedichte. `f_` ist ein Platzhalter eines Gauginos, `F_` für ein chirales Fermion, `S_` für ein skalares Feld und `V_` für ein Vektorboson. Ausnahmen bilden `sfi_` als ein chirales Superfeld mit der Indexmenge i und `Sa_` als Platzhalter für ein skalares Teilchen mit der Indexmenge a .

Funktionen	Beschreibung
<code>FL2PtGaugino[f_]</code>	bilinearer Anteil des Gauginos $\tilde{\lambda}$, siehe z.B. (5.74)
<code>FL2PtChiralFermion[F_]</code>	bilinearer Anteil des chiralen Fermions $\tilde{\Psi}$, siehe z.B. (5.78)
<code>FLYukawa2[tensor_, sfi_, sfj_]</code>	Anteil des μ -Parameters mit vorgestelltem Tensorpart, siehe z.B. (5.101)
<code>FL2PtVectorBoson[V_]</code>	bilinearer Anteil des Eichbosons V siehe z.B. (5.84)
<code>FLGaugino[F_, f_, S_]</code>	Gauginowechselwirkung siehe z.B. (5.87)
<code>FLGauge2CF1VB[F_, V_]</code>	Eichwechselwirkung zwischen einem chiralen Fermion Ψ und zwei Vektorbosonen V
<code>FLGauge2G1VB[f_, V_]</code>	Eichwechselwirkung zwischen einem Gaugino $\tilde{\lambda}$ und zwei Vektorbosonen V (5.91)
<code>FLGauge3VB[V_]</code>	Eichwechselwirkung zwischen drei Vektorbosonen V
<code>FLGauge4VB[V_]</code>	Eichwechselwirkung zwischen vier Vektorbosonen V
<code>FLYukawa3[tensor_, sfi_, sfj_, sfk_]</code>	Yukawawechselwirkung mit vorgestelltem Tensorpart siehe z.B. (5.95)
<code>FLQuartic[Sa_, Sb_]</code>	quartische Wechselwirkung die durch zwei Skalare ϕ_a und ϕ_b ausgelesen wird siehe z.B. (5.106a)

$$\Gamma_{\phi_1\phi_2}(k_1, k_2) = \vec{G}_{\phi_1\phi_2} \cdot \begin{pmatrix} (k_1 k_2) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

$$\Gamma_\phi = \vec{G}_\phi \cdot \left(1\right)_+. \quad (6.5)$$

6.2 Überprüfung des Model Files

Die genaue Terminologie der Modelldefinition der Übergangscounterterme ist die eines „Add-on Model Files“. Somit kann das erstellte Model File nicht eigenständig funktionieren, sondern setzt viel mehr auf der Modelldefinition der Baumgraphenkopplungen des MSSM auf. Es wird in `FeynArts` mit dem Befehl `Model` \rightarrow `"restoredMSSM"` geladen. Damit auch skalare Tadpolecounterterme durch `FeynArts` berücksichtigt werden, muss eine erweiterte `Lorentz.gen` geladen werden; `GenericModel` \rightarrow `"{LorentzTadpole}"`. Diese skalaren Tadpolecounterterme sind proportional zu einer C -Zahl.

Eine erste Überprüfung der Kopplungen der erstellten Modelldefinition konnte durch das mit `FeynArts` eng verknüpfte Programmpaket `FormCalc` 6.1 [74] vollzogen werden. `FormCalc` gestattet die Berechnung und Vereinfachung von Baumgraphen- und Einschleifendiagrammen und besitzt unter anderem die Eigenschaft in dimensionaler Reduktion oder Regularisierung zu rechnen. Somit liegt ein erster Test der Modelldefinition der Übergangscounterterme des MSSM auf der Hand; Streng an

Gleichung (3.28) orientierend wird in `FormCalc` für jede Kopplung der Countertermmodelldefinition die 1PI Vertexfunktion in Einschleifenordnung jeweils in dimensionaler Regularisierung und dimensionaler Reduktion berechnet. Da in der neuen Modelldefinition natürlicherweise die Übergangscounterterme enthalten sind, werden diese von `FormCalc` eingelesen und müssen nun Kraft ihrer Eigenschaft die endliche Differenz der regularisierten 1PI Vertexfunktion aufheben, siehe hierzu Abbildung 6.1.

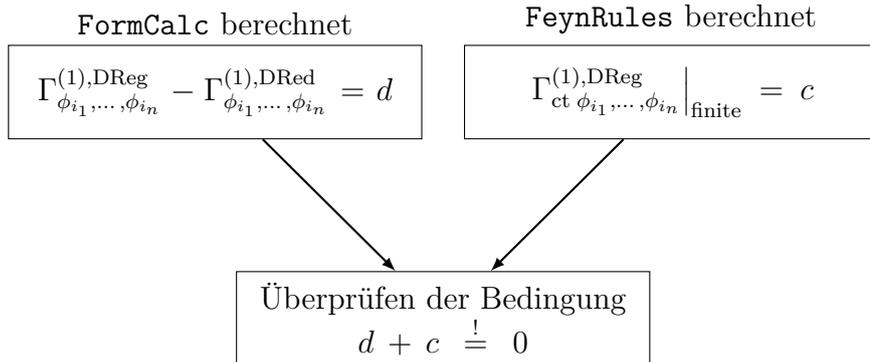


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung der Überprüfung der erstellten Modelldefinition. Genaugenommen berechnet `FormCalc` die Feynmanamplitude eines Streuprozesses einer zugrunde liegenden Topologie. Stellvertretend hierfür wurde jedoch das Symbol einer 1PI Vertexfunktion verwendet, als Bestandteil der Definition einer Feynmanamplitude eines Streuprozesses.

Für alle Counterterme konnte, bis auf die 2-Punktfunktion des Charginos, eine analytische Übereinstimmung mit dem `FormCalc`-Ergebnis erzielt werden. Um die Gleichheit der 2-Punktfunktion des Charginos zu zeigen, musste auf eine numerische Überprüfung zurückgegriffen werden. Hierbei liegt der Unterschied zwischen der durch `FormCalc` ermittelten Differenz der regularisierten Integrale und des Übergangscounterterm von 10^{-27} bis 10^{-32} im Rahmen der numerischen Ungenauigkeit von 10^{-16} . Die Angaben beziehen sich auf `Mathematica` 7.0.0 als 64 Bit-Version.

Da `FormCalc` auf den in Masseneigenzuständen definierten Modelldefinition des MSSM in `FeynArts` aufbaut, jedoch die Übergangscounterterme den Eicheigenzuständen entspringen und anschließend auf Masseneigenzustände rotiert wird, unterscheiden sich die analytische Ausdrücke beider Rechenwege im Allgemeinen zunächst. Grundsätzlich konnte durch Implementierung der Unitaritätseigenschaft $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbf{1}$ der Mischungsmatrizen `UCha`, `VCha`, `ZNeu` und `USf` eine analytische Übereinstimmung hergestellt werden.

7 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden Counterterme berechnet, die den Unterschied zwischen regularisierten 1PI Vertexfunktionen einer allgemeinen, eichinvarianten $N = 1$ supersymmetrischen Theorie mit sanfter Brechung kompensieren. Mit diesen Countertermen ist insbesondere die Supersymmetrie in dimensionaler Regularisierung auf Einschleifeniveau wieder restauriert und wir bezeichnen Counterterme mit diesen Eigenschaften als *Übergangscounterterme*. Analoge Rechnungen wurden bereits in [59] durchgeführt. Die Ergebnisse konnten bestätigt werden und es wurden weitere Counterterme der Feldrenormierung bestimmt.

Die kompensierenden Counterterme der Feld- und Parameterrenormierung wurden auf das MSSM, als phänomenologisch interessanteste $N = 1$ Supersymmetrie, übertragen und in ein Programm implementiert. Dieses Programm baute auf das Programmpaket **FeynRules** auf, mit dessen Hilfe alle Übergangscounterterme der 1PI Vertexfunktionen des MSSM bestimmt wurden. Schwerpunkt der Implementierung der Übergangscounterterme lag hier bei der Erstellung eines **FeynArts** Model Files. Das erstellte Model File ist kompatibel zu der bereits existierenden Implementierung aller Baumgraphenwertes des MSSM in **FeynArts**.

Wenn die Modelldefinition der Übergangscounterterme des MSSM in der Lage ist, alle regularisierungsabhängigen 1PI Vertexfunktionen des MSSM in Einschleifenordnung zu restaurieren, dann stellt dies eine erste Überprüfung der Modelldefinition dar. Eine Überprüfung dieser Art wurde mit Hilfe des Programmpaketes **FormCalc** umgesetzt. Analytisch konnte gezeigt werden, dass die implementierten Counterterme die endlichen Unterschiede zwischen den in dimensionaler Regularisierung und dimensionaler Reduktion regularisierten 1PI Vertexfunktionen in Einschleifenordnung kompensieren. Eine Ausnahme stellt hierbei die Selbstenergie des Charginos dar, die nur numerisch überprüft werden konnte.

Ein weiterer, noch ausstehender Test der erstellten Modelldefinition ist die Reproduktion observabler Ergebnisse. Dies stellt auch gleichzeitig die eigentliche Bestimmung der Modelldefinition der Übergangscounterterme des MSSM dar. So kann es in zukünftigen Prozessberechnungen eingesetzt werden, bei denen die dimensionale Regularisierung gegenüber der dimensionalen Reduktion vorgezogen wird.

Die Implementierung der Übergangscounterterme in **FeynRules** wurde unter dem Anspruch vollzogen, auch Modelldefinitionen von Übergangscountertermen anderer interessanter sanft gebrochener $N = 1$ supersymmetrischer Modelle (NMSSM, USSM, E_6 SSM) zu generieren. Inwiefern die Implementierung dessen mächtig ist und was die Grenzen des Programmpaketes **FeynRules** sind, konnte nicht getestet werden und gibt Anlass für weiterführende Studien.

A Notationen und Definitionen

A.1 Standardintegrale

Das allgemeine Einschleifentensorintegral ist definiert als [76]

$$T_{\mu_1, \dots, \mu_M}^{N-1}(p_1, \dots, p_{N-1}, m_0, \dots, m_{N-1}) = \left\langle \frac{k_{\mu_1} \cdots k_{\mu_M}}{D_0 D_1 \cdots D_{N-1}} \right\rangle_k \quad (\text{A.1})$$

mit der Abkürzung $\langle \dots \rangle_k = \frac{(2\pi\mu)^{(4-D)}}{i\pi^2} \int d^D k \dots$, ($D = 4 - \epsilon$) und den Propagatornennern

$$D_0 = k^2 - m_0^2 + i\epsilon, \quad D_i = (k + p_i)^2 - m_i^2 + i\epsilon, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (\text{A.2})$$

In dieser Arbeit werden folgende Tensorintegrale verwendet

$$B_\mu(p, m_0, m_1) = \left\langle \frac{k_\mu}{[k^2 - m_0^2][(p+k)^2 - m_1^2]} \right\rangle_k \quad (\text{A.3})$$

$$= k_\mu B_1(p^2, m_0, m_1) \quad (\text{A.4})$$

und

$$B_{\mu\nu}(p, m_0, m_1) = \left\langle \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 - m_0^2][(p+k)^2 - m_1^2]} \right\rangle_k \quad (\text{A.5})$$

$$= g_{\mu\nu} B_0(p^2, m_0, m_1) + k_\mu k_\nu B_{11}(p^2, m_0, m_1). \quad (\text{A.6})$$

Die Tensorcoeffizienten B_1, B_{11} und B_0 können mit Hilfe einer algebraischen Reduktion [77] durch skalare Integrale A_0 und B_0 ausgedrückt werden. Diese skalaren Integrale sind definiert als

$$A_0(m) = \left\langle \frac{1}{k^2 - m^2} \right\rangle_k, \quad (\text{A.7})$$

$$B_0(p^2, m_0, m_1) = \left\langle \frac{1}{[k^2 - m_0^2][(p+k)^2 - m_1^2]} \right\rangle_k. \quad (\text{A.8})$$

Es gelten die Beziehungen [78]

$$B_1 = \frac{1}{2} \left[A_0(m_0) - A_0(m_1) - (p^2 - m_1^2 + m_0^2) B_0(p^2, m_0, m_1) \right], \quad (\text{A.9})$$

$$B_{00} = \frac{1}{2(D-1)} \left[A_0(m_1) + 2m_0^2 B_0 + (p^2 - m_1^2 + m_0^2) B_1 \right], \quad (\text{A.10})$$

$$B_{11} = \frac{1}{2(D-1)p^2} \left[(D-2)A_0(m_1) - 2m_0^2 B_0 - D(p^2 - m_1^2 + m_0^2)B_1 \right]. \quad (\text{A.11})$$

Die divergenten Anteile der skalaren Integrale sind gegeben durch [78]

$$A_0 = m^2 \left[\Delta - \log \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) + 1 \right] + \mathcal{O}(D-4), \quad (\text{A.12})$$

$$B_0 = \Delta - \int_0^1 dx \log \left[\frac{x^2 p_1^2 - x(p_1^2 - m_1^2 + m_0^2) + m_0^2 - i\epsilon}{\mu^2} \right] + \mathcal{O}(D-4), \quad (\text{A.13})$$

wobei Δ definiert ist als

$$\Delta = \frac{2}{4-D} - \gamma_E - \log 4\pi \quad \text{mit} \quad \gamma_E \dots \text{Euler-Mascheroni-Konstante} \quad (\text{A.14})$$

A.2 Die Poincaré-Gruppe

Unter dem Minkowski-Raum M versteht man die vier-dimensionale Raum-Zeit, das heißt

$$M = \{ x = (x^\mu)_{\mu=0,1,2,3} = (x^0, \vec{x}) \mid x^\mu \in \mathbb{R}^4 \}. \quad (\text{A.15})$$

M ist mit einer Bilinearform versehen

$$x \cdot y := g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu. \quad (\text{A.16})$$

Dabei ist $g_{\mu\nu}$ der metrische Tensor

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (\text{A.17})$$

Man zeichnet nun diejenigen Matrizen aus, die (A.16) invariant lassen. Die 4×4 Matrix $\Lambda^\mu{}_\nu$ erfüllt genau dann die Gleichung

$$x \cdot y = \Lambda x \cdot \Lambda y, \quad (\text{A.18})$$

wenn Λ der folgenden Bedingungen genügt

$$\Lambda_\mu{}^\nu g_{\nu\lambda} \Lambda^\lambda{}_\kappa = g_{\mu\kappa}. \quad (\text{A.19})$$

Die Menge aller dieser Matrizen bildet eine Gruppe, die Lorentz-Gruppe L . Eine Untergruppe von L ist die eigentliche Lorentz-Gruppe

$$L_+^\uparrow = \{ \Lambda \in L \mid \det \Lambda = 1, \Lambda^0{}_0 \geq 1 \}. \quad (\text{A.20})$$

Die Poincaré-Gruppe P ist die Bewegungsgruppe des Minkowski-Raumes

$$P = \{ (a, \Lambda) \mid a \in \mathbb{R}^4, \Lambda \in L \} \quad x \mapsto a + \Lambda x. \quad (\text{A.21})$$

Die eigentliche Poincaré-Gruppe P_+^\uparrow ist definiert als

$$P_+^\uparrow = \{ (a, \Lambda) \mid a \in \mathbb{R}^4, \Lambda \in L_+^\uparrow \} . \quad (\text{A.22})$$

Die Poincaré-Algebra erhält man aus der infinitesimalen Form einer treuen Darstellung g in einem Vektorraum V

$$g(\Lambda, a) = \mathbb{1}_V - \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} + i a_\mu P^\mu . \quad (\text{A.23})$$

Unter mehrmaliger Anwendung des Kompositionsgesetzes

$$(a_1, \Lambda_1) \cdot (a_2, \Lambda_2) = (a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2) \quad (\text{A.24})$$

ist die Poincaré-Algebra durch folgende Menge von Kommutatoren definiert

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 , \quad (\text{A.25})$$

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\rho} P^\sigma - g^{\mu\sigma} P^\rho) , \quad (\text{A.26})$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho}) . \quad (\text{A.27})$$

Um die irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Gruppe zu klassifizieren, benutzt man die Eigenwerte der Casimir-Operatoren $P^2 = P^\mu P_\mu$ und $W^2 = W^\mu W_\mu$ mit $W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma$, der auch als Pauli–Lubanski-Vektor bezeichnet wird. Da diese als Casimir-Operatoren die Eigenschaft haben, mit allen Generatoren der Poincaré-Gruppe zu vertauschen, müssen sie nach dem Lemma von Schur Vielfache des Einheitsoperators sein. Die numerischen Koeffizienten können genutzt werden um die Eigenräume der Casimir-Operatoren zu klassifizieren. Die Eigenwerte korrespondieren zu Masse und Spin des Ein-Teilchen-Zustandsraumes, als irreduzibler Darstellungsraum der Poincaré-Gruppe. Beschränkt man sich nur auf positive Massen, muss man nur zwischen zwei Fällen unterscheiden. Einerseits der Fall für nicht-verschwindende Massen und andererseits für verschwindende Massen. Im letzteren Fall verschwinden alle Eigenwerte von W^2 und können somit nicht zur Klassifizierung herangezogen werden. Jedoch ist in diesem Fall der Pauli–Lubanski-Vektor W_μ proportional zu P_μ

$$W_\mu = H P_\mu = P_\mu H \quad (\text{A.28})$$

und es kann die skalare Größe H zur Klassifizierung genutzt werden. Sie wird auch Helizität genannt.

A.3 Zweikomponentige Spinordarstellung

Zweikomponentige Weyl-Spinoren ψ_A ($A = 1, 2$) transformieren unter der $(\frac{1}{2}, 0)$ -Darstellung der Lorentz-Gruppe

$$\psi'_A = M_A^B \psi_B , \quad (\text{A.29})$$

wobei $M_A{}^B$ als komplexe 2×2 Matrix ein Element der $SL(2, C)$ -Gruppe darstellt. Der Weyl-Spinor $\bar{\psi}_{\dot{A}}$ ($\dot{A} = 1, 2$) transformiert unter der komplex konjugierten Darstellung $(0, \frac{1}{2})$ der Lorentz-Gruppe

$$\bar{\psi}'_{\dot{A}} = (M^*)_{\dot{A}}{}^{\dot{B}} \bar{\psi}_{\dot{B}}. \quad (\text{A.30})$$

Für diese Spinoren gelten die Beziehungen

$$\psi_A = (\bar{\psi}_{\dot{A}})^\dagger, \quad \psi^A = (\bar{\psi}^{\dot{A}})^\dagger, \quad (\text{A.31})$$

$$\psi^A = \epsilon^{AB} \psi_B, \quad \psi_A = \epsilon_{AB} \psi^B, \quad (\text{A.32})$$

$$\bar{\chi}^{\dot{A}} = \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} \bar{\chi}_{\dot{B}}, \quad \bar{\chi}_{\dot{A}} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} \bar{\chi}^{\dot{B}}. \quad (\text{A.33})$$

wobei die antisymmetrischen Tensor ϵ^{AB} und ϵ_{AB} gegeben sind als

$$\epsilon^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.34})$$

mit der Eigenschaft $\epsilon^{AB} \epsilon_{BC} = \delta_C^A$. Man verlangt, dass die Spinorkomponenten von ψ_A und $\bar{\chi}^{\dot{A}}$ Grassmann-Variablen sind, d.h.

$$\{\psi_A, \psi^B\} = \{\psi_A, \psi_B\} = \{\psi^A, \psi^B\} = 0 \quad (\text{A.35})$$

und

$$\{\bar{\chi}_{\dot{A}}, \bar{\chi}^{\dot{B}}\} = \{\bar{\chi}_{\dot{B}}, \bar{\chi}_{\dot{B}}\} = \{\bar{\chi}^{\dot{B}}, \bar{\chi}^{\dot{B}}\} = 0. \quad (\text{A.36})$$

Somit ist das $SL(2, C)$ invariante Spinorprodukt

$$\psi\chi := \psi^A \chi_A, \quad (\text{A.37})$$

$$\bar{\chi}\bar{\psi} := \bar{\chi}_{\dot{A}} \bar{\psi}^{\dot{A}} = (\psi\chi)^\dagger \quad (\text{A.38})$$

nicht Null. Für antikommutierende Spinorkomponenten ist dieses Produkt symmetrisch

$$\psi\chi = \chi\psi = (\bar{\psi}\bar{\chi})^\dagger = (\bar{\chi}\bar{\psi})^\dagger. \quad (\text{A.39})$$

Mit Hilfe der zweikomponentigen Spinoren können höherdimensionale Darstellungen der Lorentz-Gruppe gebildet werden. Ein Dirac-Spinor Ψ transformiert unter der $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ -Darstellung, welcher sich mittels der Weyl-Spinoren ausdrücken lässt als

$$\Psi_a = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \bar{\chi}^{\dot{A}} \end{pmatrix}, \quad (a = 1, 2, 3, 4), (A = 1, 2), (\dot{A} = \dot{1}, \dot{2}). \quad (\text{A.40})$$

Die chirale Projektion von Ψ auf ψ ist durch $P_L \Psi = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\Psi \equiv \Psi_L$ gegeben. In ähnlicher Weise ist $P_R \Psi = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Psi \equiv \Psi_R$ die chirale Projektion von Ψ auf die

Komponente $\bar{\chi}$.

Adjungierte und ladungskonjugierte vierkomponentige Dirac-Spinoren sind wie folgt definiert

$$\bar{\Psi} := \Psi^\dagger \gamma^0, \quad \Psi^C := i\gamma^2 \bar{\Psi}^T. \quad (\text{A.41})$$

Für die explizite Indexstruktur der Weyl-Spinoren gilt somit

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \bar{\chi}^{\dot{A}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \chi^A & \bar{\psi}_{\dot{A}} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.42})$$

$$\Psi^C = \begin{pmatrix} \chi_A \\ \bar{\psi}^{\dot{A}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}^C = \begin{pmatrix} \psi^A & \bar{\chi}_{\dot{A}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.43})$$

Majoranaspinoren erfüllen die Einschränkung $\Psi^C = \Psi$.

Es gelten folgende wichtige Relationen zwischen Dirac- und Weyl-Spinoren

$$\bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \Psi_{2L} = \bar{\psi}_1 \bar{\sigma}^\mu \psi_2, \quad (\text{A.44})$$

$$\bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \Psi_{2R} = \chi_1 \sigma^\mu \bar{\chi}_2, \quad (\text{A.45})$$

$$\bar{\Psi}_1^C \Psi_2 = \psi_1 \psi_2 + \chi_1 \chi_2. \quad (\text{A.46})$$

Für Majoranaspinoren $\tilde{\lambda}^T = (\lambda, \bar{\lambda}^T)$ gilt insbesondere

$$\bar{\tilde{\lambda}}_1 \tilde{\lambda}_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 = \bar{\tilde{\lambda}}_2 \tilde{\lambda}_1. \quad (\text{A.47})$$

Wichtige Beziehungen zwischen Majorana- und Dirac-Spinoren sind

$$\bar{\tilde{\lambda}} \Psi_L = \lambda \psi, \quad \bar{\Psi}_L \tilde{\lambda} = \bar{\lambda} \bar{\psi}, \quad (\text{A.48})$$

$$\bar{\tilde{\lambda}} \Psi_R = \bar{\lambda} \bar{\chi}, \quad \bar{\Psi}_R \tilde{\lambda} = \lambda \chi. \quad (\text{A.49})$$

Dies ist nur ein kleiner Auszug von weiteren Spinoridentitäten [29]. Für eine umfassende Darstellung des Spinorkalküls sei auf [28] verwiesen.

A.4 Die Funktionalableitung

Im Folgenden soll kurz auf den Begriff der Funktionalableitung eingegangen werden. Ohne zu stark auf mathematische Strenge zu achten, soll hier viel mehr der Definition und einiger Eigenschaften dieser Operation Beachtung geschenkt werden.

Sei V ein unendlichdimensionaler Vektorraum mit einer Topologie. Dies garantiert, dass man den Begriff der Stetigkeit einer Abbildung definieren kann. Funktionale sind nichtlineare Abbildungen von einem Funktionenraum $V = \{ \phi(x) \mid x \in \mathbb{R} \}$ auf die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} . Ist $\Gamma: V \rightarrow \mathbb{R}$ solch ein Funktional, so definiert man die

Ableitung von Γ in $\phi \in V$ in Richtung $\eta \in V$ durch

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\Gamma[\phi + \epsilon\eta] - \Gamma[\phi] \right) =: \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi}[\eta]. \quad (\text{A.50})$$

Die Existenz und Stetigkeit des Limes überträgt sich auf die Ableitung, welche linear in η ist. Ist V ein Hilbert-Raum, so lässt sich jede lineare Abbildung $V \rightarrow \mathbb{R}$ mit einem Vektor aus V identifizieren. Als Beispiel sei $V = C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $\gamma \in V$, so ist die Abbildung

$$T_\gamma: \phi \mapsto \int dx \phi(x)\gamma(x) \quad (\text{A.51})$$

linear und stetig. Demnach existiert zu jeder Funktion γ ein lineares Funktional T_γ . Das so definierte Funktional (A.50) ist höchstens linear.

Zur Verdeutlichung des Sprachgebrauchs sollen einige konkrete Beispiele eines Funktionals betrachtet werden.

Lineares Funktional

Ist das Funktional Γ aus (A.50) selbst linear, so gilt $\Gamma[\phi + \epsilon\eta] - \Gamma[\phi] = \epsilon\Gamma[\eta]$. Damit erhält man

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi}[\eta] = \Gamma[\eta] \quad \text{oder auch} \quad \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi} = \Gamma. \quad (\text{A.52})$$

Insbesondere gilt für (A.51)

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi}[\eta] = \Gamma[\eta] = \int dx \eta(x)\gamma(x). \quad (\text{A.53})$$

Hieran erkennt man die Doppeldeutigkeit der Funktionalableitung, denn es lässt sich schreiben

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi} = \frac{\delta T_\gamma[\phi]}{\delta\phi} = T_\gamma = \gamma. \quad (\text{A.54})$$

Wie in dem Beispiel oben erwähnt, ist es also erlaubt die Distribution erzeugende Funktion γ mit der Distribution T_γ selber zu identifizieren.

δ -Distribution

Die δ -Distribution ist definiert als $\Gamma[\phi] = \delta_{x_0}[\phi] = \phi(x_0)$. Es gilt nach obiger Diskussion

$$\frac{\delta\delta_{x_0}[\phi]}{\delta\phi} = \delta_{x_0}, \quad (\text{A.55})$$

wobei man dazu geneigt sein könnte, dies auch etwas anders zu notieren

$$\frac{\delta f(x_0)}{\delta f(x)} = \delta(x - x_0) . \quad (\text{A.56})$$

Anschaulich gesprochen sind $\phi(x)$ und $\phi(x_0)$ solange voneinander unabhängig wie $x \neq x_0$ gilt. Des Weiteren nimmt man an, dass die δ -Distribution eine reguläre Distribution sein möge, es also eine Funktion $\delta(x - x_0)$ im Sinn von (A.51) existiert. Es lässt sich jedoch zeigen, dass dies nur im formalen Sinn zu verstehen ist und eine Funktion mit derartigen Eigenschaften nicht existieren kann.

Kettenregel

Ist Γ ein Funktional der Form

$$\Gamma[\phi] = \int dx \Phi(\phi(x)) , \quad (\text{A.57})$$

mit einer Funktion $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welche einmal stetig differenzierbar ist, so gilt

$$\frac{1}{\epsilon} \left(\Gamma[\phi + \epsilon\eta] - \Gamma[\phi] \right) = \frac{1}{\epsilon} \int dx \left(\Phi(\phi(x) + \epsilon\eta(x)) - \Phi(\phi(x)) \right) \quad (\text{A.58})$$

$$= \frac{1}{\epsilon} \int dx \left(\Phi'(\phi(x)) \epsilon\eta(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2\eta(x)^2) \right) . \quad (\text{A.59})$$

Damit erhält man für die Funktionalableitung

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi}[\eta] = \int dx \Phi'(\phi(x)) \eta(x), \quad (\text{A.60})$$

beziehungsweise in einer formalen Notation

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi} = \Phi'(\phi(x)) . \quad (\text{A.61})$$

Vertauschung mit ∂_x

Ist Γ ein Funktional, so definiert $\Lambda[\phi] := \Gamma[\phi']$ ein neues Funktional Λ , dass nur noch von der Ableitung $\phi' =: \partial_x\phi$ abhängt. Um hierfür die Funktionalableitung zu berechnen, sei kurz der Begriff der distributiven Ableitung erläutert.

Ist V ein Raum differenzierbarer Funktionen auf \mathbb{R} und T_γ wie in (A.51) definiert, so kann man partiell integrieren

$$T_{\gamma'}[\phi] = \int dx \gamma'(x)\phi(x) = - \int dx \gamma(x)\phi'(x) = -T_\gamma[\phi'] . \quad (\text{A.62})$$

Bei der partiellen Integration wurde verwendet, dass die Randterme wegen der gewählten Eigenschaft der Testfunktion γ wegfallen. Die distributive Ableitung von Γ

ist durch

$$\Gamma'[\phi] := -\Gamma[\phi'] \quad (\text{A.63})$$

definiert und es gilt insbesondere

$$(T_\gamma)' = T_{\gamma'} . \quad (\text{A.64})$$

Jedes lineare stetige Funktionale auf Funktionenräumen ist in dieser Weise differenzierbar.

Letztendlich ist man somit in der Lage die Funktionalableitung für Λ zu berechnen. Dies geschieht wie folgt

$$\frac{1}{\epsilon} \left(\Lambda[\phi + \epsilon\eta] - \Lambda[\phi] \right) = \frac{1}{\epsilon} \left(\Gamma[\phi' + \epsilon\eta'] - \Gamma[\phi'] \right) \quad (\text{A.65})$$

und unter Anwendung der Definition der distributiven Ableitung erhält man

$$\frac{\delta\Gamma[\phi']}{\delta\phi'} [\eta'] = -\partial_x \frac{\delta\Gamma[\phi']}{\delta\phi'} [\eta] . \quad (\text{A.66})$$

Dadurch ist die Aussage der Vertauschung von distributiver und Funktionalableitung gerechtfertigt, sofern man für Γ ganz in Analogie zur distributiven Ableitung $\Gamma'[\phi] := -\Gamma[\phi']$ definiert. Damit gilt folgender Zusammenhang

$$\frac{\Gamma'[\phi]}{\delta\phi} = -\frac{\delta\Gamma[\phi']}{\delta\phi} = \partial_x \frac{\delta\Gamma[\phi']}{\delta\phi'} [\eta] . \quad (\text{A.67})$$

Auch dies lässt sich als Merkgel wieder in einer etwas anderen Notation fassen

$$\frac{\delta\phi'(x_0)}{\delta\phi(x)} = \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \frac{\partial\phi(x_0)}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\delta\phi(x_0)}{\delta\phi(x)} = \frac{\partial}{\partial x_0} \delta(x - x_0) = \delta'(x - x_0) . \quad (\text{A.68})$$

Dies ist ein Beispiel, wo der Unterschied zur gewöhnlichen partiellen Differentiation besonders gravierend ist. Da die Funktion ϕ die Ableitung ϕ' festlegt, resultiert daraus das Nichtverschwinden der Funktionalableitung.

B Feynmanregeln der Einschleifencounterterme

B.1 Übergangscounterterm Lagrangedichte des MSSM

$$\mathcal{L}^{\text{restore}} = \mathcal{L}_{2\text{-pt}}^{\text{trans}} + \mathcal{L}_{\text{gaugino}}^{\text{trans}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}}^{\text{trans}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{trans}} + \mathcal{L}_{\text{quartic}}^{\text{trans}} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2\text{-pt}}^{\text{trans}} = & \frac{g_2^2}{16\pi^2} \left(i\bar{\lambda}_W^a \gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\lambda}_W^a - 2m_{\lambda_W} \bar{\lambda}_W^a P_L \tilde{\lambda}_W^a - 2m_{\lambda_W}^* \bar{\lambda}_W^a P_R \tilde{\lambda}_W^a \right) \\ & + \frac{3g_3^2}{32\pi^2} \left(i\bar{\lambda}_G^a \gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\lambda}_G^a - 2m_{\lambda_G} \bar{\lambda}_G^a P_L \tilde{\lambda}_G^a - 2m_{\lambda_G}^* \bar{\lambda}_G^a P_R \tilde{\lambda}_G^a \right) \\ & + \frac{i(g_1^2 + 27g_2^2 + 48g_3^2)}{576\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{Q_{f_1, i_1, c_1}} \gamma_\mu \partial^\mu P_L \Psi_{Q_{f_1, i_1, c_1}} \right) \\ & + \frac{i(g_1^2 + 3g_2^2)}{64\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{l_{f_1, i_1}} \gamma_\mu \partial^\mu P_L \Psi_{l_{f_1, i_1}} \right) \\ & + \frac{i(g_1^2 + 3g_2^2)}{64\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{H_u i_1} \gamma_\mu \partial^\mu P_L \Psi_{H_u i_1} \right) \\ & + \frac{i(g_1^2 + 3g_2^2)}{64\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{H_d i_1} \gamma_\mu \partial^\mu P_L \Psi_{H_d i_1} \right) \\ & + \frac{i(g_1^2 + 3g_3^2)}{36\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{u_{f_1, c_1}}^C \gamma_\mu \partial^\mu P_L \Psi_{u_{f_1, c_1}}^C \right) \\ & + \frac{i(g_1^2 + 12g_3^2)}{144\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{d_{f_1, c_1}}^C \gamma_\mu \partial^\mu P_L \Psi_{d_{f_1, c_1}}^C \right) \\ & + \frac{ig_1^2}{16\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{e_{f_1}}^C \gamma_\mu \partial^\mu P_L \Psi_{e_{f_1}}^C \right) \\ & + \frac{g_1^2 + 3g_2^2}{32\pi^2} \left(\mu \epsilon_{i_1 i_2} (\bar{\Psi}_{H_d})_{i_1}^C P_L \Psi_{H_u i_2} + \mu^* \epsilon_{i_1 i_2}^\dagger \bar{\Psi}_{H_u i_2} P_R (\Psi_{H_d})_{i_1}^C \right) \\ & - \frac{g_2^2}{48\pi^2} \left((\partial_\mu V_{W\nu}^a) (\partial^\mu V_W^{\nu, a}) - (\partial^\mu V_{W\mu}^a) (\partial^\nu V_{W\nu}^a) \right) \\ & - \frac{g_3^2}{32\pi^2} \left((\partial_\mu V_{G\nu}^a) (\partial^\mu V_G^{\nu, a}) - (\partial^\mu V_{G\mu}^a) (\partial^\nu V_{G\nu}^a) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{gaugino}}^{\text{trans}} = & -\frac{g_2^3}{4\sqrt{2}\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{l_{f_1, i_1}} P_R \tilde{\lambda}_W^a \phi_{l_{f_1, i_2}} + \tilde{\lambda}_W^a P_L \Psi_{l_{f_1, i_2}} \phi_{l_{f_1, i_1}}^* \right) \tau_{i_1 i_2}^a \\
& -\frac{g_2^3}{4\sqrt{2}\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{H_u i_1} P_R \tilde{\lambda}_W^a \phi_{H_u i_2} + \tilde{\lambda}_W^a P_L \Psi_{H_u i_2} \phi_{H_u i_1}^* \right) \tau_{i_1 i_2}^a \\
& -\frac{g_2^3}{4\sqrt{2}\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{H_d i_1} P_R \tilde{\lambda}_W^a \phi_{H_d i_2} + \tilde{\lambda}_W^a P_L \Psi_{H_d i_2} \phi_{H_d i_1}^* \right) \tau_{i_1 i_2}^a \\
& -\frac{g_2^3}{4\sqrt{2}\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{Q_{f_1, i_1, c_1}} P_R \tilde{\lambda}_W^a \phi_{Q_{f_1, i_2, c_1}} + \tilde{\lambda}_W^a P_L \Psi_{Q_{f_1, i_2, c_1}} \phi_{Q_{f_1, i_1, c_1}}^* \right) \tau_{i_1 i_2}^a \quad (\text{B.3}) \\
& -\frac{3g_3^3}{8\sqrt{2}\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{Q_{f_1, i_1, c_1}} P_R \tilde{\lambda}_G^a \phi_{Q_{f_1, i_1, c_2}} + \tilde{\lambda}_G^a P_L \Psi_{Q_{f_1, i_1, c_2}} \phi_{Q_{f_1, i_1, c_1}}^* \right) T_{c_1 c_2}^a \\
& +\frac{3g_3^3}{8\sqrt{2}\pi^2} \left(\tilde{\lambda}_G^a P_L \Psi_{u_{f_1, c_2}}^C \phi_{u_{f_1, c_1}} + \bar{\Psi}_{u_{f_1, c_1}}^C P_R \tilde{\lambda}_G^a \phi_{u_{f_1, c_2}}^* \right) T_{c_2 c_1}^a \\
& +\frac{3g_3^3}{8\sqrt{2}\pi^2} \left(\tilde{\lambda}_W^a P_L \Psi_{d_{f_1, c_2}}^C \phi_{d_{f_1, c_1}} + \bar{\Psi}_{d_{f_1, c_1}}^C P_R \tilde{\lambda}_W^a \phi_{d_{f_1, c_2}}^* \right) T_{c_2 c_1}^a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{gauge}}^{\text{trans}} = & -\frac{g_1 (g_1^2 + 27g_2^2 + 48g_3^2)}{3456\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{Q_{f_1, i_1, c_1}} \gamma_\mu P_L \Psi_{Q_{f_1, i_1, c_1}} V_B^\mu \right) \\
 & + \frac{g_1^3 + 3g_2^2 g_1}{128\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{l_{f_1, i_1}} \gamma_\mu P_L \Psi_{l_{f_1, i_1}} V_B^\mu \right) \\
 & - \frac{g_1 (g_1^2 + 3g_2^2)}{128\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{H_{u i_1}} \gamma_\mu P_L \Psi_{H_{u i_1}} V_B^\mu \right) \\
 & + \frac{g_1 (g_1^2 + 3g_2^2)}{128\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{H_{d i_1}} \gamma_\mu P_L \Psi_{H_{d i_1}} V_B^\mu \right) \\
 & + \frac{g_1 (g_1^2 + 3g_3^2)}{54\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{u_{f_1, c_1}}^C \gamma_\mu P_L \Psi_{u_{f_1, c_1}}^C V_B^\mu \right) \\
 & - \frac{g_1 (g_1^2 + 12g_3^2)}{432\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{d_{f_1, c_1}}^C \gamma_\mu P_L \Psi_{d_{f_1, c_1}}^C V_B^\mu \right) \\
 & - \frac{g_1^3}{16\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{e_{f_1}}^C \gamma_\mu P_L \Psi_{e_{f_1}}^C V_B^\mu \right) \\
 & - \frac{g_2 (g_1^2 + 27g_2^2 + 48g_3^2)}{576\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{Q_{f_1, i_1, c_1}} \gamma^\mu P_L \Psi_{Q_{f_1, i_2, c_1}} \tau_{i_1 i_2}^a V_{W\mu}^a \right) \\
 & - \frac{g_2 (g_1^2 + 3g_2^2)}{64\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{l_{f_1, i_1}} \gamma^\mu P_L \Psi_{l_{f_1, i_2}} \tau_{i_1 i_2}^a V_{W\mu}^a \right) \\
 & - \frac{g_2 (g_1^2 + 3g_2^2)}{64\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{H_{u i_1}} \gamma^\mu P_L \Psi_{H_{u i_2}} \tau_{i_1 i_2}^a V_{W\mu}^a \right) \\
 & - \frac{g_2 (g_1^2 + 3g_2^2)}{64\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{H_{d i_1}} \gamma^\mu P_L \Psi_{H_{d i_2}} \tau_{i_1 i_2}^a V_{W\mu}^a \right) \\
 & - \frac{g_3 (g_1^2 + 27g_2^2 + 48g_3^2)}{576\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{Q_{f_1, i_1, c_1}} \gamma^\mu P_L \Psi_{Q_{f_1, i_1, c_2}} T_{c_1 c_2}^a V_{G\mu}^a \right) \\
 & + \frac{g_3 (g_1^2 + 3g_3^2)}{36\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{u_{f_1, c_1}}^C \gamma^\mu P_L \Psi_{u_{f_1, c_2}}^C T_{c_2 c_1}^a V_{G\mu}^a \right) \\
 & + \frac{g_3 (g_1^2 + 12g_3^2)}{144\pi^2} \left(\bar{\Psi}_{d_{f_1, c_1}}^C \gamma^\mu P_L \Psi_{d_{f_1, c_2}}^C T_{c_2 c_1}^a V_{G\mu}^a \right) \\
 & - \frac{ig_2^3}{16\pi^2} \left(\bar{\lambda}_W^a \gamma_\mu \tilde{\lambda}_W^c \varepsilon^{abc} V_W^{b, \mu} \right) - \frac{3ig_3^3}{32\pi^2} \left(\bar{\lambda}_G^a \gamma_\mu \tilde{\lambda}_G^c f^{abc} V_G^{b, \mu} \right) \\
 & - \frac{g_2^3}{24\pi^2} \left(\varepsilon^{abc} V_{W\mu}^a V_{W\nu}^b (\partial^\nu V_W^{c, \mu}) \right) - \frac{g_3^3}{16\pi^2} \left(f^{abc} V_{G\mu}^a V_{G\nu}^b (\partial^\nu V_G^{c, \mu}) \right) \\
 & - \frac{g_2^4}{96\pi^2} \left(\varepsilon^{abc} \varepsilon^{ade} V_{W\mu}^b V_W^{d, \mu} V_{W\nu}^c V_W^{e, \nu} \right) \\
 & - \frac{g_3^4}{64\pi^2} \left(f^{abc} f^{ade} V_{G\mu}^b V_G^{d, \mu} V_{G\nu}^c V_G^{e, \nu} \right)
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{trans}} = & \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \epsilon_{i_1 i_2}^\dagger y_{f_2 f_3}^{e^\dagger} \left[(g_1^2 - 3g_2^2) \bar{\Psi}_{l_{f_2, i_2}} P_R (\Psi_{H_d})_{i_1}^C \phi_{e f_3} \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2g_1^2 \left(\bar{\Psi}_{e f_3}^C P_R (\Psi_l)_{f_2, i_2}^C \phi_{H_d i_1}^* + \bar{\Psi}_{H_d i_1} P_R \Psi_{e f_3} \phi_{l_{f_2, i_2}}^* \right) \right] \right. \\
 & + \epsilon_{i_1 i_2} y_{f_2 f_3}^e \left[(g_1^2 - 3g_2^2) (\bar{\Psi}_{H_d})_{i_1}^C P_L \Psi_{l_{f_2, i_2}} \phi_{e f_3}^* \right. \\
 & \left. \left. - 2g_1^2 \left((\bar{\Psi}_l)_{f_2, i_2}^C P_L \Psi_{e f_3}^C \phi_{H_d i_1} + \bar{\Psi}_{e f_3} P_L \Psi_{H_d i_1} \phi_{l_{f_2, i_2}} \right) \right] \right\} \\
 - & \frac{1}{288\pi^2} \left\{ \epsilon_{i_1 i_2}^\dagger y_{f_2 f_3}^{d^\dagger} \left[3 (g_1^2 + 9g_2^2) \bar{\Psi}_{Q_{f_2, i_2, c_2}} P_R (\Psi_{H_d})_{i_1}^C \phi_{d f_3, c_2} \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2 (g_1^2 - 24g_3^2) \bar{\Psi}_{d_{f_3, c_2}}^C P_R (\Psi_Q)_{f_2, i_2, c_2}^C \phi_{H_d i_1}^* \right. \right. \\
 & \left. \left. + 6g_1^2 \bar{\Psi}_{H_d i_1} P_R \Psi_{d_{f_3, c_2}} \phi_{Q_{f_2, i_2, c_2}}^* \right] \right. \\
 & + \epsilon_{i_1 i_2} y_{f_2 f_3}^d \left[3 (g_1^2 + 9g_2^2) (\bar{\Psi}_{H_d})_{i_1}^C P_L \Psi_{Q_{f_2, i_2, c_2}} \phi_{d f_3, c_2}^* \right. \\
 & \left. \left. - 2 (g_1^2 - 24g_3^2) (\bar{\Psi}_Q)_{f_2, i_2, c_2}^C P_L \Psi_{d_{f_3, c_2}}^C \phi_{H_d i_1} \right. \right. \\
 & \left. \left. + 6g_1^2 \bar{\Psi}_{d_{f_3, c_2}} P_L \Psi_{H_d i_1} \phi_{Q_{f_2, i_2, c_2}} \right] \right\} \\
 - & \frac{1}{288\pi^2} \left\{ \epsilon_{i_1 i_2}^\dagger y_{f_1 f_3}^{u^\dagger} \left[4 (g_1^2 + 12g_3^2) \bar{\Psi}_{Q_{f_1, i_1, c_3}} P_R \Psi_{u_{f_3, c_3}} \phi_{H_u i_2}^* \right. \right. \\
 & \left. \left. + 12g_1^2 \bar{\Psi}_{u_{f_3, c_3}}^C P_R (\Psi_{H_u})_{i_2}^C \phi_{Q_{f_1, i_1, c_3}}^* \right. \right. \\
 & \left. \left. + 3 (g_1^2 - 9g_2^2) \bar{\Psi}_{H_u i_2} P_R (\Psi_Q)_{f_1, i_1, c_3}^C \phi_{u_{f_3, c_3}} \right] \right. \\
 & + \epsilon_{i_1 i_2} y_{f_1 f_3}^u \left[4 (g_1^2 + 12g_3^2) \bar{\Psi}_{u_{f_3, c_3}} P_L \Psi_{Q_{f_1, i_1, c_3}} \phi_{H_u i_2} \right. \\
 & \left. \left. + 12g_1^2 (\bar{\Psi}_{H_u})_{i_2}^C P_L \Psi_{u_{f_3, c_3}}^C \phi_{Q_{f_1, i_1, c_3}} \right. \right. \\
 & \left. \left. + 3 (g_1^2 - 9g_2^2) (\bar{\Psi}_Q)_{f_1, i_1, c_3}^C P_L \Psi_{H_u i_2} \phi_{u_{f_3, c_3}}^* \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{quartic}}^{\text{trans}} = & \frac{1}{5184\pi^2} \phi_{d_{f_1, c_1}} \phi_{d_{f_2, c_2}} \left[9g_3^2 (8g_1^2 + 15g_3^2) \phi_{d_{f_1, c_2}}^* \phi_{d_{f_2, c_1}}^* \right. \\
 & \left. + (8g_1^4 - 24g_3^2 g_1^2 + 99g_3^4) \phi_{d_{f_1, c_1}}^* \phi_{d_{f_2, c_2}}^* \right] \\
 & + \frac{g_1^4}{144\pi^2} \phi_{d_{f_1, c_1}} \phi_{d_{f_1, c_1}}^* \phi_{H_{di_2}} \phi_{H_{di_2}}^* + \frac{g_1^4}{144\pi^2} \phi_{d_{f_1, c_1}} \phi_{d_{f_1, c_1}}^* \phi_{H_{ui_2}} \phi_{H_{ui_2}}^* \\
 & + \frac{g_1^4}{144\pi^2} \phi_{d_{f_1, c_1}} \phi_{d_{f_1, c_1}}^* \phi_{l_{f_2, i_2}} \phi_{l_{f_2, i_2}}^* \\
 & + \frac{1}{2592\pi^2} \phi_{d_{f_1, c_1}} \phi_{Q_{f_2, i_2, c_2}} \left[9g_3^2 (15g_3^2 - 4g_1^2) \phi_{d_{f_1, c_2}}^* \phi_{Q_{f_2, i_2, c_1}}^* \right. \\
 & \left. + (2g_1^4 + 12g_3^2 g_1^2 + 99g_3^4) \phi_{d_{f_1, c_1}}^* \phi_{Q_{f_2, i_2, c_2}}^* \right] \\
 & + \frac{1}{2592\pi^2} \phi_{d_{f_1, c_1}} \phi_{u_{f_2, c_2}} \left[9g_3^2 (15g_3^2 - 16g_1^2) \phi_{d_{f_1, c_2}}^* \phi_{u_{f_2, c_1}}^* \right. \\
 & \left. + (32g_1^4 + 48g_3^2 g_1^2 + 99g_3^4) \phi_{d_{f_1, c_1}}^* \phi_{u_{f_2, c_2}}^* \right] \\
 & + \frac{g_1^4}{36\pi^2} \phi_{d_{f_2, c_2}} \phi_{d_{f_2, c_2}}^* \phi_{e_{f_1}} \phi_{e_{f_1}}^* + \frac{g_1^4}{8\pi^2} \phi_{e_{f_1}} \phi_{e_{f_1}}^* \phi_{e_{f_2}} \phi_{e_{f_2}}^* \\
 & + \frac{g_1^4}{16\pi^2} \phi_{e_{f_1}} \phi_{e_{f_1}}^* \phi_{H_{di_2}} \phi_{H_{di_2}}^* + \frac{g_1^4}{16\pi^2} \phi_{e_{f_1}} \phi_{e_{f_1}}^* \phi_{H_{ui_2}} \phi_{H_{ui_2}}^* \\
 & + \frac{g_1^4}{16\pi^2} \phi_{e_{f_1}} \phi_{e_{f_1}}^* \phi_{l_{f_2, i_2}} \phi_{l_{f_2, i_2}}^* + \frac{g_1^4}{144\pi^2} \phi_{e_{f_1}} \phi_{e_{f_1}}^* \phi_{Q_{f_2, i_2, c_2}} \phi_{Q_{f_2, i_2, c_2}}^* \\
 & + \frac{g_1^4}{9\pi^2} \phi_{e_{f_1}} \phi_{e_{f_1}}^* \phi_{u_{f_2, c_2}} \phi_{u_{f_2, c_2}}^* \\
 & + \frac{1}{128\pi^2} \phi_{H_{di_3}} \phi_{H_{di_1}}^* \phi_{H_{di_4}} \phi_{H_{di_2}}^* \\
 & \times \left[g_1^4 \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} + 4g_2^2 \left(2g_1^2 (\tau_{i_1 i_4}^a \tau_{i_2 i_3}^a) + g_2^2 (\{\tau^a, \tau^b\}_{i_1 i_3} \{\tau^a, \tau^b\}_{i_2 i_4}) \right) \right] \\
 & + \frac{1}{64\pi^2} \phi_{H_{di_3}} \phi_{H_{di_1}}^* \phi_{H_{ui_4}} \phi_{H_{ui_2}}^* \\
 & \times \left[g_1^4 \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + 4g_2^2 \left(-2g_1^2 (\tau_{i_1 i_3}^a \tau_{i_2 i_4}^a) + g_2^2 (\{\tau^a, \tau^b\}_{i_1 i_3} \{\tau^a, \tau^b\}_{i_2 i_4}) \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{64\pi^2} \phi_{Hd i_3} \phi_{Hd i_1}^* \phi_{l f_2, i_4} \phi_{l f_2, i_2}^* \\
& \quad \times \left[g_1^4 \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + 4g_2^2 \left(2g_1^2 (\tau_{i_1 i_3}^a \tau_{i_2 i_4}^a) + g_2^2 (\{\tau^a, \tau^b\}_{i_1 i_3} \{\tau^a, \tau^b\}_{i_2 i_4}) \right) \right] \\
& + \frac{1}{576\pi^2} \phi_{Hd i_3} \phi_{Hd i_1}^* \phi_{Q f_2, i_4, c_2} \phi_{Q f_2, i_2, c_2}^* \\
& \quad \times \left[g_1^4 \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + 12g_2^2 \left(-2g_1^2 (\tau_{i_1 i_3}^a \tau_{i_2 i_4}^a) + 3g_2^2 (\{\tau^a, \tau^b\}_{i_1 i_3} \{\tau^a, \tau^b\}_{i_2 i_4}) \right) \right] \\
& + \frac{1}{128\pi^2} \phi_{Hu i_3} \phi_{Hu i_1}^* \phi_{Hu i_4} \phi_{Hu i_2}^* \\
& \quad \times \left[g_1^4 \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} + 4g_2^2 \left(2g_1^2 (\tau_{i_1 i_4}^a \tau_{i_2 i_3}^a) + g_2^2 (\{\tau^a, \tau^b\}_{i_1 i_3} \{\tau^a, \tau^b\}_{i_2 i_4}) \right) \right] \\
& + \frac{1}{64\pi^2} \phi_{Hu i_3} \phi_{Hu i_1}^* \phi_{l f_2, i_4} \phi_{l f_2, i_2}^* \\
& \quad \times \left[g_1^4 \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + 4g_2^2 \left(-2g_1^2 (\tau_{i_1 i_3}^a \tau_{i_2 i_4}^a) + g_2^2 (\{\tau^a, \tau^b\}_{i_1 i_3} \{\tau^a, \tau^b\}_{i_2 i_4}) \right) \right] \\
& + \frac{1}{576\pi^2} \phi_{Hu i_3} \phi_{Hu i_1}^* \phi_{Q f_2, i_4, c_2} \phi_{Q f_2, i_2, c_2}^* \\
& \quad \times \left[g_1^4 \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + 12g_2^2 \left(2g_1^2 (\tau_{i_1 i_3}^a \tau_{i_2 i_4}^a) + 3g_2^2 (\{\tau^a, \tau^b\}_{i_1 i_3} \{\tau^a, \tau^b\}_{i_2 i_4}) \right) \right] \\
& + \frac{1}{128\pi^2} \phi_{l f_1, i_3} \phi_{l f_1, i_1}^* \phi_{l f_2, i_4} \phi_{l f_2, i_2}^* \\
& \quad \times \left[g_1^4 \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + 4g_2^2 \left(g_1^2 (\tau_{i_1 i_3}^a \tau_{i_2 i_4}^a) + g_2^2 (\{\tau^a, \tau^b\}_{i_1 i_3} \{\tau^a, \tau^b\}_{i_2 i_4}) \right) \right] \\
& + \frac{1}{576\pi^2} \phi_{l f_1, i_3} \phi_{l f_1, i_1}^* \phi_{Q f_2, i_4, c_2} \phi_{Q f_2, i_2, c_2}^* \\
& \quad \times \left[g_1^4 \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + 12g_2^2 \left(-2g_1^2 (\tau_{i_1 i_3}^a \tau_{i_2 i_4}^a) + 3g_2^2 (\{\tau^a, \tau^b\}_{i_1 i_3} \{\tau^a, \tau^b\}_{i_2 i_4}) \right) \right] \\
& + \frac{g_1^4}{36\pi^2} \phi_{Hd i_2} \phi_{Hd i_2}^* \phi_{u f_1, c_1} \phi_{u f_1, c_1}^* + \frac{g_1^4}{36\pi^2} \phi_{Hu i_2} \phi_{Hu i_2}^* \phi_{u f_1, c_1} \phi_{u f_1, c_1}^* \\
& + \frac{g_1^4}{36\pi^2} \phi_{l f_2, i_2} \phi_{l f_2, i_2}^* \phi_{u f_1, c_1} \phi_{u f_1, c_1}^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2592\pi^2} \phi_{u f_1, c_1} \phi_{Q f_2, i_2, c_2} \left[\left(8g_1^4 - 24g_3^2 g_1^2 + 99g_3^4 \right) \phi_{u f_1, c_1}^* \phi_{Q f_2, i_2, c_2}^* \right. \\
 & \quad \left. + 9g_3^2 \left(8g_1^2 + 15g_3^2 \right) \phi_{u f_1, c_2}^* \phi_{Q f_2, i_2, c_1}^* \right] \\
 & + \frac{1}{5184\pi^2} \phi_{u f_1, c_1} \phi_{u f_2, c_2} \left[9g_3^2 \left(32g_1^2 + 15g_3^2 \right) \phi_{u f_1, c_2}^* \phi_{u f_2, c_1}^* \right. \\
 & \quad \left. + \left(128g_1^4 - 96g_3^2 g_1^2 + 99g_3^4 \right) \phi_{u f_1, c_1}^* \phi_{u f_2, c_2}^* \right] \\
 & + \frac{1}{10368\pi^2} \phi_{Q f_1, i_3, c_3} \phi_{Q f_1, i_1, c_1}^* \phi_{Q f_2, i_4, c_4} \phi_{Q f_2, i_2, c_2}^* \\
 & \quad \times \left[18g_3^2 \left(2g_1^2 + 15g_3^2 \right) \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} \delta_{c_2 c_3} \delta_{c_1 c_4} \right. \\
 & \quad + \left(g_1^4 - 12g_1^2 g_3^2 + 198g_3^4 \right) \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} \delta_{c_1 c_3} \delta_{c_2 c_4} \\
 & \quad + 18g_2^2 \left(48g_3^2 \delta_{c_2 c_3} \delta_{c_1 c_4} \tau_{i_1 i_3}^a \tau_{i_2 i_4}^a + 4g_1^2 \delta_{c_1 c_3} \delta_{c_2 c_4} \tau_{i_1 i_3}^a \tau_{i_2 i_4}^a \right. \\
 & \quad \left. \left. + 9g_2^2 \delta_{c_1 c_3} \delta_{c_2 c_4} \left(\{ \tau^a, \tau^b \}_{i_1 i_3} \{ \tau^a, \tau^b \}_{i_2 i_4} + 2 \left(\tau^a \tau^b \right)_{i_2 i_4} \{ \tau^a, \tau^b \}_{i_1 i_3} \right) \right) \right] \\
 & \hspace{15em} (B.6)
 \end{aligned}$$

B.2 Feynmanregeln

Dies stellt eine Auswahl der nicht-symmetrischen Einschleifencounterterme des MSSM dar, welche für praktische Rechnungen für Prozesse am LHC relevant sind. Eine all umfassende Angabe der Counterterere kann dem erstellten Model File in `FeynArts` entnommen werden. Die hier verwendete Notation orientiert sich an [75].

B.2.1 1- und 2-Punkt-Vertizes

$$h^0 \text{ -----} \times$$

$$i\Gamma_{h^0} = -\frac{ieM_W^3}{16\pi^2 c_W^4 s_W} \left((c_\beta s_\alpha - c_\alpha s_\beta) \left(3c_W^4 + 2c_W^2 s_W^2 + s_W^4 \right) \right) \quad (B.7)$$

$$H^0 \text{ -----} \times$$

$$i\Gamma_{H^0} = \frac{ieM_W^3}{16\pi^2 c_W^4 s_W} \left((c_\alpha c_\beta + s_\alpha s_\beta) \left(c_\beta^2 + s_\beta^2 \right) \left(3c_W^4 + 2c_W^2 s_W^2 + s_W^4 \right) \right) \quad (B.8)$$

$$\nu_{g_1} \longrightarrow \text{X} \longrightarrow \bar{\nu}_{g_2}$$

$$i\Gamma_{\nu_{g_1}, \bar{\nu}_{g_2}}(k_1, k_2) = -\frac{i\alpha(3c_W^2 + s_W^2)\delta_{g_1 g_2} P_L \not{k}_2}{16\pi c_W^2 s_W^2} \quad (\text{B.9})$$

$$l_{g_1} \longrightarrow \text{X} \longrightarrow \bar{l}_{g_2}$$

$$i\Gamma_{l_{g_1}, \bar{l}_{g_2}}(k_1, k_2) = -\frac{i\alpha\delta_{g_1 g_2}}{16\pi c_W^2 s_W^2} \left[\not{k}_2 P_L (3c_W^2 + s_W^2) - \not{k}_1 P_R 4s_W^2 \right. \\ \left. + P_L 4s_W^2 M_{f_2, g_2} + P_R 4s_W^2 M_{f_2, g_1} \right] \quad (\text{B.10})$$

$$u_{g_1, o_1} \longrightarrow \text{X} \longrightarrow \bar{u}_{g_2, o_2}$$

$$i\Gamma_{u_{g_1, o_1}, \bar{u}_{g_2, o_2}}(k_1, k_2) = -\frac{i\delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{144\pi c_W^2 s_W^2} \left[\not{k}_2 P_L (27\alpha c_W^2 + \alpha s_W^2 + 48\alpha_s c_W^2 s_W^2) \right. \\ \left. + \not{k}_1 P_R (-16\alpha s_W^2 - 48\alpha_s c_W^2 s_W^2) \right. \\ \left. + P_L 8 (\alpha + 12\alpha_s c_W^2) s_W^2 M_{f_3, g_2} \right. \\ \left. + P_R 8 (\alpha + 12\alpha_s c_W^2) s_W^2 M_{f_3, g_1} \right] \quad (\text{B.11})$$

$$d_{g_1, o_1} \longrightarrow \text{X} \longrightarrow \bar{d}_{g_2, o_2}$$



$$\begin{aligned}
 i\Gamma_{\tilde{\chi}_{c_1}^-, \tilde{\chi}_{c_2}^-}(k_1, k_2) = & -\frac{i\alpha}{16\pi c_W^2 s_W^2} \\
 & \times \left\{ k_2^2 P_L \left[8c_W^2 U_{c_2 1} U_{c_1 1}^* + (3c_W^2 + s_W^2) U_{c_2 2} U_{c_1 2}^* \right] \right. \\
 & + k_1^2 P_R \left[-8c_W^2 V_{c_1 1} V_{c_2 1}^* - (3c_W^2 + s_W^2) V_{c_1 2} V_{c_2 2}^* \right] \\
 & + P_L \left[16c_W^2 \left(\sum_{n_i} Z_{n_i 2} M_{\chi_{n_i}^0} Z_{n_i 2} \right) U_{c_1 1}^* V_{c_2 1}^* \right. \\
 & + 8\sqrt{2}c_W^2 M_W s_\beta U_{c_1 1}^* V_{c_2 2}^* \\
 & \left. + 2U_{c_1 2}^* \left(4\sqrt{2}c_\beta c_W^2 M_W V_{c_2 1}^* + \mu \left(3c_W^2 + s_W^2 \right) V_{c_2 2}^* \right) \right] \\
 & + P_R \left[16c_W^2 \left(\sum_{c_i} U_{c_i 1}^* M_{\chi_{c_i}^-} V_{c_i 1}^* \right) U_{c_2 1} V_{c_1 1} \right. \\
 & + 8\sqrt{2}c_W^2 M_W s_\beta U_{c_2 1} V_{c_1 2} \\
 & \left. + 2U_{c_2 2} \left(4\sqrt{2}c_\beta c_W^2 M_W V_{c_1 1} + \mu^* \left(3c_W^2 + s_W^2 \right) V_{c_1 2} \right) \right] \left. \right\} \quad (\text{B.14})
 \end{aligned}$$



$$i\Gamma_{\tilde{g}_{i_1}, \tilde{g}_{i_2}}(k_1, k_2) = -\frac{3i\alpha_s}{4\pi} \left(k_2^2 P_L - k_1^2 P_R + 2M_{\tilde{g}}(P_L + P_R) \right) \delta_{i_1 i_2} \quad (\text{B.15})$$



$$i\Gamma_{h^0, h^0} = -\frac{i\alpha}{8\pi c_W^4 s_W^2} \left((-3 + 2c_{\beta\alpha}^2) M_W^2 (3c_W^4 + 2c_W^2 s_W^2 + s_W^4) \right) \quad (\text{B.16})$$

$$h^0 \text{ ----- } \times \text{ ----- } H^0$$

$$i\Gamma_{h^0, H^0} = \frac{i\alpha c_{\beta\alpha} M_W^2 s_{\beta\alpha}}{4\pi c_W^4 s_W^2} (3c_W^4 + 2c_W^2 s_W^2 + s_W^4) \quad (\text{B.17})$$

$$H^0 \text{ ----- } \times \text{ ----- } H^0$$

$$i\Gamma_{H^0, H^0} = \frac{i\alpha M_W^2}{8\pi c_W^4 s_W^2} \left((1 + 2c_{\beta\alpha}^2) (3c_W^4 + 2c_W^2 s_W^2 + s_W^4) \right) \quad (\text{B.18})$$

$$A^0 \text{ ----- } \times \text{ ----- } A^0$$

$$i\Gamma_{A^0, A^0} = \frac{i\alpha M_W^2}{8\pi c_W^4 s_W^2} (3c_W^4 + 2c_W^2 s_W^2 + s_W^4) \quad (\text{B.19})$$

$$G^0 \text{ ----- } \times \text{ ----- } G^0$$

$$i\Gamma_{G^0, G^0} = \frac{i\alpha M_W^2}{8\pi c_W^4 s_W^2} (3c_W^4 + 2c_W^2 s_W^2 + s_W^4) \quad (\text{B.20})$$

$$H^- \dashrightarrow \text{---} \times \text{---} \dashrightarrow H^+$$

$$i\Gamma_{H^-,H^+} = \frac{i\alpha M_W^2}{8\pi c_W^4 s_W^2} (3c_W^4 - 2c_W^2 s_W^2 + s_W^4) \quad (\text{B.21})$$

$$G^- \dashrightarrow \text{---} \times \text{---} \dashrightarrow G^+$$

$$i\Gamma_{G^-,G^+} = \frac{i\alpha M_W^2}{8\pi c_W^4 s_W^2} (3c_W^4 + 2c_W^2 s_W^2 + s_W^4) \quad (\text{B.22})$$

$$\tilde{\nu}_{g_1} \dashrightarrow \text{---} \times \text{---} \dashrightarrow \tilde{\nu}_{g_2}^*$$

$$i\Gamma_{\tilde{\nu}_{g_1},\tilde{\nu}_{g_2}^*} = \frac{i\alpha M_W^2 \delta_{g_1 g_2}}{8\pi c_W^4 s_W^2} (3c_W^4 + 2c_W^2 s_W^2 + s_W^4) \quad (\text{B.23})$$

$$\tilde{l}_{s_1,g_1} \dashrightarrow \text{---} \times \text{---} \dashrightarrow \tilde{l}_{s_2,g_2}^*$$

$$i\Gamma_{\tilde{l}_{s_1,g_1},\tilde{l}_{s_2,g_2}^*} = \frac{i\alpha M_W^2 \delta_{g_1 g_2}}{8\pi c_W^4 s_W^2} \left[(3c_W^4 - 2c_W^2 s_W^2 + s_W^4) \mathcal{U}_{2,g_2,s_2,1} \mathcal{U}_{2,g_1,s_1,1}^* + 4s_W^4 \mathcal{U}_{2,g_2,s_2,2} \mathcal{U}_{2,g_1,s_1,2}^* \right] \quad (\text{B.24})$$

$$\tilde{u}_{s_1, g_1, o_1} \text{ --- } \times \text{ --- } \tilde{u}_{s_2, g_2, o_2}^*$$

$$\begin{aligned} i\Gamma_{\tilde{u}_{s_1, g_1, o_1}, \tilde{u}_{s_2, g_2, o_2}^*} &= \frac{i\alpha M_W^2 \delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{72\pi c_W^4 s_W^2} \left[(27c_W^4 - 6c_W^2 s_W^2 + s_W^4) \mathcal{U}_{3, g_2, s_2, 1} \mathcal{U}_{3, g_1, s_1, 1}^* \right. \\ &\quad \left. + 16s_W^4 \mathcal{U}_{3, g_2, s_2, 2} \mathcal{U}_{3, g_1, s_1, 2}^* \right] \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

$$\tilde{d}_{s_1, g_1, o_1} \text{ --- } \times \text{ --- } \tilde{d}_{s_2, g_2, o_2}^*$$

$$\begin{aligned} i\Gamma_{\tilde{d}_{s_1, g_1, o_1}, \tilde{d}_{s_2, g_2, o_2}^*} &= \frac{i\alpha M_W^2 \delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{72\pi c_W^4 s_W^2} \left[(27c_W^4 + 6c_W^2 s_W^2 + s_W^4) \mathcal{U}_{4, g_2, s_2, 1} \mathcal{U}_{4, g_1, s_1, 1}^* \right. \\ &\quad \left. + 4s_W^4 \mathcal{U}_{4, g_2, s_2, 2} \mathcal{U}_{4, g_1, s_1, 2}^* \right] \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

$$\gamma_\mu \text{ --- } \times \text{ --- } \gamma_\nu$$

$$i\Gamma_{\gamma_\mu, \gamma_\nu}(k_1, k_2) = \frac{i\alpha}{6\pi} (g_{\mu\nu}(k_1 \cdot k_2) - k_{1\mu} k_{2\nu}) \quad (\text{B.27})$$

$$Z_\mu \text{ --- } \times \text{ --- } \gamma_\nu$$

$$i\Gamma_{Z_\mu, \gamma_\nu}(k_1, k_2) = \frac{i\alpha c_W}{6\pi s_W} (g_{\mu\nu}(k_1 \cdot k_2) - k_{1\mu} k_{2\nu}) \quad (\text{B.28})$$

$$Z_\mu \sim \text{wavy line} \times \text{wavy line} \sim Z_\nu$$

$$i\Gamma_{Z_\mu, Z_\nu}(k_1, k_2) = \frac{i\alpha c_W^2}{6\pi s_W^2} (g_{\mu\nu}(k_1 \cdot k_2) - k_{1\mu} k_{2\nu}) \quad (\text{B.29})$$

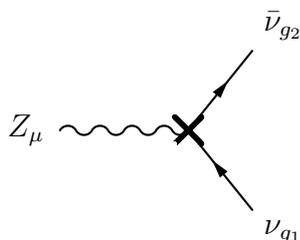
$$W_\mu^- \sim \text{wavy line} \times \text{wavy line} \sim W_\nu^+$$

$$i\Gamma_{W_\mu^-, W_\nu^+}(k_1, k_2) = \frac{i\alpha}{6\pi s_W^2} (g_{\mu\nu}(k_1 \cdot k_2) - k_{1\mu} k_{2\nu}) \quad (\text{B.30})$$

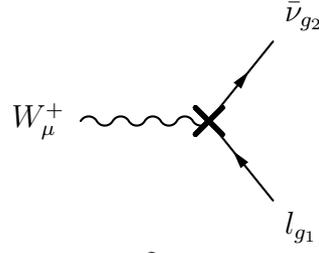
$$g_\mu^{i_1} \sim \text{coiled line} \times \text{coiled line} \sim g_\nu^{i_2}$$

$$i\Gamma_{g_\mu^{i_1}, g_\nu^{i_2}}(k_1, k_2) = \frac{i\alpha_s \delta_{i_1 i_2}}{4\pi} (g_{\mu\nu}(k_1 \cdot k_2) - k_{1\mu} k_{2\nu}) \quad (\text{B.31})$$

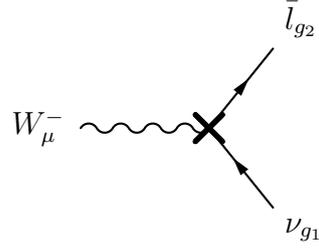
B.2.2 3-Standardmodellteilchen-Vertizes



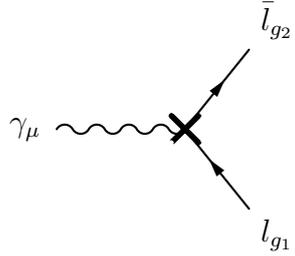
$$i\Gamma_{Z_\mu, \nu_{g_1}, \bar{\nu}_{g_2}} = -\frac{i\alpha e \delta_{g_1 g_2}}{32\pi c_W^3 s_W^3} \left(\gamma_\mu P_L (3c_W^2 + s_W^2) \right) \quad (\text{B.32})$$



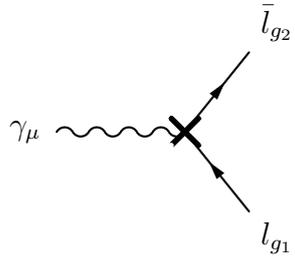
$$i\Gamma_{W_\mu^+, l_{g1}, \bar{\nu}_{g2}} = -\frac{i\alpha e \delta_{g1g2}}{16\sqrt{2}\pi c_W^2 s_W^3} \left(\gamma_\mu P_L (3c_W^2 + s_W^2) \right) \quad (\text{B.33})$$



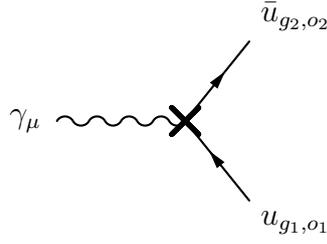
$$i\Gamma_{W_\mu^-, \nu_{g1}, \bar{l}_{g2}} = -\frac{i\alpha e \delta_{g1g2}}{16\sqrt{2}\pi c_W^2 s_W^3} \left(\gamma_\mu P_L (3c_W^2 + s_W^2) \right) \quad (\text{B.34})$$



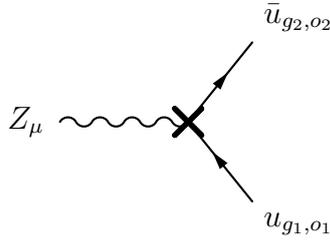
$$i\Gamma_{\gamma_\mu, l_{g1}, \bar{l}_{g2}} = \frac{i\alpha e \delta_{g1g2}}{16\pi c_W^2 s_W^2} \left(\gamma_\mu P_L (3c_W^2 + s_W^2) + \gamma_\mu P_R (4s_W^2) \right) \quad (\text{B.35})$$



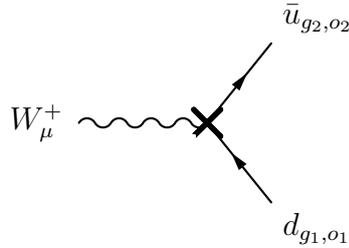
$$i\Gamma_{Z_\mu, l_{g1}, \bar{l}_{g2}} = \frac{i\alpha e \delta_{g1g2}}{32\pi c_W^3 s_W^3} \left(\gamma_\mu P_L (3c_W^4 - 2c_W^2 s_W^2 - s_W^4) - \gamma_\mu P_R (8s_W^4) \right) \quad (\text{B.36})$$



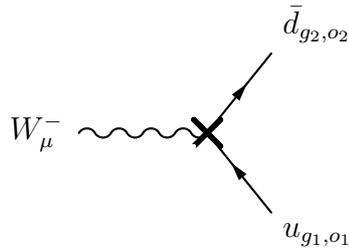
$$i\Gamma_{\gamma_\mu, u_{g_1, o_1}, \bar{u}_{g_2, o_2}} = -\frac{ie\delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{216\pi c_W^2 s_W^2} \left[\gamma_\mu P_L (48\alpha_s c_W^2 s_W^2 + \alpha(27c_W^2 + s_W^2)) \right. \\ \left. + \gamma_\mu P_R (16s_W^2(\alpha + 3\alpha_s c_W^2)) \right] \quad (\text{B.37})$$



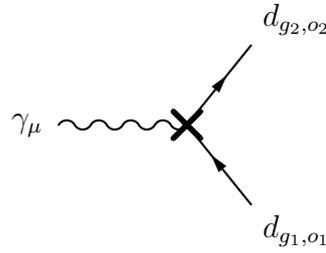
$$i\Gamma_{Z_\mu, u_{g_1, o_1}, \bar{u}_{g_2, o_2}} = -\frac{ie\delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{864\pi c_W^3 s_W^3} \left[\gamma_\mu P_L ((3c_W^2 - s_W^2) (48\alpha_s c_W^2 s_W^2 + \alpha(27c_W^2 + s_W^2))) \right. \\ \left. - \gamma_\mu P_R (64s_W^4(\alpha + 3\alpha_s c_W^2)) \right] \quad (\text{B.38})$$



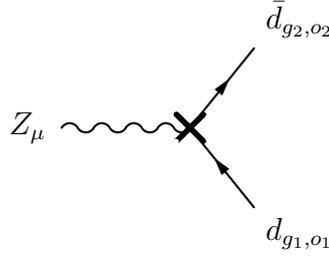
$$i\Gamma_{W_\mu^+, d_{g_1, o_1}, \bar{u}_{g_2, o_2}} = -\frac{ie\delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{144\sqrt{2}\pi c_W^2 s_W^3} \left(\gamma_\mu P_L (48\alpha_s c_W^2 s_W^2 + \alpha(27c_W^2 + s_W^2)) \right) \quad (\text{B.39})$$



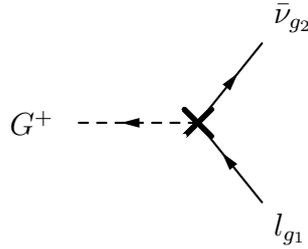
$$i\Gamma_{W_\mu^-, u_{g_1, o_1}, \bar{d}_{g_2, o_2}} = -\frac{ie\delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{144\sqrt{2}\pi c_W^2 s_W^3} \left(\gamma_\mu P_L (48\alpha_s c_W^2 s_W^2 + \alpha(27c_W^2 + s_W^2)) \right) \quad (\text{B.40})$$



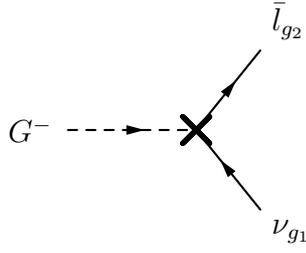
$$i\Gamma_{\gamma_\mu, d_{g_1, o_1}, \bar{d}_{g_2, o_2}} = \frac{ie\delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{432\pi c_W^2 s_W^2} \left[\gamma_\mu P_L (48\alpha_s c_W^2 s_W^2 + \alpha(27c_W^2 + s_W^2)) + \gamma_\mu P_R (4s_W^2(\alpha + 12\alpha_s c_W^2)) \right] \quad (\text{B.41})$$



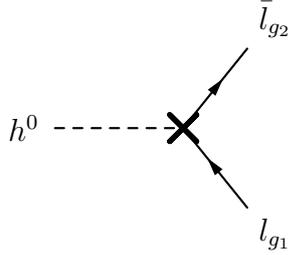
$$i\Gamma_{Z_\mu, d_{g_1, o_1}, \bar{d}_{g_2, o_2}} = \frac{ie\delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{864\pi c_W^3 s_W^3} \left[\gamma_\mu P_L ((3c_W^2 + s_W^2) (48\alpha_s c_W^2 s_W^2 + \alpha(27c_W^2 + s_W^2))) - \gamma_\mu P_R (8s_W^4(\alpha + 12\alpha_s c_W^2)) \right] \quad (\text{B.42})$$



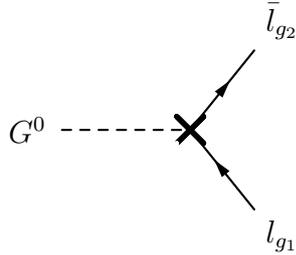
$$i\Gamma_{G^+, l_{g_1}, \bar{\nu}_{g_2}} = -\frac{i\alpha e\delta_{g_1 g_2}}{4\sqrt{2}\pi c_W^2 M_W s_W} (P_R M_{f_2, g_1}) \quad (\text{B.43})$$



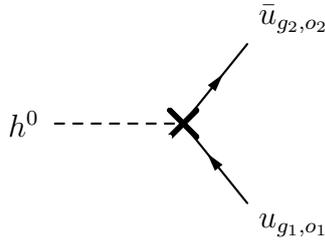
$$i\Gamma_{G^-, \nu_{g_1}, \bar{l}_{g_2}} = -\frac{i\alpha e \delta_{g_1 g_2}}{4\sqrt{2}\pi c_W^2 M_W s_W} (P_L M_{f_{2,g_2}}) \quad (\text{B.44})$$



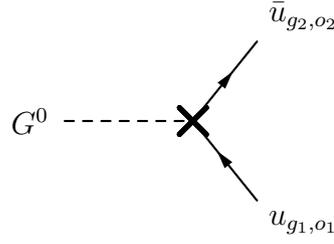
$$i\Gamma_{h^0, l_{g_1}, \bar{l}_{g_2}} = \frac{i\alpha e s_\alpha \delta_{g_1 g_2}}{8\pi c_\beta c_W^2 M_W s_W} (P_L M_{f_{2,g_2}} + P_R M_{f_{2,g_1}}) \quad (\text{B.45})$$



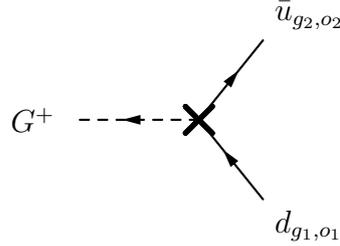
$$i\Gamma_{G^0, l_{g_1}, \bar{l}_{g_2}} = \frac{\alpha e \delta_{g_1 g_2}}{8\pi c_W^2 M_W s_W} (-P_L M_{f_{2,g_2}} + P_R M_{f_{2,g_1}}) \quad (\text{B.46})$$



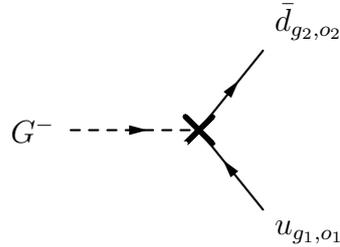
$$i\Gamma_{h^0, u_{g_1, o_1}, \bar{u}_{g_2, o_2}} = -\frac{i c_\alpha (\alpha + 12\alpha_s c_W^2) e \delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{36\pi c_W^2 M_W s_\beta s_W} (P_L M_{f_{3,g_2}} + P_R M_{f_{3,g_1}}) \quad (\text{B.47})$$



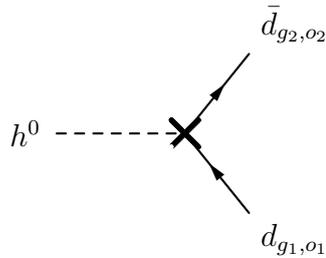
$$i\Gamma_{G^0, u_{g_1, o_1}, \bar{u}_{g_2, o_2}} = \frac{(\alpha + 12\alpha_s c_W^2) e \delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{36\pi c_W^2 M_W s_W} (P_L M_{f_{3, g_2}} - P_R M_{f_{3, g_1}}) \quad (\text{B.48})$$



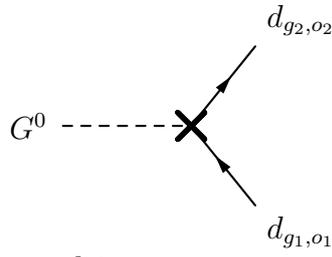
$$i\Gamma_{G^+, d_{g_1, o_1}, \bar{u}_{g_2, o_2}} = \frac{ie\delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{36\sqrt{2}\pi c_W^2 M_W s_W} \left[P_L (2(\alpha + 12\alpha_s c_W^2) M_{f_{3, g_2}}) + P_R ((\alpha - 24\alpha_s c_W^2) M_{f_{4, g_1}}) \right] \quad (\text{B.49})$$



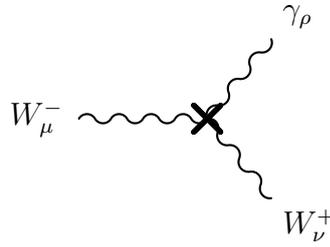
$$i\Gamma_{G^-, u_{g_1, o_1}, \bar{d}_{g_2, o_2}} = \frac{ie\delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{36\sqrt{2}\pi c_W^2 M_W s_W} \left[P_L ((\alpha - 24\alpha_s c_W^2) M_{f_{4, g_2}}) + P_R (2(\alpha + 12\alpha_s c_W^2) M_{f_{3, g_1}}) \right] \quad (\text{B.50})$$



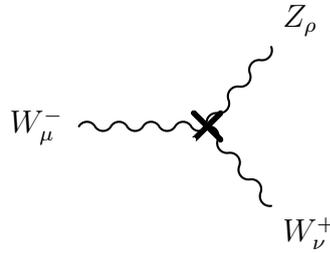
$$i\Gamma_{h^0, d_{g_1, o_1}, \bar{d}_{g_2, o_2}} = -\frac{i(\alpha - 24\alpha_s c_W^2) e s_\alpha \delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{72\pi c_\beta c_W^2 M_W s_W} (P_L M_{f_{4, g_2}} + P_R M_{f_{4, g_1}}) \quad (\text{B.51})$$



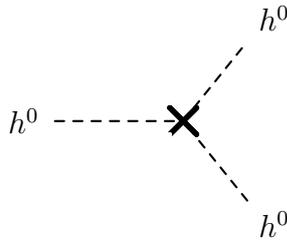
$$i\Gamma_{G^0, d_{g_1, o_1}, \bar{d}_{g_2, o_2}} = \frac{(\alpha - 24\alpha_s c_W^2) e \delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{72\pi c_W^2 M_W s_W} (P_L M_{f_4, g_2} - P_R M_{f_4, g_1}) \quad (\text{B.52})$$



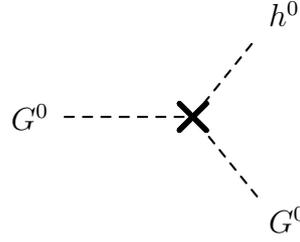
$$i\Gamma_{W_\mu^-, W_\nu^+, \gamma_\rho}(k_1, k_2, k_3) = -\frac{ie\alpha}{6\pi s_W^2} (g_{\rho\nu}(k_2 - k_3)_\mu + g_{\nu\mu}(k_1 - k_2)_\rho + g_{\mu\rho}(k_3 - k_1)_\nu) \quad (\text{B.53})$$



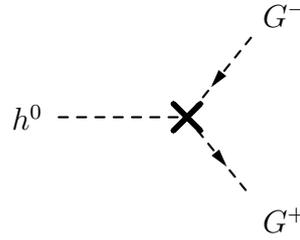
$$i\Gamma_{W_\mu^-, W_\nu^+, Z_\rho}(k_1, k_2, k_3) = -\frac{ie\alpha c_W}{6\pi s_W^3} (g_{\rho\nu}(k_2 - k_3)_\mu + g_{\nu\mu}(k_1 - k_2)_\rho + g_{\mu\rho}(k_3 - k_1)_\nu) \quad (\text{B.54})$$



$$i\Gamma_{h^0, h^0, h^0} = \frac{3iaeM_W}{8\pi c_W^4 s_W^3} \left((c_\alpha s_\beta - c_\beta s_\alpha) (3c_W^4 + 2c_W^2 s_W^2 + s_W^4) \right) \quad (\text{B.55})$$

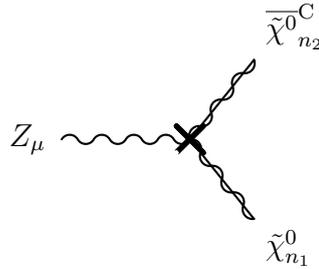


$$i\Gamma_{h^0, G^0, G^0} = -\frac{i\alpha e M_W}{8\pi c_W^4 s_W^3} \left((c_\beta s_\alpha - c_\alpha s_\beta) (3c_W^4 + 2c_W^2 s_W^2 + s_W^4) \right) \quad (\text{B.56})$$

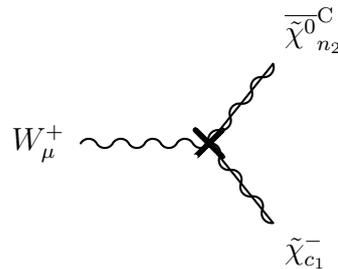


$$i\Gamma_{h^0, G^+, G^-} = -\frac{i\alpha e M_W}{8\pi c_W^4 s_W^3} \left((c_\beta s_\alpha - c_\alpha s_\beta) (3c_W^4 + 2c_W^2 s_W^2 + s_W^4) \right) \quad (\text{B.57})$$

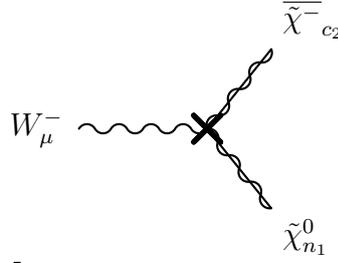
B.2.3 1-Standardmodellteilchen-2-MSSM-Teilchen-Vertizes



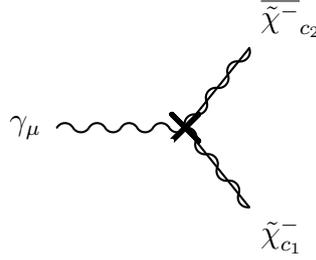
$$i\Gamma_{Z_\mu, \tilde{\chi}_{n_1}^0, \tilde{\chi}_{n_2}^{0C}} = -\frac{i\alpha e (3c_W^2 + s_W^2)}{32\pi c_W^3 s_W^3} \left[\gamma_\mu P_L (Z_{n_2 3} Z_{n_1 3}^* - Z_{n_2 4} Z_{n_1 4}^*) \right. \\ \left. + \gamma_\mu P_R (-(Z_{n_1 3} Z_{n_2 3}^*) + Z_{n_1 4} Z_{n_2 4}^*) \right] \quad (\text{B.58})$$



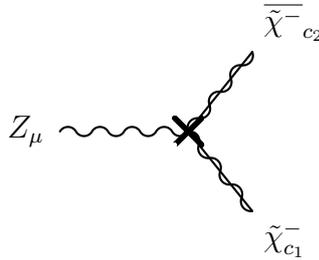
$$i\Gamma_{W_\mu^+, \tilde{\chi}_{c_1}^-, \tilde{\chi}_{n_2}^0} = -\frac{i\alpha e}{32\pi c_W^2 s_W^3} \left[\gamma_\mu P_L \left(16c_W^2 U_{c_1 1}^* Z_{n_2 2} + \sqrt{2} (3c_W^2 + s_W^2) U_{c_1 2}^* Z_{n_2 3} \right) \right. \\ \left. + \gamma_\mu P_R \left(16c_W^2 V_{c_1 1} Z_{n_2 2}^* - \sqrt{2} (3c_W^2 + s_W^2) V_{c_1 2} Z_{n_2 4}^* \right) \right] \quad (\text{B.59})$$



$$i\Gamma_{W_\mu^-, \tilde{\chi}_{n_1}^0, \tilde{\chi}_{c_2}^-} = -\frac{i\alpha e}{32\pi c_W^2 s_W^3} \left[\gamma_\mu P_L \left(16c_W^2 U_{c_2 1} Z_{n_1 2}^* + \sqrt{2} (3c_W^2 + s_W^2) U_{c_2 2} Z_{n_1 3}^* \right) \right. \\ \left. + \gamma_\mu P_R \left(16c_W^2 V_{c_2 1}^* Z_{n_1 2} - \sqrt{2} (3c_W^2 + s_W^2) V_{c_2 2}^* Z_{n_1 4} \right) \right] \quad (\text{B.60})$$



$$i\Gamma_{\gamma_\mu, \tilde{\chi}_{c_1}^-, \tilde{\chi}_{c_2}^-} = \frac{i\alpha e}{16\pi c_W^2 s_W^2} \left[\gamma_\mu P_L \left(8c_W^2 U_{c_2 1} U_{c_1 1}^* + (3c_W^2 + s_W^2) U_{c_2 2} U_{c_1 2}^* \right) \right. \\ \left. + \gamma_\mu P_R \left(8c_W^2 V_{c_1 1} V_{c_2 1}^* + (3c_W^2 + s_W^2) V_{c_1 2} V_{c_2 2}^* \right) \right] \quad (\text{B.61})$$



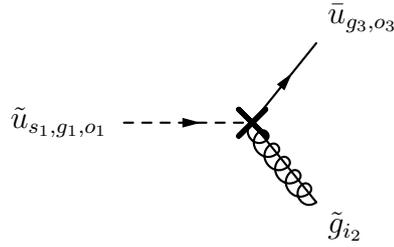
$$i\Gamma_{Z_\mu, \tilde{\chi}_{c_1}^-, \tilde{\chi}_{c_2}^-} = \frac{i\alpha e}{32\pi c_W^3 s_W^3} \left[\gamma_\mu P_L \left(16c_W^4 U_{c_2 1} U_{c_1 1}^* + (c_W^2 - s_W^2) (3c_W^2 + s_W^2) U_{c_2 2} U_{c_1 2}^* \right) \right. \\ \left. + \gamma_\mu P_R \left(16c_W^4 V_{c_1 1} V_{c_2 1}^* + (c_W^2 - s_W^2) (3c_W^2 + s_W^2) V_{c_1 2} V_{c_2 2}^* \right) \right] \quad (\text{B.62})$$

$$i\Gamma_{\tilde{\nu}_{g_1}, \tilde{\chi}_{n_2}^0, \bar{\nu}_{g_3}} = -\frac{i\alpha e \delta_{g_1 g_3}}{2\sqrt{2}\pi s_W^3} (P_R Z_{n_2 2}) \quad (\text{B.63})$$

$$i\Gamma_{\tilde{l}_{s_1, g_1}, \tilde{\chi}_{n_2}^0, \bar{l}_{g_3}} = \frac{i\alpha e \delta_{g_1 g_3}}{8\sqrt{2}\pi c_\beta c_W^2 M_W s_W^3} \times \left\{ -P_L \left(2s_W^2 M_{f_{2, g_3}} \mathcal{U}_{2, g_1, s_1, 1}^* Z_{n_2 3}^* \right) + P_R \left[4c_\beta c_W^2 M_W \mathcal{U}_{2, g_1, s_1, 1}^* Z_{n_2 2} + \left(-3c_W^2 + s_W^2 \right) M_{f_{2, g_1}} \mathcal{U}_{2, g_1, s_1, 2}^* Z_{n_2 3} \right] \right\} \quad (\text{B.64})$$

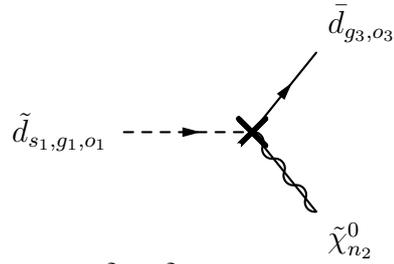
$$i\Gamma_{\tilde{\nu}_{g_1}, \tilde{\chi}_{c_2}^-, \bar{l}_{g_3}} = \frac{i\alpha e \delta_{g_1 g_3}}{8\pi c_\beta c_W^2 M_W s_W^3} \left(P_L \left(\sqrt{2} s_W^2 M_{f_{2, g_3}} U_{c_{22}}^* \right) - P_R \left(4c_\beta c_W^2 M_W V_{c_{21}} \right) \right) \quad (\text{B.65})$$

$$\begin{aligned}
 i\Gamma_{\tilde{u}_{s_1, g_1, o_1}, \tilde{\chi}_{n_2}^0, \bar{u}_{g_3, o_3}} &= -\frac{i\alpha e \delta_{g_1 g_3} \delta_{o_1 o_3}}{24\sqrt{2}\pi c_W^2 M_W s_\beta s_W^3} \\
 &\times \left\{ P_L \left(4s_W^2 M_{f_{3, g_3}} \mathcal{U}_{3, g_1, s_1, 1}^* Z_{n_2 4}^* \right) \right. \\
 &\quad + P_R \left[12c_W^2 M_W s_\beta \mathcal{U}_{3, g_1, s_1, 1}^* Z_{n_2 2} \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(9c_W^2 - s_W^2 \right) M_{f_{3, g_1}} \mathcal{U}_{3, g_1, s_1, 2}^* Z_{n_2 4}^* \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{B.66}$$

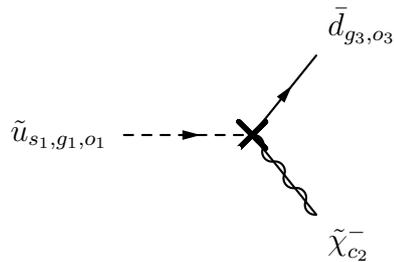


$$i\Gamma_{\tilde{u}_{s_1, g_1, o_1}, \tilde{g}_{i_2}, \bar{u}_{g_3, o_3}} = -\frac{3i\alpha_s g_s \delta_{g_1 g_3} T_{o_3 o_1}^{i_2}}{2\sqrt{2}\pi} \left(-P_L \left(e^{-i\frac{\varphi}{2}} \mathcal{U}_{3, g_1, s_1, 2}^* \right) + P_R \left(e^{i\frac{\varphi}{2}} \mathcal{U}_{3, g_1, s_1, 1}^* \right) \right)$$

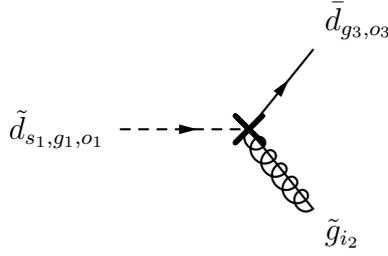
(B.67)



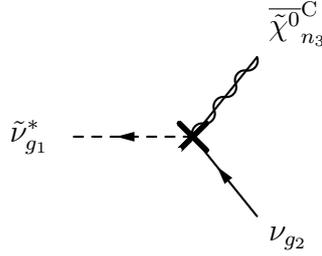
$$\begin{aligned}
 i\Gamma_{\tilde{d}_{s_1, g_1, o_1}, \tilde{\chi}_{n_2}^0, \bar{d}_{g_3, o_3}} &= \frac{i\alpha e \delta_{g_1 g_3} \delta_{o_1 o_3}}{24\sqrt{2}\pi c_\beta c_W^2 M_W s_W^3} \\
 &\times \left\{ -P_L \left(2s_W^2 M_{f_{4, g_3}} \mathcal{U}_{4, g_1, s_1, 1}^* Z_{n_2 3}^* \right) \right. \\
 &\quad + P_R \left[12c_\beta c_W^2 M_W \mathcal{U}_{4, g_1, s_1, 1}^* Z_{n_2 2} \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left(9c_W^2 + s_W^2 \right) M_{f_{4, g_1}} \mathcal{U}_{4, g_1, s_1, 2}^* Z_{n_2 3}^* \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{B.68}$$



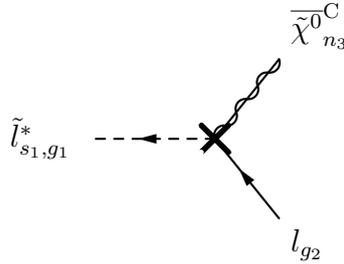
$$\begin{aligned}
 i\Gamma_{\tilde{u}_{s_1, g_1, o_1}, \tilde{\chi}_{c_2}^-, \bar{d}_{g_3, o_3}} &= \frac{i\alpha e \delta_{g_1 g_3} \delta_{o_1 o_3}}{48\pi c_\beta c_W^2 M_W s_\beta s_W^3} \\
 &\times \left\{ P_L \left(2\sqrt{2} s_\beta s_W^2 M_{f_{4, g_3}} U_{c_2 2}^* \mathcal{U}_{3, g_1, s_1, 1}^* \right) \right. \\
 &\quad \left. - P_R \left[24c_W^2 M_W s_\beta c_\beta \mathcal{U}_{3, g_1, s_1, 1}^* V_{c_2 1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sqrt{2} c_\beta \left(-9c_W^2 + s_W^2 \right) M_{f_{3, g_1}} \mathcal{U}_{3, g_1, s_1, 2}^* V_{c_2 2} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{B.69}$$



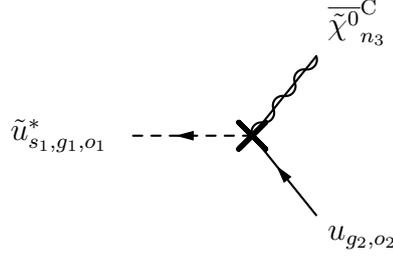
$$i\Gamma_{\tilde{d}_{s_1, g_1, o_1}, \tilde{g}_{i_2}, \bar{d}_{g_3, o_3}} = -\frac{3i\alpha_s g_s \delta_{g_1 g_3} T_{o_3 o_1}^{i_2}}{2\sqrt{2}\pi} \left(-P_L \left(e^{-i\frac{\varphi}{2}} \mathcal{U}_{4, g_1, s_1, 2}^* \right) + P_R \left(e^{i\frac{\varphi}{2}} \mathcal{U}_{4, g_1, s_1, 1}^* \right) \right) \tag{B.70}$$



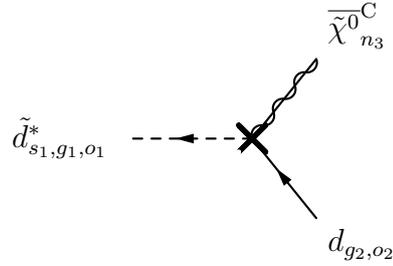
$$i\Gamma_{\tilde{\nu}_{g_1}^*, \nu_{g_2}, \tilde{\chi}_{n_3}^0} = -\frac{i\alpha e \delta_{g_1 g_2}}{2\sqrt{2}\pi s_W^3} \left(P_L Z_{n_3 2}^* \right) \tag{B.71}$$



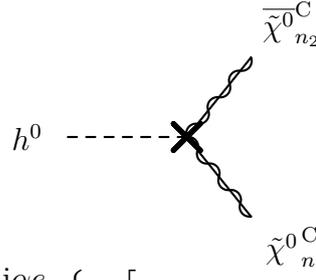
$$\begin{aligned}
 i\Gamma_{\tilde{l}_{s_1, g_1}^*, l_{g_2}, \bar{\chi}_{n_3}^0}^C &= -\frac{i\alpha\epsilon\delta_{g_1 g_2}}{8\sqrt{2}\pi c_\beta c_W^2 M_W s_W^3} \\
 &\times \left\{ P_L \left[-4c_\beta c_W^2 M_W \mathcal{U}_{2, g_1, s_1, 1} Z_{n_3 2}^* \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (3c_W^2 - s_W^2) M_{f_{2, g_1}} \mathcal{U}_{2, g_1, s_1, 2} Z_{n_3 3}^* \right] \right. \\
 &\quad \left. + P_R \left(2s_W^2 M_{f_{2, g_2}} \mathcal{U}_{2, g_1, s_1, 1} Z_{n_3 3} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{B.72}$$



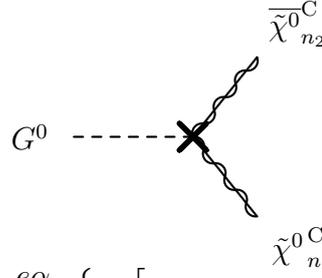
$$\begin{aligned}
 i\Gamma_{\tilde{u}_{s_1, g_1, o_1}^*, u_{g_2, o_2}, \bar{\chi}_{n_3}^0}^C &= -\frac{i\alpha\epsilon\delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{24\sqrt{2}\pi c_W^2 M_W s_\beta s_W^3} \\
 &\times \left\{ P_L \left[12c_W^2 M_W s_\beta \mathcal{U}_{3, g_1, s_1, 1} Z_{n_3 2}^* \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (9c_W^2 - s_W^2) M_{f_{3, g_1}} \mathcal{U}_{3, g_1, s_1, 2} Z_{n_3 4}^* \right] \right. \\
 &\quad \left. + P_R \left(4s_W^2 M_{f_{3, g_2}} \mathcal{U}_{3, g_1, s_1, 1} Z_{n_3 4} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{B.73}$$



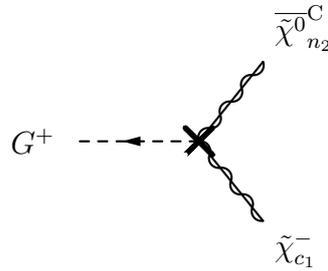
$$\begin{aligned}
 i\Gamma_{\tilde{d}_{s_1, g_1, o_1}^*, d_{g_2, o_2}, \bar{\chi}_{n_3}^0}^C &= -\frac{i\alpha\epsilon\delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{24\sqrt{2}\pi c_\beta c_W^2 M_W s_W^3} \\
 &\times \left\{ P_L \left[-12c_\beta c_W^2 M_W \mathcal{U}_{4, g_1, s_1, 1} Z_{n_3 2}^* \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (9c_W^2 + s_W^2) M_{f_{4, g_1}} \mathcal{U}_{4, g_1, s_1, 2} Z_{n_3 3}^* \right] \right. \\
 &\quad \left. + P_R \left(2s_W^2 M_{f_{4, g_2}} \mathcal{U}_{4, g_1, s_1, 1} Z_{n_3 3} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{B.74}$$



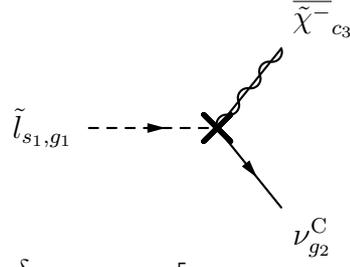
$$\begin{aligned}
 i\Gamma_{h^0, \tilde{\chi}_{n_1}^0 C, \tilde{\chi}_{n_2}^0 C} = \frac{i\alpha e}{4\pi s_W^3} & \left\{ P_L \left[s_\alpha Z_{n_1 3}^* Z_{n_2 2}^* + c_\alpha Z_{n_1 4}^* Z_{n_2 2}^* \right. \right. \\
 & \left. \left. + Z_{n_1 2}^* (s_\alpha Z_{n_2 3}^* + c_\alpha Z_{n_2 4}^*) \right] \right. \\
 & \left. + P_R \left[s_\alpha Z_{n_1 3} Z_{n_2 2} + c_\alpha Z_{n_1 4} Z_{n_2 2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + Z_{n_1 2} (s_\alpha Z_{n_2 3} + c_\alpha Z_{n_2 4}) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{B.75}$$



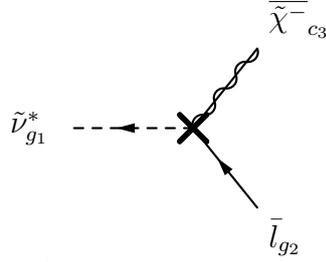
$$\begin{aligned}
 i\Gamma_{G^0, \tilde{\chi}_{n_1}^0 C, \tilde{\chi}_{n_2}^0 C} = \frac{e\alpha}{4\pi s_W^3} & \left\{ P_L \left[c_\beta Z_{n_1 3}^* Z_{n_2 2}^* + s_\beta Z_{n_1 4}^* Z_{n_2 2}^* \right. \right. \\
 & \left. \left. + Z_{n_1 2}^* (c_\beta Z_{n_2 3}^* + s_\beta Z_{n_2 4}^*) \right] \right. \\
 & \left. + P_R \left[-c_\beta Z_{n_1 3} Z_{n_2 2} - s_\beta Z_{n_1 4} Z_{n_2 2} \right. \right. \\
 & \left. \left. - Z_{n_1 2} (c_\beta Z_{n_2 3} + s_\beta Z_{n_2 4}) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{B.76}$$



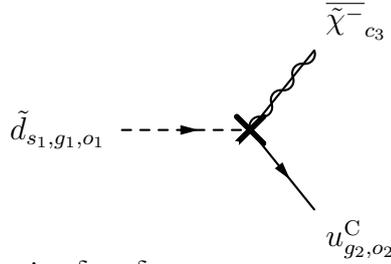
$$\begin{aligned}
 i\Gamma_{G^+, \tilde{\chi}_{c_1}^-, \tilde{\chi}_{n_2}^0 C} = -\frac{i\alpha e}{4\pi s_W^3} & \left[P_L c_\beta (\sqrt{2} U_{c_1 2}^* Z_{n_2 2}^* - 2 U_{c_1 1}^* Z_{n_2 3}^*) \right. \\
 & \left. + P_R s_\beta (\sqrt{2} V_{c_1 2} Z_{n_2 2} + 2 V_{c_1 1} Z_{n_2 4}) \right]
 \end{aligned} \tag{B.77}$$



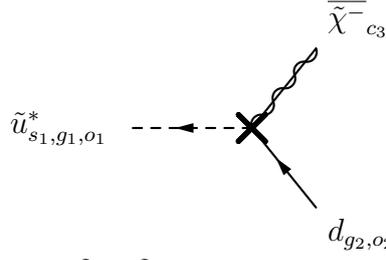
$$i\Gamma_{\tilde{l}_{s_1, g_1}, \nu_{g_2}^C, \tilde{\chi}^-_{c_3}} = -\frac{i\alpha e \delta_{g_1 g_2}}{16\pi c_\beta c_W^2 M_W s_W^3} P_R \left[8c_\beta c_W^2 M_W U_{c_3 1} \mathcal{U}_{2, g_1, s_1, 1}^* + \sqrt{2} (-3c_W^2 + s_W^2) M_{f_2, g_1} U_{c_3 2} \mathcal{U}_{2, g_1, s_1, 2}^* \right] \quad (\text{B.78})$$



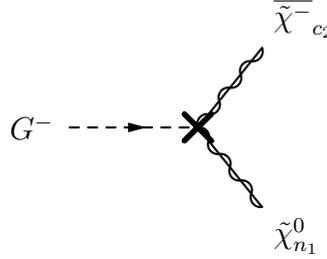
$$i\Gamma_{\tilde{\nu}_{g_1}^*, \bar{l}_{g_2}, \tilde{\chi}^-_{c_3}} = \frac{i\alpha e \delta_{g_1 g_2}}{8\pi c_\beta c_W^2 M_W s_W^3} \left(-P_L (4c_\beta c_W^2 M_W V_{c_3 1}^*) + P_R (\sqrt{2} s_W^2 M_{f_2, g_2} U_{c_3 2}) \right) \quad (\text{B.79})$$



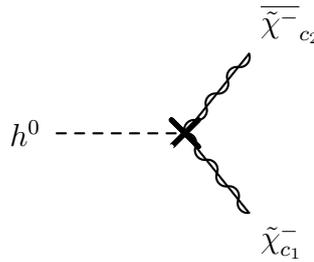
$$i\Gamma_{\tilde{d}_{s_1, g_1, o_1}, u_{g_2, o_2}^C, \tilde{\chi}^-_{c_3}} = \frac{i\alpha e \delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{48\pi c_\beta c_W^2 M_W s_\beta s_W^3} \times \left\{ P_L (4\sqrt{2} c_\beta s_W^2 M_{f_3, g_2} \mathcal{U}_{4, g_1, s_1, 1}^* V_{c_3 2}^*) + P_R \left[-24c_\beta c_W^2 M_W s_\beta U_{c_3 1} \mathcal{U}_{4, g_1, s_1, 1}^* + \sqrt{2} s_\beta (9c_W^2 + s_W^2) M_{f_4, g_1} U_{c_3 2} \mathcal{U}_{4, g_1, s_1, 2}^* \right] \right\} \quad (\text{B.80})$$



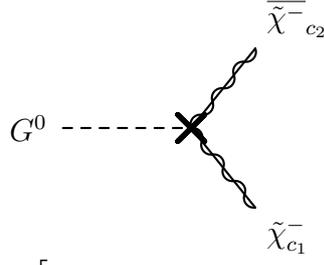
$$\begin{aligned}
 i\Gamma_{\tilde{u}_{s_1, g_1, o_1}^*, d_{g_2, o_2}, \tilde{\chi}_{c_3}^-} &= \frac{i\alpha e \delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{48\pi c_\beta c_W^2 M_W s_\beta s_W^3} \\
 &\times \left\{ -P_L c_\beta \left[24c_W^2 M_W s_\beta \mathcal{U}_{3, g_1, s_1, 1} V_{c_3 1}^* \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sqrt{2}(-9c_W^2 + s_W^2) M_{f_{3, g_1}} \mathcal{U}_{3, g_1, s_1, 2} V_{c_3 2}^* \right] \right. \\
 &\quad \left. + P_R \left(2\sqrt{2} s_\beta s_W^2 M_{f_{4, g_2}} U_{c_3 2} \mathcal{U}_{3, g_1, s_1, 1} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{B.81}$$



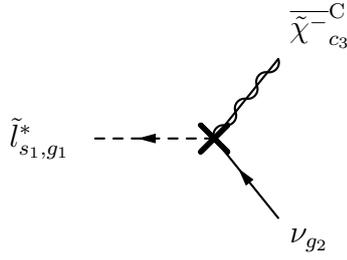
$$\begin{aligned}
 i\Gamma_{G^-, \tilde{\chi}_{n_1}^0, \tilde{\chi}_{c_2}^-} &= -\frac{i\alpha e}{4\pi s_W^3} \left[P_L s_\beta \left(\sqrt{2} V_{c_2 2}^* Z_{n_1 2}^* + 2V_{c_2 1}^* Z_{n_1 4}^* \right) \right. \\
 &\quad \left. + P_R c_\beta \left(\sqrt{2} U_{c_2 2} Z_{n_1 2} - 2U_{c_2 1} Z_{n_1 3} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{B.82}$$



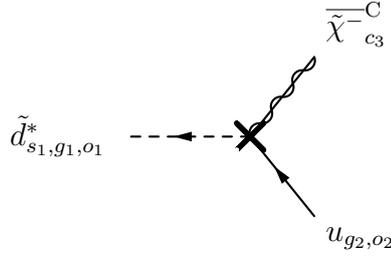
$$\begin{aligned}
 i\Gamma_{h^0, \tilde{\chi}_{c_1}^-, \tilde{\chi}_{c_2}^-} &= \frac{i\alpha e}{2\sqrt{2}\pi s_W^3} \left[P_L \left(s_\alpha U_{c_1 2}^* V_{c_2 1}^* - c_\alpha U_{c_1 1}^* V_{c_2 2}^* \right) \right. \\
 &\quad \left. + P_R \left(s_\alpha U_{c_2 2} V_{c_1 1} - c_\alpha U_{c_2 1} V_{c_1 2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{B.83}$$



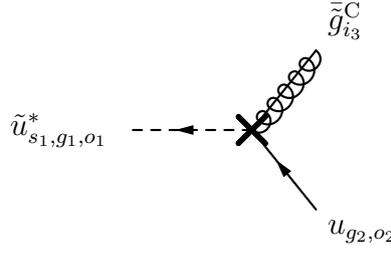
$$i\Gamma_{G^0, \tilde{\chi}_{c_1}^-, \overline{\tilde{\chi}}_{c_2}^-} = \frac{\alpha e}{2\sqrt{2}\pi s_W^3} \left[P_L \left(c_\beta U_{c_{12}}^* V_{c_{21}}^* - s_\beta U_{c_{11}}^* V_{c_{22}}^* \right) + P_R \left(- \left(c_\beta U_{c_{22}} V_{c_{11}} \right) + s_\beta U_{c_{21}} V_{c_{12}} \right) \right] \quad (\text{B.84})$$



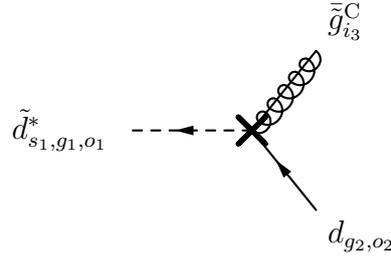
$$i\Gamma_{\tilde{l}_{s_1, g_1}^*, \nu_{g_2}, \overline{\tilde{\chi}}_{c_3}^C} = -\frac{i\alpha e \delta_{g_1 g_2}}{16\pi c_\beta c_W^2 M_W s_W^3} P_L \left[8c_\beta c_W^2 M_W U_{c_{31}}^* \mathcal{U}_{2, g_1, s_1, 1} + \sqrt{2} \left(-3c_W^2 + s_W^2 \right) M_{f_{2, g_1}} U_{c_{32}}^* \mathcal{U}_{2, g_1, s_1, 2} \right] \quad (\text{B.85})$$



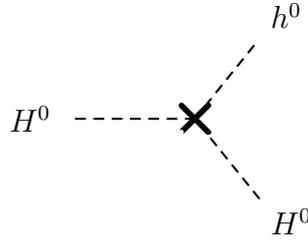
$$i\Gamma_{\tilde{d}_{s_1, g_1, o_1}^*, u_{g_2, o_2}, \overline{\tilde{\chi}}_{c_3}^C} = \frac{i\alpha e \delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{48\pi c_\beta c_W^2 M_W s_\beta s_W^3} \times \left\{ P_L \left[-24c_\beta c_W^2 M_W s_\beta U_{c_{31}}^* \mathcal{U}_{4, g_1, s_1, 1} + \sqrt{2} s_\beta \left(9c_W^2 + s_W^2 \right) M_{f_{4, g_1}} U_{c_{32}}^* \mathcal{U}_{4, g_1, s_1, 2} \right] + P_R \left(4\sqrt{2} c_\beta s_W^2 M_{f_{3, g_2}} \mathcal{U}_{4, g_1, s_1, 1} V_{c_{32}} \right) \right\} \quad (\text{B.86})$$



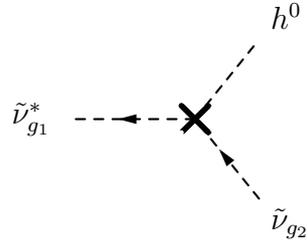
$$i\Gamma_{\tilde{u}_{s_1, g_1, o_1}^*, u_{g_2, o_2}, \bar{g}_{i_3}^C} = -\frac{3i\alpha_s g_s \delta_{g_1 g_2} T_{o_1 o_2}^{i_3}}{2\sqrt{2}\pi} \left(P_L \left(e^{-i\frac{\varphi}{2}} \mathcal{U}_{3, g_1, s_1, 1} \right) - P_R \left(e^{i\frac{\varphi}{2}} \mathcal{U}_{3, g_1, s_1, 2} \right) \right) \quad (\text{B.87})$$



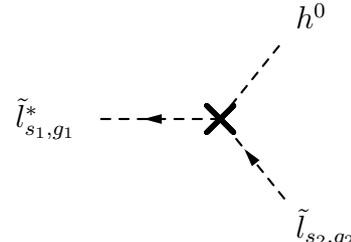
$$i\Gamma_{\tilde{d}_{s_1, g_1, o_1}^*, d_{g_2, o_2}, \bar{g}_{i_3}^C} = -\frac{3i\alpha_s g_s \delta_{g_1 g_2} T_{o_1 o_2}^{i_3}}{2\sqrt{2}\pi} \left(P_L \left(e^{-i\frac{\varphi}{2}} \mathcal{U}_{4, g_1, s_1, 1} \right) - P_R \left(e^{i\frac{\varphi}{2}} \mathcal{U}_{4, g_1, s_1, 2} \right) \right) \quad (\text{B.88})$$



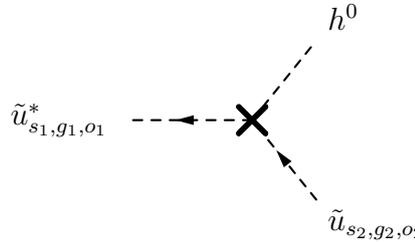
$$i\Gamma_{H^0, H^0, h^0} = \frac{i\alpha e M_W}{8\pi c_W^4 s_W^3} \left((c_\alpha s_\beta - c_\beta s_\alpha) (3c_W^4 + 2c_W^2 s_W^2 + s_W^4) \right) \quad (\text{B.89})$$



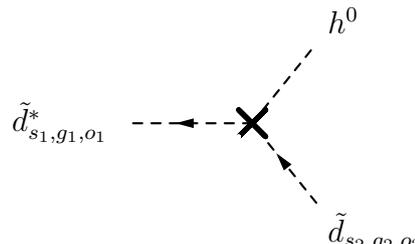
$$i\Gamma_{\tilde{\nu}_{g_1}^*, \tilde{\nu}_{g_2}, h^0} = -\frac{i\alpha e M_W \delta_{g_1 g_2}}{8\pi c_W^4 s_W^3} \left((c_\beta s_\alpha - c_\alpha s_\beta) (3c_W^4 + 2c_W^2 s_W^2 + s_W^4) \right) \quad (\text{B.90})$$



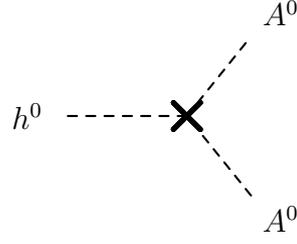
$$\begin{aligned}
 i\Gamma_{\tilde{l}_{s_1, g_1}^*, \tilde{l}_{s_2, g_2}, h^0} &= -\frac{i\alpha e M_W \delta_{g_1 g_2}}{8\pi c_W^4 s_W^3} (c_\beta s_\alpha - c_\alpha s_\beta) \\
 &\times \left[\left(3c_W^4 - 2c_W^2 s_W^2 + s_W^4 \right) \mathcal{U}_{2, g_1, s_1, 1} \mathcal{U}_{2, g_2, s_2, 1}^* \right. \\
 &\quad \left. + 4s_W^4 \mathcal{U}_{2, g_1, s_1, 2} \mathcal{U}_{2, g_2, s_2, 2}^* \right] \quad (B.91)
 \end{aligned}$$



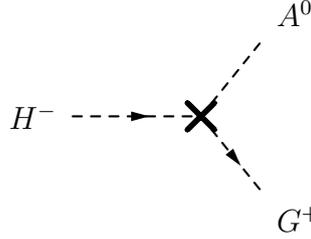
$$\begin{aligned}
 i\Gamma_{\tilde{u}_{s_1, g_1, o_1}^*, \tilde{u}_{s_2, g_2, o_2}, h^0} &= -\frac{i\alpha e M_W \delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{72\pi c_W^4 s_W^3} (c_\beta s_\alpha - c_\alpha s_\beta) \\
 &\times \left[\left(27c_W^4 - 6c_W^2 s_W^2 + s_W^4 \right) \mathcal{U}_{3, g_1, s_1, 1} \mathcal{U}_{3, g_2, s_2, 1}^* \right. \\
 &\quad \left. + 16s_W^4 \mathcal{U}_{3, g_1, s_1, 2} \mathcal{U}_{3, g_2, s_2, 2}^* \right] \quad (B.92)
 \end{aligned}$$



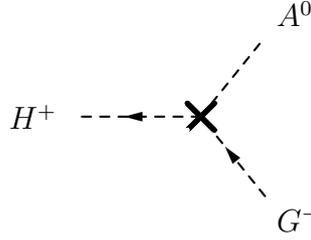
$$\begin{aligned}
 i\Gamma_{\tilde{d}_{s_1, g_1, o_1}^*, \tilde{d}_{s_2, g_2, o_2}, h^0} &= -\frac{i\alpha e M_W \delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{72\pi c_W^4 s_W^3} (c_\beta s_\alpha - c_\alpha s_\beta) \\
 &\times \left[\left(27c_W^4 + 6c_W^2 s_W^2 + s_W^4 \right) \mathcal{U}_{4, g_1, s_1, 1} \mathcal{U}_{4, g_2, s_2, 1}^* \right. \\
 &\quad \left. + 4s_W^4 \mathcal{U}_{4, g_1, s_1, 2} \mathcal{U}_{4, g_2, s_2, 2}^* \right] \quad (B.93)
 \end{aligned}$$



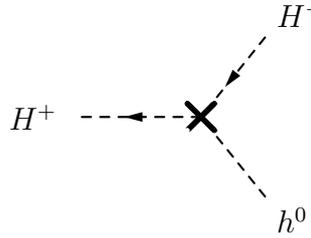
$$i\Gamma_{h^0, A^0, A^0} = -\frac{i\alpha e M_W}{8c_W^4 \pi s_W^3} \left((c_\beta s_\alpha - c_\alpha s_\beta) (3c_W^4 + 2c_W^2 s_W^2 + s_W^4) \right) \quad (\text{B.94})$$



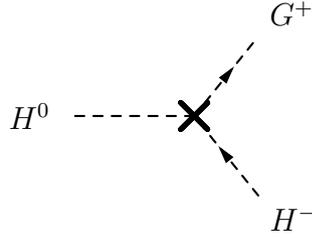
$$i\Gamma_{H^-, G^+, A^0} = -\frac{\alpha e M_W}{4c_W^2 \pi s_W} \quad (\text{B.95})$$



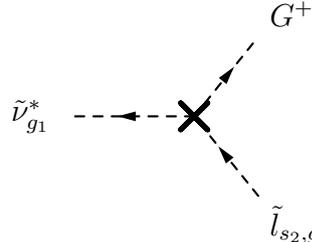
$$i\Gamma_{H^+, G^-, A^0} = \frac{\alpha e M_W}{4c_W^2 \pi s_W} \quad (\text{B.96})$$



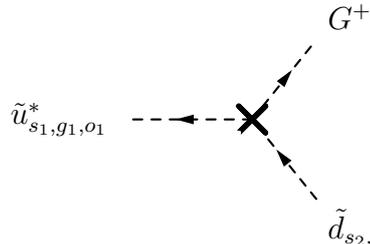
$$i\Gamma_{H^+, h^0, H^-} = -\frac{i\alpha e M_W}{8\pi c_W^4 s_W^3} \left((c_\beta s_\alpha - c_\alpha s_\beta) (3c_W^4 - 2c_W^2 s_W^2 + s_W^4) \right) \quad (\text{B.97})$$



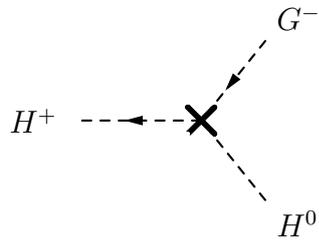
$$i\Gamma_{H^0, H^-, G^+} = \frac{i\alpha e M_W}{4\pi c_W^2 s_W} (c_\beta s_\alpha - c_\alpha s_\beta) \quad (\text{B.98})$$



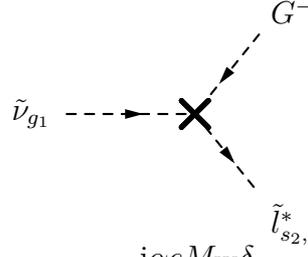
$$i\Gamma_{\tilde{\nu}_{g_1}^*, \tilde{l}_{s_2, g_2}, G^+} = -\frac{i\alpha e M_W \delta_{g_1 g_2}}{2\sqrt{2}\pi c_W^2 s_W} (\mathcal{U}_{2, g_2, s_2, 1}^*) \quad (\text{B.99})$$



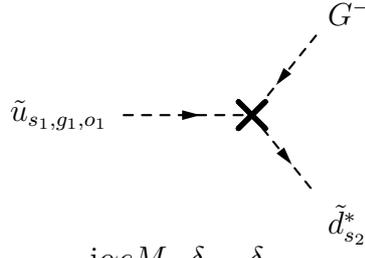
$$i\Gamma_{\tilde{u}_{s_1, g_1, o_1}^*, \tilde{d}_{s_2, g_2, o_2}, G^+} = \frac{i\alpha e M_W \delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{6\sqrt{2}\pi c_W^2 s_W} (\mathcal{U}_{3, g_1, s_1, 1} \mathcal{U}_{4, g_2, s_2, 1}^*) \quad (\text{B.100})$$



$$i\Gamma_{H^+, H^0, G^-} = \frac{i\alpha e M_W}{4\pi c_W^2 s_W} (c_\beta s_\alpha - c_\alpha s_\beta) \quad (\text{B.101})$$



$$i\Gamma_{\tilde{\nu}_{g_1}, \tilde{l}_{s_2, g_2}^*, G^-} = -\frac{i\alpha e M_W \delta_{g_1 g_2}}{2\sqrt{2}\pi c_W^2 s_W} (\mathcal{U}_{2, g_2, s_2, 1}) \quad (\text{B.102})$$



$$i\Gamma_{\tilde{u}_{s_1, g_1, o_1}, \tilde{d}_{s_2, g_2, o_2}^*, G^-} = \frac{i\alpha e M_W \delta_{g_1 g_2} \delta_{o_1 o_2}}{6\sqrt{2}\pi c_W^2 s_W} (\mathcal{U}_{4, g_2, s_2, 1} \mathcal{U}_{3, g_1, s_1, 1}^*) \quad (\text{B.103})$$

Literaturverzeichnis

- [1] M. Reed and B. Simon, *Functional Analysis, Volume 1*, Revised and enlarged ed. (Academic Press, San Diego, 1981).
- [2] M. Heil and F. Kitzka, *Grundkurs theoretische Mechanik*, 1st ed. (Teubner, Stuttgart, 1984).
- [3] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, 1st ed. (University of Chicago Press, Chicago, 1994).
- [4] R. F. Streater and A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That*, 3rd ed. (Princeton University Press, Princeton, 2000).
- [5] G. Scharf, *Quantum Gauge Theories: A True Ghost Story*, 1st ed. (Wiley-Interscience, New York, 2000).
- [6] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 7: Viel-Teilchen-Theorie*, 6th ed. (Springer-Verlag, Berlin, 2005).
- [7] K. Sibold, Störungstheoretische Renormierung, Quantisierung von Eichtheorien, <http://www.physik.uni-leipzig.de/~sibold/qftskriptum.pdf>, 1993.
- [8] W. Greiner and J. Reinhardt, *Theoretische Physik Band 7A, Feldquantisierung*, 1st ed. (Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1993).
- [9] V. Bargmann, NOTE ON WIGNER'S THEOREM ON SYMMETRY OPERATIONS, *J. Math. Phys.* **5**, 862 (1964).
- [10] N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, 3rd ed. (John Wiley & Sons Inc, New York, 1980).
- [11] H. van Hees, Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, <http://theorie.physik.uni-giessen.de/~hees/publ/lect.pdf>, 2009.
- [12] R. Haag, *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*, 2nd ed. (Springer-Verlag, Heidelberg, 1996).
- [13] J. T. Lopuszanski, *Introduction to Symmetry and Supersymmetry in Quantum Field Theory*, 1st ed. (World Scientific Publishing Company, Singapore, 1991).
- [14] W. Zimmermann, Convergence of Bogolyubov's method of renormalization in momentum space, *Commun. Math. Phys.* **15**, 208 (1969).

- [15] N. P. Konopleva and V. N. Popov, *Gauge Fields*, 1st ed. (Harwood Academic Publishers GmbH, New York, 1981).
- [16] J. H. Lowenstein, Normal product quantization of currents in Lagrangian field theory, *Phys. Rev.* **D4**, 2281 (1971).
- [17] T. E. Clark and J. H. Lowenstein, Generalization of Zimmermann's Normal-Product Identity, *Nucl. Phys.* **B113**, 109 (1976).
- [18] O. Piguet and S. Sorella, *Algebraic Renormalization*, 1st ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1995).
- [19] J. H. Lowenstein, Differential vertex operations in Lagrangian field theory, *Commun. Math. Phys.* **24**, 1 (1971).
- [20] P. Breitenlohner and D. Maison, Dimensional Renormalization and the Action Principle, *Commun. Math. Phys.* **52**, 11 (1977).
- [21] J. Wess and B. Zumino, Consequences of anomalous Ward identities, *Phys. Lett.* **B37**, 95 (1971).
- [22] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, Renormalization of Gauge Theories, *Annals Phys.* **98**, 287 (1976).
- [23] L. D. Faddeev and V. N. Popov, Feynman diagrams for the Yang-Mills field, *Phys. Lett.* **B25**, 29 (1967).
- [24] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, The Abelian Higgs-Kibble Model. Unitarity of the S Operator, *Phys. Lett.* **B52**, 344 (1974).
- [25] T. Kugo, *Eichtheorie*, 1st ed. (Springer, Heidelberg, 1997).
- [26] S. R. Coleman and J. Mandula, ALL POSSIBLE SYMMETRIES OF THE S MATRIX, *Phys. Rev.* **159**, 1251 (1967).
- [27] R. Haag, J. T. Lopuszanski, and M. Sohnius, All Possible Generators of Supersymmetries of the s Matrix, *Nucl. Phys.* **B88**, 257 (1975).
- [28] A. Wiedemann and H. J. W. Müller-Kirsten, *Supersymmetry: An Introduction With Conceptual and Computational Details*, 1st ed. (World Scientific, 1987).
- [29] M. Drees, R. Godbole, and P. Roy, *Theory and Phenomenology of Sparticles: An Account of four-dimensional N=1 Supersymmetry in High Energy Physics*, 1st ed. (World Scientific, New York, 2004).
- [30] G. Feldman and P. T. Matthews, SUPERPARTICLES, SUPERFIELDS AND YANG-MILLS LAGRANGIANS, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A405**, 229 (1986).
- [31] I. Simonsen, A Review of minimal supersymmetric electroweak theory, (1995), hep-ph/9506369.

- [32] N. Maggiore, O. Piguet, and S. Wolf, Algebraic Renormalization of $N = 1$ Supersymmetric Gauge Theories with Supersymmetry Breaking Masses, *Nucl. Phys.* **B476**, 329 (1996), hep-th/9604002.
- [33] P. Breitenlohner and D. Maison, RENORMALIZATION OF SUPERSYMMETRIC YANG-MILLS THEORIES, *Cambridge Proceedings, Supersymmetry and Its Applications*, 309 (1985).
- [34] P. Breitenlohner, N=2 SUPERSYMMETRIC YANG-MILLS THEORIES IN THE WESS-ZUMINO GAUGE, *TEGERNSEE, PROCEEDINGS, RENORMALIZATION OF QUANTUM FIELD THEORIES WITH NON-LINEAR FIELD TRANSFORMATIONS*, 64 (1987).
- [35] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, Relativistic S Matrix of Dynamical Systems with Boson and Fermion Constraints, *Phys. Lett.* **B69**, 309 (1977).
- [36] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, Gauge Algebra and Quantization, *Phys. Lett.* **B102**, 27 (1981).
- [37] I. A. Batalin and E. s. Fradkin, A Generalized Canonical Formalism and Quantization of Reducible Gauge Theories, *Phys. Lett.* **B122**, 157 (1983).
- [38] P. L. White, An Analysis of the cohomology structure of superYang-Mills coupled to matter, *Class. Quant. Grav.* **9**, 1663 (1992).
- [39] D. Stöckinger, *Methoden zur Renormierung supersymmetrischer Eichtheorien in der Wess-Zumino-Eichung und deren Anwendung*, 1st ed. (Shaker Verlag, Aachen, 2001).
- [40] L. Girardello and M. T. Grisaru, Soft Breaking of Supersymmetry, *Nucl. Phys.* **B194**, 65 (1982).
- [41] W. Hollik *et al.*, Renormalization of the minimal supersymmetric standard model, *Nucl. Phys.* **B639**, 3 (2002), hep-ph/0204350.
- [42] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, Regularization and Renormalization of Gauge Fields, *Nucl. Phys.* **B44**, 189 (1972).
- [43] W. Siegel, Supersymmetric Dimensional Regularization via Dimensional Reduction, *Phys. Lett.* **B84**, 193 (1979).
- [44] R. Delbourgo and V. B. Prasad, Supersymmetry in the Four-Dimensional Limit, *J. Phys.* **G1**, 377 (1975).
- [45] E. Kraus and D. Stockinger, Softly broken supersymmetric Yang-Mills theories: Renormalization and non-renormalization theorems, *Phys. Rev.* **D65**, 105014 (2002), hep-ph/0201247.
- [46] W. Hollik, E. Kraus, and D. Stockinger, Renormalization and symmetry conditions in supersymmetric QED, *Eur. Phys. J.* **C11**, 365 (1999), hep-ph/9907393.

- [47] D. M. Capper, D. R. T. Jones, and P. van Nieuwenhuizen, Regularization by Dimensional Reduction of Supersymmetric and Nonsupersymmetric Gauge Theories, *Nucl. Phys.* **B167**, 479 (1980).
- [48] W. Hollik and D. Stockinger, Regularization and supersymmetry-restoring counterterms in supersymmetric QCD, *Eur. Phys. J.* **C20**, 105 (2001), hep-ph/0103009.
- [49] I. Fischer, W. Hollik, M. Roth, and D. Stockinger, Restoration of supersymmetric Slavnov-Taylor and Ward identities in presence of soft and spontaneous symmetry breaking, *Phys. Rev.* **D69**, 015004 (2004), hep-ph/0310191.
- [50] L. V. Avdeev, NONINVARIANCE OF REGULARIZATION BY DIMENSIONAL REDUCTION: AN EXPLICIT EXAMPLE OF SUPERSYMMETRY BREAKING, *Phys. Lett.* **B117**, 317 (1982).
- [51] I. Jack and D. R. T. Jones, Regularisation of supersymmetric theories, (1997), hep-ph/9707278.
- [52] L. V. Avdeev and A. A. Vladimirov, DIMENSIONAL REGULARIZATION AND SUPERSYMMETRY, *Nucl. Phys.* **B219**, 262 (1983).
- [53] J. C. Collins, *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*, 1st ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 1986).
- [54] D. Stockinger, Regularization by dimensional reduction: Consistency, quantum action principle, and supersymmetry, *JHEP* **03**, 076 (2005), hep-ph/0503129.
- [55] R. Ferrari, P. A. Grassi, and A. Quadri, Direct algebraic restoration of Slavnov-Taylor identities in the Abelian Higgs-Kibble model, *Phys. Lett.* **B472**, 346 (2000), hep-th/9905192.
- [56] P. A. Grassi, T. Hurth, and M. Steinhauser, The algebraic method, *Nucl. Phys.* **B610**, 215 (2001), hep-ph/0102005.
- [57] C. P. Martin and D. Sanchez-Ruiz, The BRS invariance of noncommutative U(N) Yang-Mills theory at the one-loop level, *Nucl. Phys.* **B598**, 348 (2001), hep-th/0012024.
- [58] I. Fischer, Supersymmetrische Slavnov-Taylor-Identitäten und Renormierung in supersymmetrischen Eichtheorien, <http://www-itp.particle.uni-karlsruhe.de/prep/diploma/PSFiles/diploma-1-2002.ps.gz>, 2002.
- [59] S. P. Martin and M. T. Vaughn, Regularization dependence of running couplings in softly broken supersymmetry, *Phys. Lett.* **B318**, 331 (1993), hep-ph/9308222.
- [60] LEP, A Combination of preliminary electroweak measurements and constraints on the standard model, (2003), hep-ex/0312023.

- [61] Particle Data Group, C. Amsler *et al.*, Review of particle physics, *Phys. Lett.* **B667**, 1 (2008).
- [62] P. W. Higgs, BROKEN SYMMETRIES AND THE MASSES OF GAUGE BOSONS, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 508 (1964).
- [63] F. Englert and R. Brout, Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 321 (1964).
- [64] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble, Global conservation laws and massless particles, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 585 (1964).
- [65] J. Goldstone, Field Theories with Superconductor Solutions, *Nuovo Cim.* **19**, 154 (1961).
- [66] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, Broken Symmetries, *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962).
- [67] D. Hooper and T. Plehn, Supersymmetric dark matter: How light can the LSP be?, *Phys. Lett.* **B562**, 18 (2003), hep-ph/0212226.
- [68] G. R. Farrar and S. Weinberg, SUPERSYMMETRY AT ORDINARY ENERGIES. 2. R INVARIANCE, GOLDSTONE BOSONS, AND GAUGE FERMION MASSES, *Phys. Rev.* **D27**, 2732 (1983).
- [69] A. Salam and J. A. Strathdee, Supersymmetry, Parity and Fermion-Number Conservation, *Nucl. Phys.* **B97**, 293 (1975).
- [70] P. Fayet, Supergauge Invariant Extension of the Higgs Mechanism and a Model for the electron and Its Neutrino, *Nucl. Phys.* **B90**, 104 (1975).
- [71] G. R. Farrar and P. Fayet, Phenomenology of the Production, Decay, and Detection of New Hadronic States Associated with Supersymmetry, *Phys. Lett.* **B76**, 575 (1978).
- [72] A. Denner, H. Eck, O. Hahn, and J. Kublbeck, Feynman rules for fermion number violating interactions, *Nucl. Phys.* **B387**, 467 (1992).
- [73] N. D. Christensen and C. Duhr, FeynRules - Feynman rules made easy, *Comput. Phys. Commun.* **180**, 1614 (2009), 0806.4194.
- [74] T. Hahn, Feynman Diagram Calculations with FeynArts, FormCalc, and LoopTools, (2010), 1006.2231.
- [75] T. Hahn and C. Schappacher, The implementation of the minimal supersymmetric standard model in FeynArts and FormCalc, *Comput. Phys. Commun.* **143**, 54 (2002), hep-ph/0105349.

- [76] A. Denner, Techniques for calculation of electroweak radiative corrections at the one loop level and results for W physics at LEP-200, *Fortschr. Phys.* **41**, 307 (1993), 0709.1075.
- [77] G. Passarino and M. J. G. Veltman, One Loop Corrections for $e^+ e^-$ Annihilation Into $\mu^+ \mu^-$ in the Weinberg Model, *Nucl. Phys.* **B160**, 151 (1979).
- [78] M. Böhm, A. Denner, and H. Joos, *Gauge Theories of the Strong and Electroweak Interaction*, 3rd ed. (Teubner, Stuttgart, 2001).

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Prof. Dr. Dominik Stöckinger bedanken, der mich bei meiner Diplomarbeit stets unterstützt hat. Durch diese Diplomarbeit habe ich eine völlig neue Sichtweise auf die Quantenfeldtheorie erhalten, was insbesondere die *nicht-symmetrischen* Counterterme anbelangt. Für die Auswahl des Themas der Diplomarbeit bin ich ihm sehr dankbar. Des Weiteren bin ich Alexander Voigt zu großem Dank verpflichtet. Er war mir stets ein Mentor was die Programmierung betrifft und hat durch sein äußerst strenges und unermüdliches Korrekturlesen zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Ich möchte mich bei Matthias Geyer und Alexander Voigt für die vielen spannenden und anregenden Diskussionen über Quantenfeldtheorie bedanken.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Philipp Varšo
Dresden im August 2010