Zusammenfassung

Philipp Varšo

July 17, 2014

In diesen Ausarbeitungen zu einem Proseminarvortrag soll auf die Eigenschaften regulärer und ordnungsbeschränkter Operatoren im Sinne eines halbgeordneten Vektorraumes eingegangen werden. Darüber hinaus wird auf das Theorem von Riesz-Kantorovich hingearbeitet, welches hinreichende Bedingungen angibt, damit der halbgeordnete Vektorraum der ordnungsbeschränkten Operatoren zu einem Riesz-Raum wird.

Dieser Text orientiert sich inhaltlich am Abschnitt 1.1 aus [AB06].

Contents

1 Reguläre und Ordnungsbeschränkte Operatoren

1.1 Grundlegende Eigenschaften

Ein Netz $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ aus einem Riesz-Raum wird als **fallend** (symbolisch geschrieben $x_\alpha \downarrow$) bezeichnet, wenn $\alpha \succeq \beta$ impliziert $x_\alpha \leq x_\beta$. Die Notation $x_\alpha \downarrow x$ bedeutet, dass $x_\alpha \downarrow$ und $\inf_{\alpha\in\mathfrak{A}} x_\alpha = x$ gleichzeitig gelten. Analog sind die Symbole $x_\alpha \uparrow$ und $x_\alpha \uparrow x$ zu verstehen. Jeder Riesz-Raum E trägt die Eigenschaft **archimedisch** zu sein, wenn für eine fallende Folge $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, mit dem n-ten Glied $x_n = \frac{1}{n}x$, die Eigenschaft $\frac{1}{n}x \downarrow 0$ in E für jedes $x \in E^+$ gilt. Alle Funktionenräume, also insbesondere die L_p-Räume, mit der punktweisen Ordnung sind archimedisch.

Theorem 1.1.1 (Kantorovich)**.** *Seien E und F jeweils Riesz-Räume, wobei F archimedisch ist. Des Weiteren wird angenommen, dass $T\colon E^+ \to F^+$ eine additive Abbildung darstellt, also $T(x+y) = T(x) + T(y)$ gilt für alle $x, y \in E^+$. Es existiert dann genau eine Fortsetzung der Abbildung T zu einem positiven Operator $\widetilde{T}\colon E \to F$, welche gegeben ist durch*

$$\widetilde{T}(x) = T(x^+) - T(x^-) \text{ für alle } x \in E. \tag{1}$$

Beweis. Sei $T\colon E^+ \to F^+$ eine additive Abbildung. Man betrachtet die Abbildung $S\colon E \to F$, welche definiert ist durch

$$S(x) = T(x^+) - T(x^-) \text{ für alle } x \in E. \tag{2}$$

Die Abbildung T als additive Abbildung besitzt die Eigenschaft, dass $T(0) = 0$. Sei $x \neq 0$ mit $x \in E^+$, dann folgt damit, dass $x^- = 0$. Damit hat man $S(x) = T(x)$ für alle $x \in E^+$. Die Abbildung S stellt demnach eine Fortsetzung der Abbildung T von E nach F dar, welche sogar linear ist, was im Folgenden gezeigt werden soll. Sei jedoch zunächst $\widetilde{S}\colon E \to F$ eine andere lineare Fortsetzung der Abbildung T, dann gelten folgende äquivalente Umformungen für alle $x \in E$

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}(x) &= \widetilde{S}(x^+ - x^-) && (E \text{ ist Riesz-Raum})\\
&= \widetilde{S}(x^+) - \widetilde{S}(x^-) && (\tilde{S} \text{ ist eine lineare Abbildung})\\
&= T(x^+) - T(x^-) && (\widetilde{S} \text{ ist eine Fortsetzung von } T)\\
&= S(x^+) - S(x^-) && (S \text{ ist eine Fortsetzung von } T)\\
&= S(x) && (\text{nach Definition von S}).
\end{aligned} \tag{3}$$

Daraus folgt, dass $\widetilde{S} = S$. Somit stellt S die einzig mögliche lineare Fortsetzung von T dar. Damit ist die Eindeutigkeit von S gezeigt. Es soll nun gezeigt werden, dass S sich als Abbildung additiv und homogen verhält.
Angenommen $x \in E$ lässt sich darstellen als $x = x_1 - x_2$, wobei $x_1, x_2 \in E^+$, dann gilt

$$S(x) = T(x_1) - T(x_2). \tag{4}$$

Um dies einzusehen, sei $x \in E$ fest und man nimmt an, dass $x = x^+ - x^- = x_1 - x_2$ mit $x_1, x_2 \in E^+$. Es gilt dann $x^+ + x_2 = x_1 + x^-$ und mit Hilfe der Additivtät von T erhält man

$$T(x^+) + T(x_2) = T(x^+ + x_2) = T(x_1 + x^-) = T(x_1) + T(x^-) \tag{5}$$

oder

$$S(x) = T(x^+) - T(x^-) = T(x_1) - T(x_2). \tag{6}$$

Für $x, y \in E$ gelten folgende äquivalente Umformungen

$$\begin{aligned}
S(x+y) &= S((x^+ - x^-) + (y^+ - y^-)) && (E \text{ ist Riesz-Raum})\\
&= S((x^+ + y^+) - (x^- + y^-))\\
&= T((x^+ + y^+)) - T((x^- + y^-)) && (E^+ \text{ ist Kegel und (4) gilt})\\
&= T(x^+) + T(y^+) - T(x^-) - T(y^-) && (T \text{ ist additiv auf } E^+)\\
&= \Big[T(x^+) - T(x^-)\Big] + \Big[T(y^+) - T(y^-)\Big]\\
&= S(x) + S(y) && (\text{nach Definition von } S).
\end{aligned} \tag{7}$$

Damit ist die Additivtät von S gezeigt. Es verbleibt die Homogenität von S zu zeigen. Hierzu folgt aus (7) mittels Induktion, dass

$$S(nx) = nS(x) \text{ für alle } x \in E,\ n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$S(x) = S\left(\tfrac{n}{n}x\right) = S\left(n\left(\tfrac{1}{n}x\right)\right) \overset{(8)}{=} nS\left(\tfrac{1}{n}x\right) \text{ für alle } x \in E,\ n \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

was äquivalent ist zu

$$\tfrac{1}{n}S(x) = S(\tfrac{1}{n}x) \text{ für alle } x \in E,\ n \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Mit Hilfe von (8) und (10) folgt nun, dass

$$S(rx) = rS(x) \text{ für alle } x \in E,\ r \in \mathbb{Q}^+. \tag{11}$$

Darüber hinaus gilt für eine additive Abbildung $S\colon E \to F$ und $x \in E$

$$S(0) = S(x - x) = S(x + (-1)x) = S(x) + S(-x), \tag{12}$$

was äquivalent ist zu

$$-S(x) = S(-x). \tag{13}$$

Also gilt (11) sogar für alle $r \in \mathbb{Q}$.

S ist sogar monoton, das heißt wenn $x \leq y$, dann $S(x) \leq S(y)$ für $x, y \in E$. Man nimmt hierzu an, dass für $x, y \in E$, $x \geq y$. Damit ist $x - y \in E^+$, also hat man

$$\begin{aligned} S(x) &= S((x-y)+y) \\ &= S((x-y)) + S(y) \quad \text{(nach (7))} \\ &= T((x-y)) + S(y) \quad (S = T \text{ auf } E^+) \\ &\geq S(y). \end{aligned} \tag{14}$$

Man betrachtet nun ein festes $x \in E^+$ und sei $\lambda \geq 0$. Wählt man zwei Folgen von rationalen Zahlen $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft $r_n \uparrow \lambda$ und $t_n \downarrow \lambda$, dann gilt $r_n x \leq \lambda x \leq t_n x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe dieser Aussage und der Monotonie von S impliziert dies

$$r_n S(x) \overset{(11)}{=} S(r_n x) \overset{(14)}{\leq} S(\lambda x) \overset{(14)}{\leq} S(t_n x) \overset{(11)}{=} t_n S(x) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Des Weiteren hat man für $m \in \mathbb{N}$, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$(t_n - \lambda)S(x) \leq \left(\tfrac{1}{m}\right) S(x) \to 0, \text{ für } m \to \infty. \tag{16}$$

Und analog für die Folge $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat man für ein $m' \in \mathbb{N}$, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$

$$(\lambda - r_n)S(x) \leq \left(\tfrac{1}{m'}\right) S(x) \to 0, \text{ für } m' \to \infty. \tag{17}$$

Die Grenzübergänge in (16) und (17) existieren, da nach (14) S monoton ist und damit $S(x) \geq 0$ und darüber hinaus ist nach Annahme der Riesz-Raum F archimedisch. Damit hat man nun

$$\lim_{n\to\infty} r_n S(x) = \lim_{n\to\infty} t_n S(x) = \lambda S(x). \tag{18}$$

Wenn man also den Limes für $n \to \infty$ in (15) betrachtet, dann werden die Abschätzungen durch Gleichheit ersetzt und man hat damit gezeigt, dass

$$S(\lambda x) = \lambda S(x) \text{ für } \lambda \geq 0,\ x \in E^+. \tag{19}$$

Schlussendlich wird nun angenommen, dass $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in E$, dann gilt

$$\begin{aligned} S(\lambda x) &= S(\lambda(x^+ - x^-) = S(\lambda x^+ + (-\lambda)x^-) \\ &\overset{(7)}{=} S(\lambda x^+) + S(-(\lambda x^-)) \\ &\overset{(13)}{=} S(\lambda x^+) - S(\lambda x^-) \\ &\overset{(19)}{=} \lambda S(x^+) - \lambda S(x^-) \\ &\overset{(2)}{=} \lambda \Big[T(x^+) - T(x^-) \Big] \\ &\overset{(2)}{=} \lambda S(x). \end{aligned} \tag{20}$$

Damit ist gezeigt, dass S homogen ist und aus der Montonie von S schlussfolgert man, dass S ein positiver Operator ist. □

Mit dem Theorem 1.1.1 ist klar, dass für eine Abbildung $T : E^+ \to F^+$ eine eindeutige Fortsetzung zu einem postiven Operator $\widetilde{T}\colon E \to F$ genau dann existiert, wenn T additiv auf E^+ ist. Dies bedeutet, dass ein positiver Operator bereits dadurch vollständig charakterisiert ist, wie dieser auf dem positiven Kegel seines Definitionsbereiches wirkt.

Wir vereinbaren in diesem Text, dass Operatoren als Abbildungen zwischen Vektorräumen, immer als lineare Abbildungen aufzufassen sind. Es kann eingesehen werden, dass die auf der Menge $\mathcal{L}(E, F)$, wobei

$$\mathcal{L}(E, F) := \{T\colon E \to F \colon T \text{ ist Operator}\}, \tag{21}$$

definierte Halbordnung

$$S \leq T :\iff T - S \text{ ist ein positiver Operator} \iff S(x) \leq T(x) \text{ für alle } x \in E^+ \tag{22}$$

verträglich ist mit den Vektorraumoperationen auf $\mathcal{L}(E, F)$. Damit wird $\mathcal{L}(E, F)$ zu einem halbgeordneten Vektorraum.

Um zu zeigen, unter welchen Umständen $\mathcal{L}(E, F)$ selbst wieder zu einem Riesz-Raum wird, soll eine Aussage über eine sogenannte *Zerlegungseigenschaft* in einem Riesz-Raum E bereit gestellt werden.

Theorem 1.1.2 (Zerlegungseigenschaft)**.** *Sei E ein Riesz-Raum, $n \in \mathbb{N}$ und es möge gelten, dass $|x| \leq |y_1 + \cdots + y_n|$ für $x \in E, \{y_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}} \subseteq E$. Daraus folgt die Existenz von $\{x_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}} \subseteq E$ mit der Eigenschaft $x = x_1 + \cdots + x_n$ und $|x_i| \leq |y_i|$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$. Des Weiteren gilt für den Spezialfall $x \geq 0$, dass die Menge der $\{x_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}} \subseteq E$ so gewählt werden kann, dass $|x_i| \geq 0$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Beweis. Es soll für $x \in E, \{y_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \subseteq E$ durch vollständige Induktion gezeigt werden, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$(n) \quad |x| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} y_i\right| \Rightarrow \exists \ \{x_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \subseteq E: \ x = \sum_{i=1}^{n} x_i \wedge \forall i \in \{1,\dots,n\}\colon |x_i| \leq |y_i| \quad (23)$$

gilt:

- $n = 1$: In diesem Fall ist nichts zu zeigen, setze $x_1 := x$.
- $n \to n+1$: Man nimmt an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits bewiesen ist. Sei nun $|x| \leq |y_1 + \cdots + y_n + y_{n+1}| = |\tilde{y}_n + y_{n+1}|$, wobei $\tilde{y}_n := y_1 + \cdots + y_n$, dann setzt man $\tilde{x}_n := [x \vee (-|\tilde{y}_n|)] \wedge |\tilde{y}_n|$.

  Es soll $|\tilde{x}_n|$ berechnet werden.

  $$\begin{aligned} |\tilde{x}_n| &= \tilde{x}_n^+ + \tilde{x}_n^- \\ &= (\{[x \vee (-|\tilde{y}_n|)] \wedge |\tilde{y}_n|\} \vee 0) + (-\{[x \vee (-|\tilde{y}_n|)] \wedge |\tilde{y}_n|\} \vee 0) \end{aligned} \quad (24)$$

  Für $\tilde{x}_n^+$ erhält man nach folgenden äquivalenten Umformungen

  $$\begin{aligned} \tilde{x}_n^+ &= \{[x \vee (-|\tilde{y}_n|)] \vee 0\} \wedge \{|\tilde{y}_n| \vee 0\} && \text{(Distributivität von } \vee \text{ und } \wedge) \\ &= \{x \vee [(-|\tilde{y}_n|) \vee 0]\} \wedge |\tilde{y}_n| && \text{(Assoziativität für } \vee) \\ &= (x \vee 0) \wedge |\tilde{y}_n| \\ &= x^+ \wedge |\tilde{y}_n| \\ &\leq |\tilde{y}_n|. \end{aligned} \quad (25)$$

  Die Assoziativitätseigenschaft für $\vee$ kann [DP02, Theorem 2.9] entnommen werden und die Distributivität von $\vee$ und $\wedge$ wird in [AB06, Theorem 1.8] bewiesen. Für $\tilde{x}_n^-$ gelten analoge Schritte

  $$\begin{aligned} \tilde{x}_n^- &= \{[(-x) \wedge |\tilde{y}_n|] \vee (-|\tilde{y}_n|)\} \vee 0 && \text{([AB06, Theorem 1.3 (1)]} \\ &= [(-x) \wedge |\tilde{y}_n|] \vee \{(-|\tilde{y}_n|) \vee 0\} && \text{(Assoziativität für } \vee) \\ &= [(-x) \wedge |\tilde{y}_n|] \vee 0 \\ &= [(-x) \vee 0] \wedge |\tilde{y}_n| && \text{(Distributivität von } \vee \text{ und } \wedge) \\ &= x^- \wedge |\tilde{y}_n| \\ &\leq |\tilde{y}_n|. \end{aligned} \quad (26)$$

  Mit $-\tilde{x}_n^- \leq \tilde{x}_n \leq \tilde{x}_n^+$ erhält man nun aus (25) und (26) $-|\tilde{y}_n| \leq \tilde{x}_n \leq |\tilde{y}_n|$. Es gilt also $\tilde{x}_n \leq |\tilde{y}_n|$ und $-\tilde{x}_n \leq |\tilde{y}_n|$ und somit nach Definition des Supremums $|\tilde{x}_n| = \tilde{x}_n \vee (-\tilde{x}_n) \leq |\tilde{y}_n|$.

  Es konnte also gezeigt werden, dass $|\tilde{x}_n| \leq |\tilde{y}_n|$ (und das $0 \leq \tilde{x}_n \leq x$, wenn x positiv ist). Damit gilt aufgrund der Induktionsannahme, dass eine Folge $\{x_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \subseteq E$

existiert, für welche gilt, dass $\tilde{x}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Setzt man nun $x_{n+1} = x - \tilde{x}_n$, dann verbleibt zu zeigen, dass $|x_{n+1}| \leq |y_{n+1}|$. Betrachte hierzu folgende Umformungen

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x - [\overbrace{x \vee (-|\tilde{y}_n|)}^{=:c}] \wedge |\tilde{y}_n| \\
&= x - (c \wedge |\tilde{y}_n|) \\
&= x + ((-c) \vee (-|\tilde{y}_n|)) \\
&= (x - c) \vee (x - |\tilde{y}_n|) \\
&= [x - (x \vee (-|\tilde{y}_n|))] \vee (x - |\tilde{y}_n|) \\
&= [x + ((-x) \wedge |\tilde{y}_n|)] \vee (x - |\tilde{y}_n|) \\
&= [0 \wedge (x + |\tilde{y}_n|)] \vee (x - |\tilde{y}_n|).
\end{aligned} \tag{27}
$$

Mit Hilfe einer *Dreiecksungleichung* (etwa in [AB06, Theorem 1.9]) gewinnt man die Abschätzung $|x| \leq |\tilde{y}_n + y_{n+1}| \leq |\tilde{y}_n| + |y_{n+1}|$, woraus folgt $-|\tilde{y}_n| - |y_{n+1}| \leq x \leq |\tilde{y}_n| + |y_{n+1}|$. Damit erhält man nun

$$
\begin{aligned}
-|y_{n+1}| = (-|y_{n+1}|) \wedge 0 \leq (x{+}|\tilde{y}_n|) \wedge 0 \\
&\overset{(27)}{\leq} x_{n+1} \\
&\overset{(*)}{\leq} 0 \vee (x - |\tilde{y}_n|) \leq 0 \vee |y_{n+1}| = |y_{n+1}|.
\end{aligned} \tag{28}
$$

Wobei in $(*)$ die Distributivität von $\vee$ und $\wedge$ und die Definition des Infimums in (27) verwendet wurde. Man entnimmt (28), dass einerseits $x_{n+1} \leq |y_{n+1}|$ und andererseits $|y_{n+1}| \geq -x_{n+1}$ gilt und damit insgesamt also $|x_{n+1}| = x_{n+1} \vee (-x_{n+1}) \leq |y_{n+1}|$.

Daher gilt die Aussage (n) für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

1.2 Die Riesz-Kantorovich–Formeln

Auf $\mathcal{L}(E, F)$ wurde eine Halbordnung erklärt und damit ist es sinnvoll den Begriff des *Modulus* eines Operators zu definieren.

Definition 1.2.1. *Für einen Operator $T\colon E \to F$, wobei E, F jeweils Riesz-Räume darstellen, sagt man, dass der* ***Modulus*** *für T genau dann existiert, wenn*

$$|T| := T \vee (-T) \tag{29}$$

existiert—in dem Sinne, dass $|T|$, dass Supremum der Menge $\{\, T, -T \,\}$ im Raum $\mathcal{L}(E, F)$ ist.

Es wird nun ein Fall angegeben, in dem der Modulus eines Operators existiert.

Theorem 1.2.1. *Sei $T\colon E \to F$ ein Operator, wobei E, F jeweils Riesz-Räume sind und für jedes $x \in E^+$ möge $\sup\{\, |Ty| \colon |y| \leq x \,\}$ in F existieren, dann existiert auch $|T|$ und*

$$|T|\,(x) = \sup\{\, |Ty| \colon |y| \leq x \,\} \tag{30}$$

gilt für alle $x \in E^+$.

Beweis. Man definiert zunächst $S\colon E^+ \to F^+$ durch $S(x) = \sup\{\,|Ty|\colon |y| \leq x\,\}$ für jedes $x \in E^+$. Wenn $|y| \leq x$ impliziert dies, dass $|\pm y| = |y| \leq x$. Des Weiteren hat man $T(\pm y) = \pm Ty \leq |Ty|$, also gilt für jedes $x \in E^+$

$$S'(x) = \sup\{\,Ty\colon |y| \leq x\,\} \leq \sup\{\,|Ty|\colon |y| \leq x\,\} = S(x). \tag{31}$$

Damit ist klar, dass $S'(x)$ existiert, da nach Voraussetzung $S(x)$ existiert. Andererseits gilt nach Definition des Supremums, dass für jedes $x \in E^+$ und $y \in E$, mit $y \leq |x|$, $Ty \leq S'(x)$ und $T(-y) = -Ty \leq S'(x)$, also $|Ty| = (Ty) \vee (-Ty) \leq S'(x)$ und damit $S(x) \leq S'(x)$. Insgesamt kann man festhalten, dass $S(x) = S'(x)$ für jedes $x \in E^+$.

Die Behauptung ist nun, dass S additiv ist. Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Hierfür betrachtet man $u, v \in E^+$. Falls $|y| \leq u$ und $|z| \leq v$, dann gilt mit Hilfe der Dreiecksungleichung $|y + z| \leq |y| + |z| \leq u + v$, und mit Hilfe der Linearität von T erhält man $T(y) + T(z) = T(y + z) \leq S(u + v)$. Bildet man nun das Supremum auf der linken Seite der Gleichung, dann erhält man $S(u) + S(v) \leq S(u + v)$.

Andererseits gilt im Falle $|y| \leq u + v$ nach Theorem 1.1.2, dass $y_1, y_2 \in E$ existieren mit der Eigenschaft

$$|y_1| \leq u, |y_2| \leq v \text{ und } y = y_1 + y_2. \tag{32}$$

Dann gilt weiter $T(y) = T(y_1) + T(y_2) \leq S(u) + S(v)$, woraus folgt, dass $S(u+v) \leq S(u) + S(v)$ und insgesamt $S(u + v) = S(u) + S(v)$. Mit Hilfe der Aussage des Theorems 1.1.1 definiert S einen positiven Operator $\widetilde{S}\colon E \to F$, welcher der Einfachheit wegen wieder durch S bezeichnet werden soll.

Um einzusehen, dass S das Supremum der Menge $\{\,T, -T\,\}$ ist, betrachtet man ein $x \in E^+$. Es gilt, dass $Tx \leq |Tx| \in \{\,|Ty|\colon |y| \leq x\,\}$, dann $Tx \leq Sx$ und $T(-x) = -Tx \leq |Tx| \in \{\,|Ty|\colon |y| \leq x\,\}$, dann $-Tx \leq Sx$. Da dies für alle $x \in E^+$ gilt, erhält man $T \leq S$ und $-T \leq S$ im Raum $\mathcal{L}(E, F)$. Weiterhin nimmt man an, dass $\pm T \leq R$ für ein $R \in \mathcal{L}(E, F)$ und damit wird R zu einem positiven Operator. Sei $x \in E^+$ fest. Falls $|y| \leq x$, dann gilt

$$Ty = Ty^+ - Ty^- \leq Ry^+ + Ry^- = R|y| \leq Rx \tag{33}$$

und dies ergibt die gewünschte Abschätzung

$$Sx \leq Rx \text{ für jedes } x \in E^+, \tag{34}$$

woraus folgt

$$S = T \vee (-T) \text{ im Raum } \mathcal{L}(E, F). \tag{35}$$

Damit ist gezeigt, dass S das Supremum der Menge $\{\,T, -T\,\}$ ist. □

Falls der Modulus eines Operators $T\colon E \to F$ existiert, gilt eine nützliche Abschätzung, die nachvollzogen werden soll. Sei $x \in E^+$, so gilt folgende Abschätzung

$$|Tx| = (Tx) \vee [-(Tx)] \leq |T|(x) = |T|(|x|) \text{ für alle } x \in E^+. \tag{36}$$

Sei nun $x \in E$, dann gilt eine analoge Abschätzung

$$|Tx| = |Tx^+ - Tx^-| \overset{(*)}{\leq} |Tx^+| + |Tx^-| \overset{(36)}{\leq} |T|(x^+) + |T|(x^-) = |T|(|x|) \text{ für alle } x \in E. \tag{37}$$

In $(*)$ wurde die Eigenschaft der *Dreiecksungleichung* verwendet.

Seien x und y zwei Vektoren aus einem Riesz-Raum E mit $x \leq y$, dann bezeichnet das **Ordnungsintervall** $[x, y]$ eine Teilmenge aus E auf folgende Weise

$$[x, y] := \{ z \in E \colon x \leq z \leq y \}. \tag{38}$$

Eine Teilmenge A eines Riesz-Raumes wird als **von oben beschränkt** bezeichnet, wenn ein x existiert mit der Eigenschaft $y \leq x$ für alle $y \in A$. Analog definiert man eine **von unten beschränkte** Menge A eines Riesz-Raumes, wenn x existiert mit der Eigenschaft $y \geq x$ für alle $y \in A$. Eine Teilmenge A eines Riesz-Raumes heißt **ordnungsbeschränkt**, wenn sie von unten und von oben beschränkt ist, was äquivalent ist zu der Aussage, dass sie in einem Ordnungsintervall enthalten ist.

Definition 1.2.2. *Ein Operator $T \colon E \to F$ zwischen zwei Riesz-Räumen E, F, wird als **ordnungsbeschränkt** bezeichnet, falls dieser ordnungsbeschränkte Mengen aus E auf ordnungsbeschränkte Mengen aus F abbildet.*

Der Vektorraum aller ordnungsbeschränkten Operatoren von E nach F wird als $\mathcal{L}_\mathrm{b}(E, F)$ geschrieben.

Ein Operator $T \colon E \to F$ zwischen zwei Riesz-Räumen besitzt die Eigenschaft **regulär** zu sein, wenn sich dieser als Differenz zweier positiver Operatoren ausdrücken lässt. Dies ist äquivalent zu der Aussage, dass ein positiver Operator S existieren möge, mit der Eigenschaft $T \leq S$ im Sinne der Halbordnung auf $\mathcal{L}(E, F)$.

Wie dem Beweis des Theorems 1.1.1 zu entnehmen ist, ist jede positive Abbildung insbesondere monton und damit ist jeder positive Operator sogar ordnungsbeschränkt. Damit ergeben sich folgende Inklusionen für Vektorräume, falls $\mathcal{L}_\mathrm{r}(E, F)$ den Vektorraum aller regulären Operatoren bezeichnet

$$\mathcal{L}_\mathrm{r}(E, F) \subseteq \mathcal{L}_\mathrm{b}(E, F) \subseteq \mathcal{L}(E, F)\,. \tag{39}$$

Die Teilräume $\mathcal{L}_\mathrm{r}(E, F)$ und $\mathcal{L}_\mathrm{b}(E, F)$ erben in natürlichweise die Halbordnung des Raumes $\mathcal{L}(E, F)$ und werden somit ebenfalls zu halbgeordneten Vektorräumen.

Es soll nun ein Beispiel angegeben werden, welches zeigt, dass die Inklusion $\mathcal{L}_\mathrm{r}(E, F) \subseteq \mathcal{L}_\mathrm{b}(E, F)$ auch echt sein kann.

Beispiel 1.2.1. Gegeben sei der Operator $T \colon C[-1, 1] \to C[-1, 1]$, welcher für jedes $f \in C[-1, 1]$ definiert ist durch

$$[Tf](t) = f\Big(\sin\frac{1}{t}\Big) - f\Big(\sin\Big(t + \frac{1}{t}\Big)\Big) \text{ für } 0 < |t| \leq 1 \text{ und } [Tf](0) = 0 \tag{40}$$

Zunächst soll der Operator auf seine Wohldefiniertheit hin untersucht werden. Es soll überprüft werden, ob Tf im Punkt $t_0 = 0$ stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Satz von Heine ist f auf $[-1, 1]$ sogar gleichmäßig stetig, und somit existiert ein $\delta > 0$, sodass für beliebige $x, y \in [-1,1]$ mit $|x-y| < \delta$ entsprechend $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ gilt Darüber hinaus gilt die hilfreiche Abschätzung $|\sin \frac{1}{t} - \sin(t + \frac{1}{t})| \leq |t|$ [1]. Mit Hilfe dieser Abschätzung und der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf $[-1,1]$, erhält man für $\varepsilon > 0$ und $|t| < \delta$

$$\begin{aligned} |[Tf](t) - [Tf](0)| &= \Big| f\Big(\sin \frac{1}{t}\Big) - f\Big(\sin\Big(t + \frac{1}{t}\Big)\Big) - 0\Big| \\ &= |f(x(t)) - f(y(t))| \\ &< \varepsilon. \end{aligned} \tag{41}$$

Damit ist gezeigt, dass Tf an der Stelle Null tatsächlich stetig ist. Für die übrigen $0 < |t| \leq 1$ ergibt sich diese Aussage, dass die Verknüpfung stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion ist und insgesamt ist demnach $Tf \in C[-1,1]$ für jedes $f \in C[-1,1]$.

Sei nun $g \in [-\mathbb{1}, \mathbb{1}] = \{\, f \in C[-1,1] \colon -\mathbb{1} \leq f \leq \mathbb{1} \,\}$. Hierfür gilt die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} Tg &= g\Big(\sin \frac{1}{t}\Big) - g\Big(\sin\Big(t + \frac{1}{t}\Big)\Big) \\ &\leq \mathbb{1} - (-\mathbb{1}) \\ &= 2 \cdot \mathbb{1}. \end{aligned} \tag{42}$$

Analoges gilt für die Abschätzung nach unten und somit erhält man

$$T[-\mathbb{1}, \mathbb{1}] \subseteq 2[-\mathbb{1}, \mathbb{1}]. \tag{43}$$

Für $g_1, g_2 \in C[-1,1]$ sei $A = \{\, \tilde{f} \in C[-1,1] \colon g_1 \leq \tilde{f} \leq g_2 \,\}$. A ist ordnungsbeschränkt. Nach dem Satz vom Minimum und Maximum einer stetigen Funktionen auf einer kompakten Menge, gilt für ein $f \in C[-1,1]$, dass ein $\lambda > 0$ existiert mit der Eigenschaft $|f| \leq \lambda \mathbb{1}$. Daher gilt $A \subseteq \lambda[-\mathbb{1}, \mathbb{1}]$. Aus (43) schlussfolgert man, dass das Bild von $\lambda[-\mathbb{1}, \mathbb{1}]$ unter T in $I := 2\lambda[-\mathbb{1}, \mathbb{1}]$ enthalten ist. Das Bild von A unter T ist wiederum in I enthalten und da eine A eine beliebige ordnugsbeschränkte Menge ist, stellt T demnach einen ordnungsbeschränkten Operator dar.

Die Behauptung ist nun, dass T jedoch kein regulärer Operator ist. Als Widerspruch wird angenommen, dass ein positiver Operator $S \colon C[-1,1] \to C[-1,1]$ existiert, so dass $T \leq S$. Es soll gezeigt werden, dass für jedes $0 \leq f \in C[-1,1]$ gilt

$$[Sf](0) \geq f(t) \text{ für alle } t \in [-1,1] \tag{44}$$

Um dies zu zeigen, wird ein $0 \leq f \in C[-1,1]$ herangezogen und sei $0 < c < 2\pi$. Des Weiteren setzt man für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $t_n = 1/(c + 2\pi n)$, wobei gilt $t_n \to 0$, wann immer $n \to \infty$. Als nächster Schritt soll ein $g_n \in C[-1,1]$ mit $0 \leq g_n \leq f$ so gewählt werden, dass $g_n(\sin c) = f(\sin c)$ und $g_n(\sin(c + t_n)) = 0$ gilt. Da jeder positive Operator insbesondere homogen ist, gilt folgende Abschätzung für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} [Sf](t_n) \geq [Sg_n](t_n) &\geq [Tg_n](t_n) \\ &= g_n(\sin(c + 2\pi n)) - g_n(\sin(t_n + c + 2\pi n)) \\ &= g_n(\sin c) - \underbrace{g_n(\sin(c + t_n))}_{=0} = f(\sin c). \end{aligned} \tag{45}$$

[1] Diese Abschätzung ist etwa für $t > 0$ folgendermaßen einzusehen (und $t < 0$ dann analog); $|\sin(t + \frac{1}{t}) - \sin \frac{1}{t}| = |\int_{\frac{1}{t}}^{t+\frac{1}{t}} \cos x \, dx| \leq \int_{\frac{1}{t}}^{t+\frac{1}{t}} |\cos x| \, dx \leq \int_{\frac{1}{t}}^{t+\frac{1}{t}} 1 \, dx = t$

Nimmt man nun den Grenzwert $n \to \infty$ in (45) und nutzt aus, dass $Sf \in C[-1,1]$, dann gilt $[Sf](0) \geq f(\sin c)$ für alle $0 < c < 2\pi$ und (44) ist damit gezeigt.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachtet man eine Partitionierung $P_n = \{ a_0, a_1, \ldots, a_n \}$ des Intervalls $[-1,1]$ in n Teilintervalle. Für jedes $i \in \{ 1, 2, \ldots, n \}$ soll ein $f_i \in C[-1,1]$ so beschaffen sein, dass $0 \leq f_i \leq \mathbb{1}$, wobei f_i Null außerhalb des Intervalls (a_{i-1}, a_i) ist und $f_i((a_{i-1} - a_i)/2) = 1$. Zieht man die Tatsache hinzu, dass $\sum_{i=1}^{n} f_i \leq \mathbb{1}$, dann folgt damit, dass

$$[S\mathbb{1}](0) \geq \Big[S\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i\Big)\Big](0) = \sum_{i=1}^{n} [Sf_i](0) \overset{(44)}{\geq} n\,. \tag{46}$$

Da (46) für alle $n \in \mathbb{N}$ gültig ist, stellt dies einen Widerspruch zu der Annahme der Eigenschaft von S als positiven Operator dar, welcher insbesondere monoton ist. $\square$

In dem nächsten Beispiel soll gezeigt werden, dass nicht jeder reguläre Operator einen Modulus besitzen muss.

Beispiel 1.2.2. Sei c der Riesz-Raum aller konvergenten Folgen mit Werten aus $\mathbb{R}$, also $c = \{ \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \colon \lim_{n\to\infty} x_n \text{ existiert in } \mathbb{R} \}$. Es sollen die beiden Operatoren $S, T \colon c \to c$ betrachtet werden, definert durch

$$(T(\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}))_n = \begin{cases} x_{n-1} & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ x_{n+1} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{47}$$

und

$$(S(\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}))_n = \begin{cases} x_{n-1} & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ x_{n} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{48}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit lässt sich ein Operator $R \colon c \to c$ konstruieren, in dem Sinne $R = S - T$, damit ist

$$(R(\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}))_n = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ x_{n+1} - x_n & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{49}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Operator R ist regulär, da S und T positive Operatoren sind.

Mittels Widerspruchsbeweis soll gezeigt werden, dass der Modulus des regulären Operators R nicht existieren kann. Angenommen, der Modulus von R existiert. Man betrachtet den positiven Operator $P_n \colon c \to c$ definiert durch

$$(P_n(\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}))_m = \begin{cases} 0 & \text{wenn } m = n, \\ x_m & \text{sonst} \end{cases} \tag{50}$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Mit der Abschätzung $\pm R \leq |R| P_{2n} \leq |R|$ erhält man $|R| P_{2n} = |R|$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dies bedeutet nichts anderes als, dass für das Bild unter $|R|$ für jedes Element aus c die geraden Einträge gerade Null sind. Andererseits gilt für die Folgen $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\delta_{in}\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $i \in \mathbb{N}$ und $e = (1, 1, \ldots)$ aus c und mit Hilfe von

$$- R(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \leq |R|(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \leq |R| e\,, \tag{51}$$

dass die ungeraden Einträge von $|R|e$ alle größer oder gleich 1 sind. Damit liegen zwei Teilfogen von $|R|e$ vor, die gegen unterschiedliche Zahlen aus $\mathbb{R}$ konvergieren und damit $|R|e \notin c$. Daher kann $|R|$ nicht existieren, wie oben angenommen. □

Im folgenden sollen wichtige Begriffe bereitgestellt werden, um zu ergründen, wann unter der Halbordnung auf $\mathcal{L}(E, F)$ dieser selbst zu einem Riesz-Raum wird.

Wie [LZ71, Theorem 1.2] zu entnehmen ist, gilt für halbgeordnete Vektorräume, dass sie **Dedekind-vollständig** sind genau dann, wenn für jede nach oben beschränkte Teilmenge das Supremum existiert. Nach [LZ71, Theorem 23.2] ist ein Riesz-Raum genau dann Dedekind vollständig, wenn $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x$ die Existenz von $\sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} x_\alpha$ impliziert. Als Spezialfall einer abzählbaren Indexmenge $\mathfrak{A} = \mathbb{N}$ wird ein Riesz-Raum als **Dedekind-σ-vollständig** bezeichnet genau dann, wenn aus $0 \leq x_n \uparrow \leq x$ die Existenz von $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$ folgt (siehe auch [LZ71, Theorem 23.2]) und damit impliziert die Dedekind-Vollständigkeit die Dedekind-σ-Vollständigkeit. Aus der Diskussion nach [LZ71, Theorem 23.2] ist ersichtlich, dass sich aus der Dedekind-σ-Vollständigkeit eines Riesz-Raumes die archimedische Eigenschaft ergibt.

Es sollen zwei Beispiele diskutiert werden, die einen Raum auf seine Dedekind-Vollständigkeit hin überprüfen.

Beispiel 1.2.3. Der Riesz-Raum $C[-1, 1]$ ist nicht Dedekind-σ-vollständig. Dies ist klar, da man eine wachsende Funktionenfolge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus $C[-1, 1]$ so angeben kann, welche punktweise auf dem Intervall $[-1, \frac{1}{2})$ gegen 1 konvergiert und auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$ punktweise gegen 0 konvergiert. Also etwa

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -1 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ -n\left(x - \frac{1}{2}\right) & \text{falls } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{falls } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{52}$$

Dann gilt $0 \leq f_n \uparrow \leq \mathbb{1}$, die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt jedoch kein Supremum in $C[-1, 1]$. □

Beispiel 1.2.4. Der Raum L_1 ist Dedekind-vollständig.

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und sei $L_1 = L_1(\mathcal{F}, \mu)$ die Menge aller numerischen, messbaren Funktionen $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, für die gilt

$$\int_\Omega |f| \, d\mu < \infty \, . \tag{53}$$

Solche f sind nach [Sch11, Lemma 8.2.7] μ-fast überall endlich. Nimmt man an, dass $0 \leq f_\alpha \uparrow \leq g$ in L_1, dann ist nach der Monotonie des Integrals die Familie $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ mit

$$A_\alpha := \int_\Omega f_\alpha \, d\mu \tag{54}$$

monoton wachsend und es gilt

$$A_\alpha \leq \int_\Omega g \, d\mu = \int_\Omega |g| \, d\mu < \infty \quad \text{für alle } \alpha \in \mathfrak{A}. \tag{55}$$

Und somit existiert $S := \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ als endliche Zahl in $\mathbb{R}$. Sei nun $\{f_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$, wobei gesetzt wird

$$A_{\alpha_n} := \int_\Omega f_{\alpha_n}\, d\mu. \tag{56}$$

Damit gilt $A_{\alpha_n} \uparrow S$. Das Supremum $f_0(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_{\alpha_n}(x)$ ist nach [Sch11, Folgerung 7.1.4] eine μ-messbare Funktion und da nach $f_0(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|f_{\alpha_n}| \leq g$ und Monotonie des Integrals $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_{\alpha_n}$ insbesondere μ-integrierbar ist, kann man mit Hilfe des Satzes über majorisierte Konvergenz schlussfolgern (etwa [Sch11, Satz 8.3.9])

$$\int_\Omega f_0\, d\mu = \int_\Omega \sup_{n\in\mathbb{N}} f_{\alpha_n}\, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_{\alpha_n}\, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} A_{\alpha_n} = S < \infty. \tag{57}$$

Betrachtet man für jedes $B \in \mathcal{F}$ und $\alpha \in \mathfrak{A}$, dann gelten auch die bisherigen Aussagen für $\{\tilde{f}_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ mit $\tilde{f}_\alpha := f_\alpha \chi_B$ für alle $\alpha \in \mathfrak{A}$, also insbesondere $0 \leq \tilde{f}_\alpha \uparrow\leq g$ in L_1. Somit erhält man folgende Abschätzung für jedes $\alpha \in \mathfrak{A}$

$$\begin{aligned} \int_B f_\alpha\, d\mu = \int_\Omega f_\alpha \chi_B\, d\mu = \int_\Omega \tilde{f}_\alpha\, d\mu =: \tilde{A}_\alpha \\ \leq \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \tilde{A}_\alpha =: \tilde{S} \\ \overset{(57)}{=} \int_\Omega \tilde{f}_0\, d\mu = \int_\Omega f_0 \chi_B\, d\mu \\ = \int_B f_0\, d\mu\ . \end{aligned} \tag{58}$$

Insgesamt gilt somit also für jedes $\alpha \in \mathfrak{A}$

$$\int f_\alpha\, d\mu \leq \int f_0\, d\mu \tag{59}$$

und nach [Sch11, Lemma 9.2.4] folgt daraus $f_\alpha \leq f_0$ μ-fast überall. Da die Abschätzung $f_0 \leq \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} f_\alpha$ nach Definition von f_0 trivialerweise gilt, erhält man etwa mit Hilfe von (57) insgesamt $\sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} f_\alpha = f_0 \in L_1$. Dies entspricht dem Nachweis der Dedekind-Vollstädnigkeit von L_1. □

Es soll nun die tiefliegende Eigenschaft gezeigt werden, in welchem Fall $\mathcal{L}_\mathrm{b}(E, F)$ zu einem Riesz-Raum wird. Dies führt auf die Formeln von Riesz-Kantorovich.

Theorem 1.2.2 (Riesz-Kantorovich)**.** *Seien E und F zwei Riesz-Räume, wobei F Dedekind vollständig ist, dann wird $\mathcal{L}_\mathrm{b}(E, F)$ zu einem Dedekind vollständigen Riesz-Raum. Die Verbandsoperationen genügen folgenden Eigenschaften*

$$|T|(x) = \sup\{\, |Ty| \colon |y| \leq x \,\} \tag{60a}$$

$$[S \vee T](x) = \sup\{\, S(y) + T(z) \colon y, z \in E^+ \text{ und } y + z = x \,\}\,, \text{ und} \tag{60b}$$

$$[S \wedge T](x) = \inf\{\, S(y) + T(z) \colon y, z \in E^+ \text{ und } y + z = x \,\} \tag{60c}$$

für alle $S, T \in \mathcal{L}_\mathrm{b}(E, F)$ und $x \in E^+$.
Zusätzlich gilt $T_\alpha \downarrow 0$ im Vektorraum $\mathcal{L}_\mathrm{b}(E, F)$ genau dann, wenn $T_\alpha(x) \downarrow 0$ im Riesz-Raum F für jedes $x \in E^+$.

Beweis. Sei $T \in \mathcal{L}_\mathrm{b}(E,F)$. Da T ordnungsbeschränkt und F Dedekind-vollständig ist, existiert

$$\sup\{\, |Ty| \colon |y| \le x \,\} = \sup\{\, Ty \colon |y| \le x \,\} = \sup T[-x,x] \tag{61}$$

in F für jedes $x \in E^+$. Nach Theorem 1.2.1 existiert demnach $|T|$ und darüber hinaus gilt hierfür

$$|T|(x) = \sup\{\, |Ty| \colon |y| \le x \,\} \tag{62}$$

für jedes $x \in E^+$.

Nach [AB06, Theorem 1.7] gilt für zwei Elemente x, y aus einem Riesz-Raum

$$x \vee y = \tfrac{1}{2}(x + y + |x-y|) \qquad x \wedge y = \tfrac{1}{2}(x + y - |x-y|)\,. \tag{63}$$

Damit ist klar, dass ein halbgeordneter Vektorraum genau dann einen Riesz-Raum darstellt, wann immer $|x| = x \vee (-x)$ für jeden Vektor x existiert. In diesem Sinne wird also $\mathcal{L}_\mathrm{b}(E,F)$ zu einem Riesz-Raum, da $|T|$ für jedes $T \in \mathcal{L}_\mathrm{b}(E,F)$ existiert.

Seien nun $S, T \in \mathcal{L}_\mathrm{b}(E,F)$ und $x \in E^+$. Für $y, z \in E^+$ gilt $y + z = x$ genau dann, wenn insbesondere ein $|u| \le x$ existiert mit der Eigenschaft $y = \frac{1}{2}(x+u)$ und $z = \frac{1}{2}(x-u)$. Mit den Formeln aus (63), welche Gültigkeit in einem Riesz-Raum besitzen, folgt damit

$$\begin{aligned} [S \vee T](x) &= \tfrac{1}{2}(Sx + Tx + |S-T|x) \\ &= \tfrac{1}{2}(Sx + Tx + \sup\{\, (S-T)u \colon |u| \le x \,\} \\ &= \tfrac{1}{2}\sup\{\, Sx + Su + Tx - Tu \colon |u| \le x \,\} \\ &= \sup\{\, S\big(\tfrac{1}{2}(x+u)\big) + T\big(\tfrac{1}{2}(x-u)\big) \colon |u| \le x \,\} \\ &= \sup\{\, S(y) + T(z) \colon y, z \in E^+ \text{ und } y + z = u \,\}. \end{aligned} \tag{64}$$

Analog erhält man mit $\inf(-A) = -\sup A$, wobei $-A := \{\, -a \colon a \in A \,\}$ (siehe auch [AB06, Theorem 1.3]),

$$\begin{aligned} [S \wedge T](x) &= \tfrac{1}{2}(Sx + Tx - |S-T|x) \\ &= \tfrac{1}{2}(Sx + Tx - \sup\{\, (S-T)u \colon |u| \le x \,\} \\ &= \tfrac{1}{2}(Sx + Tx + \inf\{\, (T-S)u \colon |u| \le x \,\} \\ &= \tfrac{1}{2}\inf\{\, Tx + Tu + Sx - Su \colon |u| \le x \,\} \\ &= \inf\{\, T\big(\tfrac{1}{2}(x+u)\big) + S\big(\tfrac{1}{2}(x-u)\big) \colon |u| \le x \,\} \\ &= \inf\{\, T(y) + S(z) \colon y, z \in E^+ \text{ und } y + z = u \,\} \\ &= \inf\{\, S(y) + T(z) \colon y, z \in E^+ \text{ und } y + z = u \,\}. \end{aligned} \tag{65}$$

Nun soll gezeigt werden, dass $\mathcal{L}_\mathrm{b}(E,F)$ Dedekind vollständig ist. Da bereits gezeigt wurde, dass $\mathcal{L}_\mathrm{b}(E,F)$ einen Riesz-Raum bildet, reicht es aus anzunehmen, dass $0 \le T_\alpha \uparrow \le T$ in $\mathcal{L}_\mathrm{b}(E,F)$ gilt. Dies ist äquivalent zu der Aussage, dass $0 \le T_\alpha(x) \uparrow \le T(x)$ für jedes $x \in E^+$. Da per Voraussetzung der Riesz-Raum F jedoch Dedekind vollständig ist, impliziert dies, dass $S(x) := \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} T_\alpha(x)$ für jedes $x \in E^+$ existiert. Damit hat man $T_\alpha(x) \uparrow S(x)$ für jedes $x \in E^+$. Für alle $\alpha \in \mathfrak{A}$ gilt $T_\alpha(x+y) = T_\alpha(x) + T_\alpha(y)$ und im Sinne der Ordnungskonvergenz erkennt man mit Hilfe von [LZ71, Theorem 16.1 (1)], dass $S\colon E^+ \to F^+$ zu einer additiven Abbildung wird und demnach definiert S nach Theorem 1.1.1 einen positiven Operator, der von E nach F abbildet, also insbesondere $S \in \mathcal{L}_{\mathrm{b}}(E,F)$. Damit ist klar, dass $T_\alpha \uparrow S$ gilt, denn wann immer $T_\alpha \leq T$, gilt $S(x) = \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} T_\alpha(x) \leq T(x)$ für jedes $x \in E^+$ und somit $\sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} T_\alpha = S$ in $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(E,F)$, womit gezeigt ist, dass $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(E,F)$ als Riesz-Raum Dedekind vollständig ist.

Die letzte Aussage des Theorems folgt direkt aus der Definition der Halbordnung auf $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(E,F)$ und wird analog zu der eben bewiesenen Teilaussage gezeigt. □

Falls E, F jeweils Riesz-Räume sind, wobei F zusätzlich Dedekind vollständig ist, dann ergibt (60b) für jeden ordnungsbeschränkten Operator $T\colon E \to F$ sofort

$$T^+(x) = \sup\{\, Ty\colon 0 \leq y \leq x \,\} \text{ und} \tag{66a}$$

$$T^-(x) = \sup\{\, -Ty\colon 0 \leq y \leq x \,\} \tag{66b}$$

für jedes $x \in E^+$. Mit Hilfe von $T = T^+ - T^-$ ist klar, dass $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(E,F)$ von positiven Operartoren erzeugt wird und damit gilt im Falle, dass F Dedekind vollständig ist, dass $\mathcal{L}_{\mathrm{r}}(E,F) = \mathcal{L}_{\mathrm{b}}(E,F)$.

Als Letztes soll ein (besonders einfaches) Beispiel diskutiert werden, welches die Riesz-Kantorovich–Formeln heranzieht, um den Modulus eines Operators zu bestimmen.

Beispiel 1.2.5. Es liege ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ vor und $L_1 = L_1(\mathcal{F}, \mu)$ bezeichne die Menge aller numerischen, messbaren Funktionen $f\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$, für die gilt

$$\int_\Omega |f|(\omega)\, d\mu(\omega) < \infty\,. \tag{67}$$

Es soll der Operator $M_c\colon L_1 \to L_1$ untersucht werden, wobei $[M_c f](\omega) = c \cdot f(\omega)$ für jedes $f \in L_1$, $\omega \in \Omega$ und $c \in \mathbb{R}^+$. Der Operator M_c stellt tatsächlich eine Abbildung nach L_1 dar, denn für jedes $f \in L_1$ gilt

$$\begin{aligned} \int_\Omega |M_c f|(\omega)\, d\mu(\omega) &= \int_\Omega |cf|(\omega)\, d\mu(\omega) \\ &= c\int_\Omega |f|(\omega)\, d\mu(\omega) \\ &< \infty. \end{aligned} \tag{68}$$

Der Operator M_c ist sogar ordnungsbeschränkt, denn für $A = \{\, f \in L_1\colon g_1 \leq f \leq g_2 \,\}$, wobei $g_1, g_2 \in L_1^+$, gilt, dass $M_c A \subseteq [cg_1, cg_2]$. In Beispiel 1.2.4 wurde gezeigt, dass für den vorliegenden Maßraum der Riesz-Raum L_1 Dedekind-vollständig ist und damit sind die Voraussetzungen für die Anwendung der Riesz-Kantorovich–Formeln gewährleistet und man hat damit für $g \in L_1^+$

$$\begin{aligned} |M_c|(g) &= \sup\{\, |M_c f|\colon |f| \leq g \,\} \\ &= \sup\{\, M_c f\colon |f| \leq g \,\} \\ &= \sup\{\, cf\colon |f| \leq g \,\} \\ &\overset{(*)}{=} cg. \end{aligned} \tag{69}$$

In $(*)$ wurde die Aussage aus [LZ71, Theorem 13.1 (ii)] verwendet.

Es ist offensichtlich, dass dass $|M_c|$ additiv ist auf L_1^+ und da L_1 Dedekind-vollstädnig ist und damit insbesondere archimedisch, existiert für $|M_c|$ eine eindeutige Fortsetzung, erneut durch $|M_c|$ bezeichnet, zu einem positiven Operator auf L_1, welche nach Theorem 1.1.1 gegeben ist durch

$$\begin{aligned} |M_c|(g) &= |M_c|(g^+) - |M_c|(g^-) \text{ für alle } g \in L_1. \\ &= cg^+ - cg^- \\ &= cg \end{aligned} \tag{70}$$

Damit ist M_c für alle $g \in L_1$ eindeutig bestimmt. Dieses Ergebnis kann ganz einfach überprüft werden, denn in diesem Spezialfall gilt insbesondere, dass

$$M_c f = cf \geq -cf = -(M_c f) \text{ für alle } f \in L_1^+ \tag{71}$$

und damit $M_c \geq -M_c$. Also erhält man direkt $|M_c| = M_c$ und die Riesz-Kantorovich–Formeln führen zu dem selben Ergebnis.

Dieses Beispiel gibt Anlass z.B. den *allgemeinen* Multiplikationsoperator auf L_1 zu betrachten. Sei hierzu etwa $g \in L^\infty$, wobei L^∞ die Familie aller Äquivalenzklassen ist mit

$$L^\infty := \{\, [h]_\mu \in L^0(\mathcal{F}, \mu) \mid \text{ es gibt ein } f \in [h]_\mu \cap \mathcal{L}^\infty(\mathcal{F}) \,\}. \tag{72}$$

Die exakte Definition für $L^0(\mathcal{F}, \mu)$ und $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{F}$ ist [Sch11, Abschnitt 7.2] zu entnehmen. Es gilt hervorzuheben, dass ein Element g aus L^∞ nur μ-fast überall beschränkt ist. Das heißt symbolisch ausgedrückt, dass ein $c \in \mathbb{R}^+$ existiert mit $|g| \leq_\mu c$ und damit existiert eine natürliche Norm $\|.\|_\infty \colon L^\infty \to \mathbb{R}^+$ mit $\|g\|_\infty = \inf\{\, c \in \mathbb{R}^+ \colon |g| \leq_\mu c \,\}$. Damit ist klar, dass für ein $g \in L^\infty$ der Operator $M_g \colon L_1 \to L_1$ mit $f \mapsto gf$ für alle $f \in L_1$ wohldefiniert ist. Sofern $g \in L^\infty$ nur bis auf eine μ-Nullmenge beschränkt ist, liefert diese bei der Integration keinen Beitrag, also für $f \in L_1$ erhält man mit Hilfe der Monotonie des Integrals

$$\begin{aligned} \int_\Omega |M_g f|(\omega)\, d\mu(\omega) &= \int_\Omega |gf|(\omega)\, d\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega |g|(\omega)|f|(\omega)\, d\mu(\omega) \\ &\leq \int_\Omega \|g\|_\infty |f|(\omega)\, d\mu(\omega) \\ &\leq \|g\|_\infty \int_\Omega |f|(\omega)\, d\mu(\omega) \\ &< \infty. \end{aligned} \tag{73}$$

Es ist offensichtlich, dass $M_g \leq M_c$ mit $c = \|g\|_\infty$, als positiven Operator wie oben definiert, und damit ist M_g insbesondere regulär und damit nach (39) auch ordnungsbeschränkt. Somit gilt für $f \in L_1^+$ unter Heranziehung der Riesz-Kantorovich–Formeln

$$\begin{aligned} |M_g|(f) &= \sup\{\, |M_g h| \colon |h| \leq f \,\} \\ &= \sup\{\, |gh| \colon |h| \leq f \,\} \\ &= \sup\{\, |g||h| \colon |h| \leq f \,\} \\ &= |g| \sup\{\, |h| \colon |h| \leq f \,\} \\ &= |g| f. \end{aligned} \tag{74}$$

Wie oben kann $|M_g|$ für alle $f \in L_1$ erklärt werden. Dies soll die Ausführungen hierzu beschließen. $\square$

References

[AB06] C.D. Aliprantis and O. Burkinshaw. *Positive Operators*. Pure and applied mathematics. Springer, 2006.

[DP02] B.A. Davey and H.A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge mathematical text books. Cambridge University Press, 2002.

[LZ71] W.A.J. Luxemburg and A.A.C. Zaanen. *Riesz spaces: Vol. 1*. North-Holland Mathematical Library. North-Holland Publishing Company; New York, American Elsevier Publishing Company, 1971.

[Sch11] K.D. Schmidt. *Maß Und Wahrscheinlichkeit*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2011.