Arbeitsblatt 1 – Logik und mathematisches Beweisen

Bevor wir mathematische Beweise und ihre Strukturen betrachten und verstehen können, müssen wir uns ihrer Grundlage bewusst sein. Diese Grundlage bildet die Logik.[1] Die Logik befasst sich mit den elementaren Zusammenhängen und Strukturen von Redehandlungen und Aussagen, sowie deren Verknüpfungen und Ermittlung von „Wahrheitswerten“ (Wahr [*w*] / Falsch [*f*]).

Definition 1.1: Eine *Aussage* ist eine Redehandlung durch die eine Redeteilhandlung zum Ausdruck gebracht wird, etwa eine Behauptung oder eine Vermutung. Über den „Wahrheitswert“ einer Aussage können wir zunächst noch nichts sagen.

Definition 1.2: Ein *Performator* ist eine Redeteilhandlung die einer Aussage eine logische Bedeutung verleiht. Wir werden im wesentlichen folgende *Performatoren* gebrauchen: „*Es gilt__*“, *„Wäre__“*, *„Sei__“, „Also__“* und den Hilfsprädikator *„Da__“*

Definition 1.3: Ein *Satz* ist ein molekularer[2] Ausdruck, der über seine inhaltliche, eine vollständige logische Bedeutung besitzt. Er kann also bewiesen, oder widerlegt werden. Ein *Satz* besitzt immer folgende Struktur: *Performator + Aussage = Satz*

Bemerkung: Die Performatoren bestimmen welche logische Bedeutung ein Satz hat, sodass wir wissen, wie wir mit ihnen umgehen müssen. „Es gilt__“ ist der Performator der für mathematische Sätze am häufigsten Verwendet wird.[3] Einen solchen Satz gilt es in der Regel zu beweisen. Ist ein Satz hingegen schon bewiesen, dann kann man ihn anziehen, um andere Sätze zu beweisen. Dazu verwendet man die Performatoren „Sei__“ und „Da__“. Mit „Sei__“ definiert man Bedingungen und mit „Da__“ macht man auf diese aufmerksam um daraus folgende Schlüsse zu erklären. Wenn man die Folgen, u. o. Schlüsse einer Aussage (nicht kennt und) untersuchen möchte, nutzt man „Wäre__“.

Beispiele:
„Es gilt, dass jede natürliche Zahl einen Nachfolger hat.“
„Sei $x_0=0$.“; „Dann ist x_0 eine Nullstelle von $f(x)=x^2$.“
„Wäre Moby Dick eine Biene, dann wäre er kein Säugetier.“

Definition 1.4: Ein *Junktor* ist eine Verknüpfung zwischen Aussagen. Wir betrachten die folgenden Junktoren: „Adjunktor“ (∨), „Disjunktor“ (⊻), „Konjunktor“ (∧), „Subjunktor“ (⇒), „Bisubjunktor“ (⇔), „Negator“ (¬)

Bemerkung: Die Junktoren heißen in der Reihenfolge wie genannt im gebrauchssprachlichen „inklusives Oder“, „exklusives Oder“, „logisches Und“, „(Wenn-dann) Folgerung“, „(Genau-Dann-Wenn [gdw]) Folgerung“. Sie sind durch ihre Wahrheitstabellen bestimmt. Die Subjunktionen nehmen dabei einen besonderen Platz ein, da sie sehr häufig der Hauptbestandteil eines mathematischen Beweises sind. Ein mathematischer Beweis ist als in Wirklichkeit fast immer der Beweis einer Subjunktion oder einer Bisubjunktion. Die Wahrheitstabellen sehen wie folgt aus:

A und B seien Aussagen.

A	¬A
w	*f*
f	*w*

---

[1] Da es verschiedene Logiken gibt, gibt es entsprechend verschiedene Beweistheorien. Wir betrachten auf diesem Arbeitsblatt ausschließlich Beweise auf Grundlage der elementaren Aussagen- und Prädikatenlogik.
[2] Zusammengesetzt
[3] Die Definition eines mathematischen Satzes, ist wesentlich stärker, als die hier zunächst allgemeine. Eine Bedingung ist beispielsweise die nicht-trivialität. Dazu später mehr.

A	B	A ∨ B	A ⊻ B	A ∧ B	A ⇒ B	A ⇔ B
w	*w*	*w*	*f*	*w*	*w*	*w*
w	*f*	*w*	*w*	*f*	*f*	*f*
f	*w*	*w*	*w*	*f*	*w*	*f*
f	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*

Wichtig ist einerseits die Wahrheitswerte der einzelnen Aussagen zu betrachten und andererseits die der durch den Junktor entstandenen *junktoralen Formel.*
Weiterhin gibt es eine (nicht zwingende) Hierarchie um umständliche Klammersetzung zu vermeiden:
I: ¬ II: ∨; ⊻; ∧ III: ⇒; ⇔

Definition 1.5: Ein *Quantor* ist ein Teilausdruck, der auf eine Formel angewendet wird und eine oder mehrere Variablen bindet. Es gibt folgende Quantoren: „Universalquantor (∀)“, „Partikularquantor (∃)“. Der Universalquantor wird auch „Allquantor“ genannt und entspricht dem gebrauchssprachlichen „Für alle __ gilt“, der Partikularquantor wird auch „Existenzquantor“ genannt und entspricht dem gebrauchssprachlichen „Es gibt__“.

Bemerkung: Alle weiteren Quantifikationen lassen sich durch die Kombination von Quantor- und Junktorformeln formalisieren. Man begegnet z.B. oft dem „exklusiven Partikularquantor“, der dem „Es gibt genau einen__“ entspricht, welcher formal folgender Kombination entspricht: „Es gibt ein *x*…und für alle $y \neq x$ gilt nicht…“. Ein weiterer häufiger Quantor ist der „negierte Partikularquantor“, welcher dem „Es existiert kein__“ entspricht und am Einfachsten durch die Negation des Partikularquantors kombiniert wird. Da diese beiden Quantoren besonders häufig auftauchen, gibt es für sie eigene Symbole, um der umständlichen Kombination vorzubeugen: ∃! Ist „ex. PQ“ und ∄ ist „n PQ“. Für weitere Quantifikationen, wie etwa „es gibt genau Zwei Lösungen“ gibt es keine einheitliche Symbolik, hier greift das gute alte ausschreiben. Am Ende einer Quantifikation steht sehr oft einfach ein „:“ anstelle von „gilt:“

Beispiele:
„Für alle Menschen gilt, dass sie entweder männlich oder weiblich sind, und dass sie genau eine Mutter haben.“
„$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$“
„$\forall x \in \mathbb{R}_0: \exists! y \in \mathbb{R}: xy = 1$“[4]
„Es gibt genau zwei reelle Lösungen, die die Gleichung $x^2-1 = 0$ erfüllen.“

Aufgaben:

(a) Nennen Sie die genannten Quantoren und Junktoren im ersten Beispielsatz auf Seite 2.
(b) Verbalisieren Sie die beiden weiteren Beispielsätze.
(c) Formalisieren Sie:
  (i) Jede reelle Zahl mit 4 potenziert ist positiv.
  (ii) Für jede natürliche Zahl gilt: Die Subtraktion mit sich selbst hat die Differenz 0.
  (iii) Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger[5]
(d) Prüfen sie folgende Aussagen, berichtigen sie gegebenenfalls formal.
  (i) $\exists!\, x \in \mathbb{R}^+: \frac{7}{13}x^2 - \frac{12}{31}x - \frac{5}{7} = 0$
  (ii) $\forall\, x \in \mathbb{N}: \nexists\, y \in \mathbb{N}: y = x^{-1}$
  (iii) Es gibt genau zwei reelle Lösungen für die Gleichung: x^3+2x^2-5x-2.

---

[4] $\mathbb{R}_0$ ist die Kurzschreibweise der Mengenoperation $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Reelle Zahlen außer 0)
[5] Tipp: Welche formale Eigenschaft besitzt jeder Nachfolger gegenüber seinem Vorgänger?

(e) Überprüfen Sie folgende Junktorale Formeln auf Wahrheit:
   (i) A: „Der Himmel ist blau.“
   B: „Die Sonne ist hell.“ → $A \wedge B$
   (ii) A: „Es regnet.“
   B: „Die Straße ist nass.“ → $A \Leftrightarrow B$

(f) Wir nennen das „Wenn“ einer Subjunktion das *Antezedenz* und das „Dann“ das *Sukzedenz.* Zeigen Sie anhand eines Beispiels, warum die gesamte Subjunktion auch wahr sein kann, wenn das Antezedenz falsch, aber das Sukzedenz wahr ist. (3. Zeile der Wahrheitstabelle)

(g) Fertigen sie Wahrheitstabellen für folgende junktorale Formeln an:
   (i) $\neg A \Rightarrow B$
   (ii) $(A \veebar B) \vee C$
   (iii) $A \wedge B \Rightarrow C \vee D$
   (iv) $((A \Rightarrow B) \wedge C) \Leftrightarrow (D \veebar (E \Rightarrow F))$