

Mathematische Beweise

Unter mathematischen Beweisen verstehen wir logisch deterministische Aussagen oder Aussagenfolgen, die einen mathematischen Sachverhalt zeigen oder widerlegen. Aufgrund der Aussagenlogischen Konvention, dass entweder eine Aussage oder ihre Negation disjunkt gelten (Tertium non Datur), kann genau nicht gleichzeitig eine Aussage einen Sachverhalt zeigen und widerlegen.

Direkter Beweis:

Der direkte Beweis stellt die einfachste Form des Beweises dar. Er beweist eine Aussage der Form $A \Rightarrow B$ indem man A annimmt und von dort aus auf B schließt.

Bemerkung:

In der logisch axiomatischen Mathematik kann man bereits bewiesene Aussagen/Sätze sowie Axiome verwenden um einen Beweis zu vereinfachen. Dies bedeutet, dass eine molekulare Aussage sich aus Teilaussagen zusammensetzen kann ($A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n \mid A$ ist Teilaussage, $n \in \mathbb{N}$). In diesem Fall muss man als bekannt vorausgesetzte A_n nicht noch einmal zusätzlich beweisen.

Beispiel:

Wenn n eine natürliche Zahl ist, dann ist $n + (n+1) + (n+2)$ durch 3 teilbar.

Beweis:

Da n natürlich ist, sind auch alle (ganzzahligen) Nachfolger natürlich. Außerdem ist eine natürliche Zahl k mit $3k$ durch 3 teilbar. Damit ist $3(n+1)$ durch drei teilbar.

$3(n+1) = 3n + 3 = n + n + n + 1 + 2 = n + (n+1) + (n+2)$. Dies ist offensichtlich durch 3 teilbar.

Indirekter Beweis:

Der indirekte Beweis (Kontraposition) stellt eine logisch äquivalente Aussage zu $A \Rightarrow B$ dar. Dabei nehmen wir wieder A an und zeigen nun aber $\neg B \Rightarrow \neg A$ (denn es gilt: $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$). Dies stellt aber nach dem Tertium non Datur einen Widerspruch dar, denn es gelte sonst $A \wedge \neg A$.

Bemerkung:

Jeder direkte Beweis ist auch indirekt beweisbar, es gibt aber Beweise, deren Voraussetzungen nicht für einen direkten Beweis ausreichen, ihre Negation aber für einen Indirekten.

Beispiel:

Jede Primzahl $p \neq 2$ ist ungerade.

Beweis: Sei eine gerade Zahl n mit $n \neq 2$. Dann ist n teilbar durch 2. Da aber jede grade Zahl die nicht zwei ist, mindestens 3 Teiler, nämlich 1, 2 und n besitzt kann n keine Primzahl sein.

Widerspruchsbeweis:

Der Widerspruchsbeweis ist dem Kontrapositionsbeweis sehr ähnlich. Wir zeigen hier aber, dass $\neg A \wedge B \Rightarrow f$. Also, dass durch $\neg A$, $\neg B$ impliziert wird, was offensichtlich äquivalent ist zu $A \Rightarrow B$.

Beispiel:

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis: Wir bezeichnen die Menge der Primzahlen mit P und nehmen an, diese wäre endlich, d.h. $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Man betrachte nun folgende Zahl $m := \prod_{i=1}^n p_i + 1$. Diese Zahl ist durch keine p_n teilbar besteht aber

nur aus Primfaktoren, daher ist $m \in P$. Andererseits ist $m > p_n$ weshalb $m \notin P$ gilt. $\nexists$ (Widerspruch)
Demnach ist $|P| = \infty$. Es gibt also unendlich viele Primzahlen.

Gegenbeweis durch Gegenbeispiel:

Um eine universal quantorierte Aussage zu widerlegen, genügt es ein zulässiges Beispiel anzugeben, welches die Aussage nicht erfüllt.

Beispiel:

Die Fermatzahlen $f_n := 2^{(2^n)} + 1$ sind alle Primzahlen.

Gegenbeweis: $f_5 = 4.294.967.297$. $641 \mid f_5$. (641 teilt f_5)

Existenzbeweise:

Oft kommen in der Mathematik auch partikular quantorierte Aussagen vor. Diese können auf verschiedene Weisen gelöst werden und sind meist sehr stark kontextabhängig. Grob kann man zwischen einfach quantorierten Aussagen und mehrfach quantorierten Aussagen unterscheiden. Einfach partikular quantorierte Aussagen sind zum Beispiel „Es gibt eine Zahl deren Quadrat ungerade ist“. Diese Aussage ist wahr und sie sagt nichts über die Anzahl der Zahlen, die sie erfüllen aus. Es genügt also, eine beliebige Zahl zu finden, die diese Aussage erfüllt. Mehrfach quantorierte Aussagen sind häufig von der Form: „Für alle... gilt: Es gibt...“ Hier muss aus der allgemeinen Konstruktion der „Für alle...“-Aussage die Existenz gezeigt werden.

Beispiel:

Für jede ungerade Zahl gibt es zwei Quadratzahlen, deren Differenz die Zahl selbst ergibt.

Beweis: Sei n die gesuchte Zahl. Da n grade ist, kann man n darstellen als $n = 2m+1$. Dann sind die gesuchten Quadratzahlen m und $(m+1)$ denn $2m+1 = n = (m+1)^2 - m^2$.

Identitätsbeweise:

Häufig werden auch Identitäten in der Mathematik bestimmt und verlangen nach einem Beweis. Das besondere bei diesen Beweisen ist, dass sie an die Strukturen der zu identifizierenden Objekte gebunden sind. So wird die Identität zweier Zahlen ($x = y$) nachgewiesen indem man zeigt: $x \geq y$ und $y \geq x$. Während bei Mengen gezeigt wird: $X = Y$ wenn $X \subseteq Y$ und $X \supseteq Y$.

Beispiel:

$$A \cap B \setminus C = A \setminus C \cap B \setminus C$$

Beweis:

Sei $x \in A \cap B \setminus C$. Dann ist $x \in A, B$ und $x \notin C$. Daraus folgt, dass $x \in A \setminus C$ und $x \in B \setminus C$. Damit ist $x \in A \setminus C \cap B \setminus C$.

Sei nun $x \in A \setminus C \cap B \setminus C$. Dann ist gilt $x \in A \setminus C$ und $B \setminus C$ also $x \in A, B$ und $x \notin C$. Damit ist $x \in A \cap B \setminus C$. Es wurde gezeigt, dass $A \cap B \setminus C \supseteq A \setminus C \cap B \setminus C$, damit insgesamt $A \cap B \setminus C = A \setminus C \cap B \setminus C$.

Aufgaben:

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- 1) Sei n eine Quadratzahl. Ist n gerade, ist $\sqrt{n}$ auch gerade.
- 2) Für jedes Polynom der Form $ax^2 + bx + c$ gibt es keine, eine oder zwei reelle Zahlen, die die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ erfüllen.
(Hinweis: Nutzen Sie die Quadratische Ergänzung und leiten Sie die quadratische Lösungsformel her!)
- 3) Die Menge der rationalen Zahlen ist gegenüber dem Radizieren (Wurzel ziehen) abgeschlossen.
- 4) Der Abstand zweier windschiefer Geraden ist eindeutig bestimmt.
- 5) Es gilt $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ für Mengen A, B, X