

Heuristik in der Mathematik

Unter Heuristik verstehen wir die Wissenschaft des Problemlösens. Sie beschäftigt sich mit allgemeinen Techniken des Problemlösens. Durch das Studium der Heuristik wird das Verständnis einiger Mathematischer Probleme erhöht, was im Allgemeinen zu effizienterem und schnellerem Lösen der Probleme führt. Darüber hinaus bringt jede Theorie aber noch ihre eigenen speziellen Techniken mit zur Lösung der in der Theorie betrachteten Probleme. Doch auch zur sinnvollen Nutzung theoriespezifischer Techniken hat die Heuristik Ansatzpunkte. Insofern gehört ein Repertoire an heuristischen Strategien zum Werkzeugkasten eines jeden Mathematikers.

Im Folgenden werden wir einige solcher Heuristischer Strategien betrachten.

Vorwärtsarbeiten: Dies ist die wohl bekannteste und geläufigste heuristische Strategie. Ihre Idee ist so einfach, dass die Technik schon meist als trivial vorausgesetzt und nicht weiter erwähnt wird. Hierbei geht es schlicht darum vom Gegebenen und den Voraussetzungen zum Ziel zu arbeiten. Dies ist besonders dann die sinnvollste Strategie, wenn bereits alle nötigen Erkenntnisse und Grundtechniken zum Lösen des Problems bewusst sind und eine allgemeine Lösung zumindest als Idee vorhanden ist.

Beispiel: Eine etwa 126m Brücke wird mit einem Brückenbogen überspannt, der sich durch die Gleichung $-0,05x^2+0,63x-3,9845$ beschreiben lässt. Ermitteln Sie die maximale Höhe der Brücke.

Lösung: Da bereits zu erkennen ist, dass die Gleichung den Graphen einer nach oben offenen Parabel erzeugt, ist klar, dass die maximale Höhe mit dem Extremum zusammenfällt. Nun kann man entweder die Scheitelpunktform bestimmen, oder über eine Extremwertbetrachtung vorgehen. Beide Verfahren sind bekannt und erfolgsversprechend und können daher „vorwärts“ durchgeführt werden. Die maximale Höhe des Brückenbogens ist in jedem Fall 20m.

Rückwärtsarbeiten: Rückwärtsarbeiten ist quasi die inverse Technik zum Vorwärtsarbeiten. Wir sehen uns das Ziel (Lösung oder Teillösung) an und arbeiten uns von dort aus zu den Voraussetzungen. Dabei muss das Ziel meist strukturell zerlegt werden um die Voraussetzungen zu finden.

Bemerkung: Bei vielen Beweisen ist eine gemeinsame Anwendung von Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten zielführend. Dabei nährt man sich einem logisch schlüssigen Beweis von beiden Seiten. Allgemein ist diese Anwendung immer dann von Vorteil, wenn man die Lösung bereits kennt und weiß, dass diese richtig ist.

Beispiel: Geben Sie eine Funktionsgleichung an, welche einen Graphen erzeugt, der zur Beschreibung eines Brückenbogens dienen soll, welcher folgende Eigenschaften erfüllt: Die Brücke soll 126m lang sein und der Bogen soll eine maximale Höhe von 20m haben.

Lösung: Wir nutzen zunächst die Scheitelpunktform um direkt einen Scheitelpunkt erzeugen zu können. Danach überlegen wir uns eine geeignete Skalierung, nämlich eine Längeneinheit entspricht 10m. Die Höhe Brücke soll 20m sein, daraus folgt $a(x-d)^2+2$. Da die Parabel nach unten offen sein muss, muss der Wert von a negativ sein und; damit wir die Parabel stauchen im Intervall von $[0,1]$. Wir probieren nutzen das Prinzip der Intervallschachtelung (siehe systematisches Probieren) aus und ermitteln eine Näherung für a von -0,05. Nun verschieben wir den Graphen noch entlang der x-Achse. Der Wert von d muss ebenfalls negativ sein, wie aus der Scheitelpunktform hervorgeht. Wir haben bereits die Nullstellen bei $|6,3|$ also setzen wir $d := -6,3$. Die Gleichung lautet nun:

$$f(x) = 0,05(x-6,3)+2.$$

Systematisches Probieren: Wenn die Lösung noch nicht bekannt ist, ist es sinnvoll zunächst das Problem zu analysieren auf mögliche Spezialfälle, Extrema und Grenzfälle. Diese werden dann als mögliche Lösungen betrachtet und stellen diese dar oder ergeben Intervallgrenzen für eine mögliche Abschätzung.

Bemerkung: Eine der populärsten Techniken in der reellen Analysis, die auf dem Systematischen Probieren beruht ist die Intervalleingrenzung, die auf dem Prinzip der Intervallschachtelung beruht. Dabei wird eine Lösung eingegrenzt indem man ein Wert darüber und einen darunter ermittelt und dann diese Grenzen immer weiter verringert.

Beispiel: siehe Ermittlung des Wertes für a im vorherigen Beispiel.

Verwenden von Darstellungen: Das Verwenden von Darstellungen ist eine Technik um sich mit dem Problem vertraut zu machen. Der Vorteil von Darstellungen ist, dass man aus ihnen ein intuitives Verständnis für die das „Wirken“ der Voraussetzungen erlangt, aus dem sich zum Teil sogar direkt eine Lösung ergibt. Ein formaler Beweis ist über Darstellungen jedoch oft noch nicht erreicht.

Bemerkung: Das Verwenden von Darstellungen findet vor Allem im Rahmen der Analysis und der Geometrie statt. Dort werden dann Graphen oder geometrische Objekte in Bezug auf die zugrunde liegende Struktur dargestellt. Darstellungen können allerdings auch in allen anderen Gebieten genutzt werden. Zum Beispiel kann man die Herleitung mancher Formeln durch figurierte Zahlen erarbeiten oder abstrakte Begriffe durch ihre Anwendung in konkret anschaulichen Beispielen besser verstehen.

Beispiel:

Darstellungsaufgabe:

Beispiel: Gegeben sind zwei Handytarife: einmal mit Grundgebühr und niedrigen Gesprächsgebühren (5 Euro/Monat bzw. 5 Cent/min), einmal ohne Grundgebühr bei höheren Gesprächskosten (9 Cent/min).

Finde rechnerisch und grafisch heraus, unter welchen Bedingungen welcher Tarif am günstigsten ist.

Rechnerisch:

Sei x die Anzahl der telefonierten Minuten und y die monatliche Endsumme. Dann gilt:

$$5 + 0,05x = y \text{ und } 0,09x = y \text{ oder } 500 + 5x = y \text{ und } 9x = y.$$

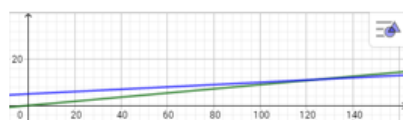
Durch Gleichsetzen erhält man:

$$5 + 0,05x = 0,09x \text{ oder } 500 + 5x = 9x$$

$$5 = 0,04x \text{ oder } 500 = 4x$$

$$125 = x \text{ und } 125 = x$$

Graphisch:



Es gibt also offensichtlich eine versteckte Variable (Bedingung) nämlich x . Bei 125 Gesprächsminuten sind beide Tarife gleich teuer, es lohnt sich also der Tarif mit Grundgebühr nur dann, wenn der Verbraucher mehr als 125 Minuten pro Monat telefonieren will. Es sind an der Lösung aber noch zwei weitere Dinge erkennbar. 1) Der Kostenpunkt liegt bei etwa 11 Euro. 2) Die Anzahl der Gesprächsminuten ist *invariant*.

Analogieprinzip: Beim Analogieprinzip nutzt man die Tatsache aus, dass fast alle Probleme sich kategorisieren lassen. Man versucht auf diese Weise ein Problem besser zu verstehen und Lösungsansätze zu finden, indem man nach ähnlichen bereits bekannten und/oder einfacheren Problemen sucht und diese in Bezug setzt.

Bemerkung: Da jede Theorie ihre spezifischen Feinheiten mitbringt ist es ratsam sich zum Finden von sinnvollen Analogien zunächst klar zu machen, welche Theorie(n) im zu lösenden Problem stecken. Wenn einzelne Begriffe oder Sätze nicht klar sind, ist es sinnvoll sich deren Lemmata und Beweise vorab klar zu machen, denn meistens bauen Beweise und Lösungsansätze innerhalb einer Theorie aufeinander auf.

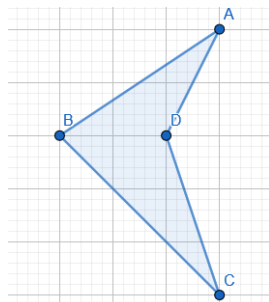
Beispiel: Idee für den euklidischen Abstand im beliebig dimensionalen Raum. Bekannterweise ist der Satz des Pythagoras für \mathbb{R}^2 : $a^2+b^2=c^2$ und für den \mathbb{R}^3 : $a^2+b^2+c^2=d^2$. Es lässt sich also vermuten, dass für den \mathbb{R}^n gilt: $\|a\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2}$ mit a_1, a_2, \dots, a_n sind Vektoren des \mathbb{R}^n .

Achtung, hierbei handelt es sich lediglich um eine Idee, nicht um einen Beweis!

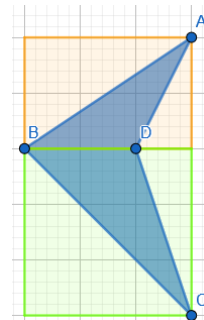
Zerlegungsprinzip: Bei komplexen und umfangreichen Problemen kommt oft eine Vielzahl an Teilproblemen zusammen und es scheint zunächst unmöglich eine Lösung anzugeben. Bei solchen Problemen ist es nötig die einzelnen Teilprobleme zu identifizieren und einzeln zu bearbeiten. Dabei ist die Reihenfolge auch zunächst beliebig, richtet sich allerdings oft danach, welche Ergebnisse eine Teillösung liefert, die für weitere Schritte benötigt werden. Es gilt allerdings immer zu beachten, dass es effektiv ist, mit den Teilproblemen zu beginnen, welche einem vertraut sind, da sich wiederum andere Teillösungen aus diesen kontextuell ergeben können.

Bemerkung: Das Zerlegen ist dabei keineswegs auf Probleme beschränkt. Es ist genauso möglich Objekte zu zerlegen sofern dies möglich ist.

Beispiel: Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses konkaven Vierecks.¹



Lösung Zerlegen des Vierecks in zwei Dreiecke. Das Viereck liegt außerdem erkennbar innerhalb eines Rechtecks. Innerhalb dieses finden wir dann rechtwinklige Dreiecke außerhalb des Vierecks. Wir bestimmen den Flächeninhalt dieser durch die bekannte Gleichung $A=ab/2$ und bilden die Differenz aus Flächeninhalt des äußeren Rechtecks und der Summe der Dreiecksflächen außerhalb.



Invarianzprinzip: Bei vielen Problemen untersucht man veränderliche Werte. Diese stehen oft in Beziehung zu Invarianten. Diese Invarianten sind für alle Objekte des betrachteten Problems gleich und unter dem Lösungsalgorithmus unveränderlich. Dies führt zu zwei Schlüsselfragen: 1) Was ändert

Es sei n eine ungerade natürliche Zahl. Jemand schreibt zunächst die Zahlen $1, 2, 3, \dots, 2n$ an die Tafel. Dann wählt er zwei beliebige Zahlen a und b von ihnen aus, streicht sie und ersetzt sie durch ihre Differenz $a-b$. So fährt er fort, bis zum Schluss nur noch eine Zahl an der Tafel steht. Beweise, dass diese Zahl ungerade ist

Lösung: Es sei S die Summe der Zahlen an der Tafel, also $S = n(2n+1)$ und damit ungerade, da n ungerade war. In jedem Schritt ändert sich S um $-a - b + (a - b) = -2b$, also um eine gerade Zahl. Somit bleibt die Ungeradzahligkeit von S erhalten und die letzte Zahl ist ungerade.

¹ http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/hs_heurstrat2.pdf

sich nicht? 2) Was haben alle Objekte gemeinsam?

Beispiel:

Schubfachprinzip: Das Schubfachprinzip stellt unter den allgemeinen Heuristischen Prinzipien/Strategien das speziellste dar. Es wird immer dann angewandt, wenn man mit einer bestimmten Anzahl von Objekten in Bezug auf eine bestimmte Anzahl von kategorisierenden Größen als Mengen betrachtet. Formal lautet das Prinzip wie folgt: Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Wenn man n Objekte auf m Mengen aufteilt, dann gibt es für $n=m$ zu jeder Menge genau ein zugeordnetes Element, für $n > m$ gibt es mindestens eine Menge der mehr als ein Objekt zugeordnet wird und für $n < m$ gibt es mindestens eine Menge, der kein Objekt zugeordnet wird. Über diese Eigenschaften lasse sich dann verschiedene Aussagen über die Kategorisierung treffen.

Beispiel:

Aufgabe 2. Wir schießen mit einem Luftgewehr auf ein dreieckförmiges Ziel dessen Seiten die Länge 2 besitzen. Dabei treffen wir 5 mal. Zeige, dass es zwei Treffer gibt, deren Abstand ≤ 1 ist.

Lösung: Zerteile das Dreieck in vier kleine Dreiecke mit Seitenlänge 1. Dann liegen in einem dieser kleineren Dreiecke (Schubfächer) mindestens 2 Treffer. Es ist leicht einzusehen, dass der Abstand dieser Punkte kleiner gleich dem maximalen Abstand der Eckpunkte ist.

Nehmen wir an, x sei ein Punkt innerhalb (oder auf dem Rand) des Dreiecks. Dann sind einer der Eckpunkte am weitesten von x entfernt. Zieht man einen Kreis mit Radius 1 um diesen Eckpunkt, so ist das gesamte Dreieck (und damit auch x) in diesem Kreis enthalten. Also haben alle Punkte des Dreiecks von x den Abstand 1. □

http://rho.math.uni-rostock.de/SemSkripte/Schubfachprinzip_Strauss.pdf

Die bisher betrachteten heuristischen Strategien sind die grundlegendsten Strategien zum Lösen mathematischer (oder auch anderer) Probleme und lassen sich spezifisch bei fast jedem Problem anwenden. Darüber hinaus gibt es noch weitere spezielle heuristische Strategien zu jeder Theorie. Daher ist es sinnvoll sich beim Studium jeder Theorie in der Rückschau zu fragen, welchen Mehrwert einem ein betrachteter Beweis oder ein anderes gelöstes Problem gebracht hat. Wurden die bereits bekannten Strategien und Techniken verwendet oder wurden für einen bisher noch unbekannte Ansätze genutzt? Gerade dann sollten diese in das eigene Repertoire übernommen werden.