Mengen, Abbildungen und Folgen

Wir nennen die Zusammenfassung von Objekten eine Menge im Sinne des intuitiven Mengenbegriffes. Wir legen Fest, dass ein Objekt in einer Menge nicht mehr als einmal auftreten darf. Das heißt {1,2,2,1,3} ist die Menge {1,2,3}. Ebenso ist die Reihenfolge der Notation der Objekte irrelevant, d.h. {1,2,3}={2,3,1}={2,1,3}=… usw.

<u>Mengenrelationen und -operationen:</u>

Seien A,B Mengen.

(a) a ∈ A „a ist Element der Menge A“
(b) $A \cup B := \{a \mid a \in A \vee a \in B\}$ „Die Vereinigung von A und B“ (A vereint mit B)
(c) $A \cap B := \{a \mid a \in A \wedge a \in B\}$ „ Der Schnitt von A und B“ (A geschnitten B)
(d) $A \setminus B := \{a \mid a \in A \wedge a \notin B\}$ „Die Differenz von A und B“ (A ohne B)
(e) $A \times B := \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ „Das (kartesische) Produkt von A und B“ (A kreuz B)

(f) A ⊆ B $:\Leftrightarrow \forall a \in A : a \in B$ „A ist Teilmenge von B“
(g) A ⊂ B $:\Leftrightarrow \forall a \in A: a \in B \wedge \exists b \in B : b \notin A$ „A ist eine echte Teilmenge von B“
(h) $|A| := n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ "n ist $Anzahl$ der $Elemente$ von A" „$|A|$ ist die Mächtigkeit von A“
(i) $\mathcal{P}(A) := \{X \mid X \subseteq A\}$ „Die Potenzmenge“ (Menge aller Teilmengen)

Bemerkung:

Jede Menge M besitzt mindestens die triviale(n) Teilmenge(n) M und $\emptyset$. Für den Fall, dass $M = \emptyset$ sind die trivialen Teilmengen dieselbe, weshalb die leere Menge als einzige genau eine Teilmenge besitzt. Für das kartesische Produkt einer Menge X und der leeren Menge gilt: $X \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times X$

Im Allgemeinen gilt: $A \times B \neq B \times A$.

<u>Abbildungen:</u>

Definition: Eine Abbildung ist eine Zuordnung, die jedem Objekt einer Menge mindestens ein Objekt aus einer anderen (oder derselben) Menge zuordnet. In diesem Sinne ist eine Abbildung eine Teilmenge des kartesischen Produktes aus der Definitions- und der Wertemenge in folgender Form:

$Sei\ X\ die\ Definitionsmenge\ und\ Y\ die\ Bildmenge, seien\ weiterhin\ x \in X\ und\ y \in Y.$
$Eine\ Abbildung\ [Abb]: X \longrightarrow Y\ ist\ eine\ Teilmenge\ [Abb] \subseteq X \times Y\ mit\ der\ Eigenschaft:$
$\forall x \in X: \exists!\,(x', y) \in [Abb] \subseteq X \times Y : x = x'$

Wir bezeichnen die Menge aus der abgebildet wird auch als Urmenge und die Menge in die abgebildet wird als Bildmenge. Die Vorschrift, nach der abgebildet wird, ist die Abbildungsvorschrift. Wir notieren Abbildungen wie folgt:

(Bsp.:) $\varphi: A \longrightarrow B : a \longmapsto \varphi(a)$ Hierbei ist φ „Phi“ die Bezeichnung der Abbildung, es bildet Objekte aus A auf Objekte aus B ab, und zwar genau so, das jedem Objekt aus A sein Bild in B zugeordnet wird. Wir sagen: „Phi bildet von A nach B ab.“

Die Menge aller Elemente aus A, die auf das 0-Element aus B abgebildet werden nennen wir den Kern der Abbildung von A nach B. Wir notieren für $\varphi: A \longrightarrow B$:

$$Kern(\varphi) := \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$$

Die Menge aller Elemente aus B, welche durch die Abbildung ein Element von A zugeordnet bekommen nennen wir das Bild der Abbildung. Wir notieren für φ :

$$Bild(\varphi) := \{b \in B \mid b = \varphi(c)\ mit\ c \in A\}$$

Betrachten wir eine Teilmenge T von B und geben die Menge aller Elemente aus A an, deren Bilder in T liegen, geben wir damit das Urbild der Teilmenge T an. Wir notieren:

$$Urbild(T) := \{a \in A | \ \varphi(a) \in T\}$$

Bemerkungen:

(II) Der Kern ist eine Teilmenge der Urmenge sowie das Bild eine Teilmenge der Bildmenge ist.
(III) Das Urbild ist Teilmenge der Urmenge
(IV) Ist T einelementig sprechen wir vom Urbild des Elements (in T). D.h.
$T = \{a\} \Leftrightarrow Urbild(T) = Urbild(a)$

Einige wichtige Abbildungen sind:

$Seien\ X, Y\ Mengen, Sei\ T \subseteq X\ und\ seien\ x \in X, y \in Y\ und\ t \in T.$

(1) $id: X \longrightarrow X : x \longmapsto x$ ist die Identität(sabbildung). Sie bildetet alle Elemente auf sich selbst ab. Sie geht auch von einer Menge in sich selbst, solche Abbildungen werden auch als Selbstabbildungen bezeichnet.
(2) $const_y: X \longrightarrow Y : x \longmapsto y$ ist die Konstante Abbildung.
(3) $i_T: T \longrightarrow X : t \longmapsto t$ ist die Inklusion von T in X
(4) $f|_T: T \longrightarrow Y : t \longmapsto f(t)$ ist die Einschränkung von f auf T.

Eigenschaften von Abbildungen:

Sei $\varphi: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung

Wir nennen φ injektiv, falls gilt:

$$\forall\ x_1, x_2 \in X, \forall\ \varphi(x_1), \varphi(x_2) \in Y: \varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Sprich, wenn zwei Bilder gleich sind, dann sind auch die Urbilder gleich; oder, was äquivalent ist: Jedes Bild besitzt genau ein Urbild.[1]

Wir nennen φ surjektiv, falls gilt:

$$\forall\ x \in X, \exists\ y \in Y: \ \varphi(x) = y$$

Sprich, jedes Element des Wertebereichs wird durch φ erreicht.

Seien X, Y, Z, W Mengen und $f: \ X \longrightarrow Y, \ g: \ Y \longrightarrow Z, \ h: \ Z \longrightarrow W$ Abbildungen. Wir verstehen unter der Komposition von Abbildungen die Hintereinanderausführung der Funktionen in folgender Weise

$$g \circ f: \ X \longrightarrow Z: \ x \longmapsto g(f(x))$$

Kompositionen sind assoziativ, d.h. es gilt: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
Dies beweisen wir, indem wir die Komposition „punktweise" auswerten:

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)\big(f(x)\big) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = h\big((g \circ f)(x)\big) = \big(h \circ (g \circ f)\big)(x)$$

$\square$

[1] Für die genannte Äquivalenz sollte als Übung der Beweis geführt werden. Zu beachten ist, dass Äquivalenz der logischen Bisubjunktion entspricht.

Folgen:

Sei M eine Menge und $I \subseteq \mathbb{N}$.

Wir verstehen unter Folge von Elementen aus M eine Abbildung $a: I \longrightarrow M$. I als Teilmenge der natürlichen Zahlen bezeichnen dabei die Indexmenge der Folge.
Wir notieren $a(i) =: a_i$

Die Folge heißt endlich für den Fall, dass I eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist.
In diesem Fall können wir die einzelnen Folgeglieder sortiert als Tupel notieren. Ein solches n-Tupel sieht folgendermaßen aus: $m := \{a_i, \dots, a_m\}$ $für\ i \in \{1, \dots, m\}\ und\ 0 > m > \infty, m \in \mathbb{N}$

Für den Fall, dass $I \not\subseteq \mathbb{N}$ sagen wir statt Folge Familie. Dies kann zum Beispiel dann der Fall sein, wenn die Einträge einer Indexmenge ihrerseits durch eine Indexmenge indiziert werden. Eine solche Komposition sähe dann so aus: $Seien\ I, J\ Indexmengen\ und\ M\ eine\ beliebige\ Menge.$

$$\iota: J \longrightarrow I: \iota(j) = \iota_j = i_j\ mit\ j \in J, i \in I\ und\ a: I \longrightarrow M: a(i) = a_i = m_i$$
$$\text{sodass } (\iota \circ a)(j) = a(\iota(j)) = m_{i_j} \text{ gilt;}$$

und wir können zeigen, dass sie der Abbildung $a': \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow I : a'(i,j) = m_{i,j}$ gleich ist.

Tatsächlich ist die Menge der n-Tupel sogar isomorph zu der Menge der geordneten „Paare“ welche sich durch das kartesische Mengenprodukt ergeben. D. h. wir finden eine bijektive und Vektorraum-lineare Abbildung von $M^n \longrightarrow \underbrace{M \times \dots \times M}_{n-mal}$. Dazu später mehr.

Aus diesem Grund dürfen n-Tupel und geordnete „Paare“ aus n Gliedern synonym verwendet werden.

Wir können nun einzelne Elemente oder Teilmengen (z.B. als Elemente der Potenzmenge) indizieren. Betrachten wir also eine Menge M und eine Folge [Familie] von Teilmengen $(T_i)_{i \in I}$ mit der Eigenschaft das für alle $i \in I$: $T_i \subseteq M$ gilt. Wir definieren auf $(T_i)_{i \in I}$ folgende Mengen:

$$\bigcup_{i \in I} T_i := \{t \in M \mid \exists i \in I: t \in T_i\} \text{ Vereinigung der Teilmengen}$$

$$\bigcap_{i \in I} T_i := \{t \in M \mid \forall i \in I: t \in T_i\} \text{ Schnitt über den Teilmengen}$$

Aufgaben:

1) $Sei\ A = \{1,2,3\}\ und\ sei\ B = \{4,5,6\}$ Geben die Menge $A \times B$ an.
2) Geben Sie $|A \times B|$ an. Definieren Sie sich kleinere Mengen als A und B und betrachten Sie die Mächtigkeiten deren kartesischen Produktes. Leiten Sie daraus induktiv eine Formel zur Berechnung der Mächtigkeit des kartesischen Produktes ab.
3) Für endliche Mengen M gibt es eine Formel zur Berechnung von $|\mathcal{P}(M)|$. Ermitteln Sie diese Formel induktiv wie die Formel in (2).
4) Beschreiben Sie welcher heuristischen Strategie Sie sich in (2) und (3) bedient haben. Begründen Sie, weshalb Sie durch die induktiven Herleitungen noch keine allg. Gültigkeit der Formeln nachgewiesen haben. Geben Sie Möglichkeiten an, um die allg. Gültigkeit von Formeln zu beweisen.
5) Geben Sie für $\varphi: \{1; 2; 3; 4; 5\} \longrightarrow \{2; 4; 8; 16; 32\}$ eine bijektive Abbildungsvorschrift an. Weisen Sie die Bijektivität nach.
6) Geben Sie für $\pi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}: \pi(x) = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 \quad Kern(\pi)$ an.
   Tipp: Polynomdivision und gezieltes Probieren! Ggf. falls bekannt, kann der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen helfen.
7) Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf Surjektivität und Injektivität:
   (I) $f_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+: f_1(x) = x^2$
   (II) $f_2: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}: f_2(x) = x^3$
   (III) $f_3: [0, \infty) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+: x \longmapsto \sqrt{x}$
   (IV) $f_4: \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \subseteq \mathbb{R}: x \longmapsto \sin(x)$
   (V) $f_5: \mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}: x \longmapsto \frac{1}{x}$
8) Geben Sie für die ermittelten Eigenschaften der Funktionen aus 7) jeweils Beweise an.