Äquivalenzrelationen, Induktionsprinzip und der Beweis per vollständiger Induktion

In diesem Kapitel sprechen wir über das Zerlegen von Mengen und deren Eigenschaften. Weiterhin gehen wir auf das Induktionsprinzip der natürlichen Zahlen ein und leiten von dort aus den Beweis per vollständiger Induktion her.

<u>Äquivalenzrelationen:</u>

Sei I eine Indexmenge und sei für jedes $a \in I$ eine Menge M_a gegeben. Wir definieren:

$$\bigcup_{a\in I} M_a := \{x \mid \exists a \in I : x \in M_a\}$$

$$\bigcap_{a\in I} M_a := \{x \mid \forall a \in I : x \in M_a\}$$

Unter einer $Zerlegung\ Z$ einer Menge M verstehen wir eine Menge von paarweise disjunkten (elementfremden), nicht leeren Teilmengen von M, deren Vereinigung wieder ganz M ergibt.

Bsp.: Eine mögliche Zerlegung der Menge $\{a, b, c\}$ wäre $Z = \{\{a, b\}, \{c\}\}$

Bemerkung:
Die Anzahl der möglichen Partitionen einer n-elementigen Menge entspricht der n-ten Bellschen Zahl B_n mit der rekursiven Formel:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Die erste Bellzahl, welche der Partitionierung der leeren Menge entspricht also B_0 ist 1. Aus der Formel ergibt sich dann für $B_1 = 1$

<u>Definition:</u> Eine Relation R auf einer Menge M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$. Wir schreiben $x \sim y$ statt (x, y). Viele Relationen haben kontextabhängige Symbole z.B. =, <, >

Wir nennen eine Relation *Äquivalenzrelation*, wenn sie folgende drei Bedingungen erfüllt:

1) *Reflexivität:* $\forall x \in M: x \sim x$
2) *Symmetrie:* $\forall x, y \in M: x \sim y \Rightarrow y \sim x$
3) *Transitivität:* $\forall x, y, z \in M: x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$

<u>Bemerkung:</u>

Sei M eine Menge und Z sei eine Zerlegung von M. Betrachtet man äquivalente Elemente, gilt folgende Definition: $x \sim_Z y := x, y \in T \wedge T \in Z, \ T \subseteq M$. Man spricht also davon, dass alle äquivalenten Elemente von M unter Z derselben Teilmenge angehören.

Wir betrachten die Menge $\{y \in M \mid y \sim x\}, M\ Menge \ \wedge x \in M$, also die Menge aller Elemente, die zu x äquivalent sind. Wir notieren: $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\}$ und nennen sie Äquivalenzklasse von x und x den Repräsentanten.

(In der höheren Mathematik bedient man sich beim Rechnen mit Elementen aus Äquivalenzklassen oft einer Eigenschaft, die sich Repräsentantenunabhängigkeit nennt. Also nutzt man aus, dass man mit jedem beliebigen Element einer Äquivalenzklasse rechnen kann und zum selben Ergebnis kommt. Diese Eigenschaft ist allerding für jede Operation zunächst zu prüfen.)

Satz: Jede Äquivalenzrelation auf einer Menge bildet eine Zerlegung dieser Menge.
Oder: Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M, so ist die Menge $M/\sim$ der Äquivalenzklassen eine Zerlegung von M.

Beweis: Übung

Induktionsprinzip:

Wir betrachten hier ℕ={0,1,2,…} also wie üblich mit 0.

Sei M eine Menge. Erfüllt diese Menge folgende Eigenschaften:

1) $0 \in M$
2) $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$

Dann gilt: $M \cong \mathbb{N}$ also M ist isomorph zu den natürlichen Zahlen. D.h. wir finden eine bijektive, sprich injektive *und* surjektive lineare Abbildung $M \longrightarrow \mathbb{N}$.

Vollständige Induktion:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine logische Aussage. Wenn wir zeigen können, dass

(i) $A(0)$ wahr ist,
(ii) $A(n)\ wahr \Rightarrow A(n + 1)\ wahr$

Dann gilt $A(n)$ für alle n.

Wir nennen (i) Induktionsanfang (IA) und (ii) Induktionsschritt (IS). Die Annahme in (ii), dass $A(n)$ wahr ist, heißt Induktionsvoraussetzung (IV).