Übungsaufgaben zu Mengen, Abbildungen, Folgen und dem Induktionsbeweis

Mengen:

Seien A und B Mengen. Wir definieren $A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ als die symmetrische Differenz von A und B.

(a) Berechnen Sie $A \triangle B$ für $A := \{1,2,3,4,5,6\}$ und $B := \{0,2,3,6,7,8\}$.
(b) Beweisen Sie, dass außerdem $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ gilt.
(c) Liefern die disjunkte Vereinigung und die symmetrische Differenz der Mengen A und B dieselbe Menge?

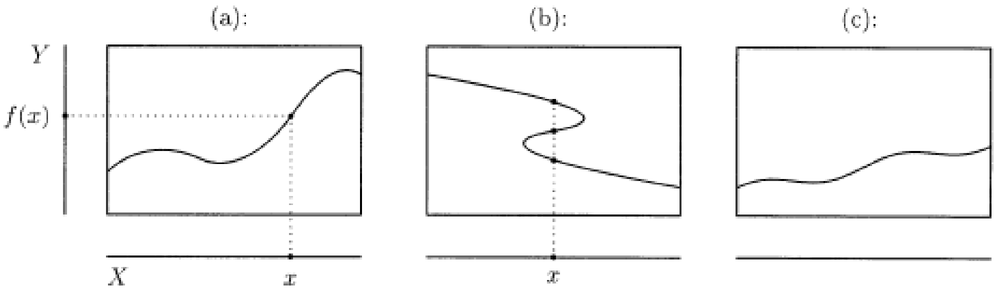
Seien A, B und C Mengen. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$
(b) $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$

Sei $M := \{a, b, c, d, e\}$ eine Menge und sei $R := \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(c,d),(d,c),(d,d),(e,e)\}$ mit $(x,y) \in M \times M$ eine Relation auf M. Zeigen sie, dass es sich bei R um eine Äquivalenzrelation handelt und geben Sie die resultierende Partition an.

Abbildungen:

AUFGABE 1.1: Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, so nennt man die Menge $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ den *Graphen* Γ_f von f. Der Graph ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $X \times Y$. In der Skizze (a) ist er durch die Linie angedeutet. Graph einer Abbildung kann nun nicht jede beliebige Teilmenge von $X \times Y$ sein, denn z.B. gibt es zu jedem x ja nur *ein* $f(x)$, daher ist die in Skizze (b) gezeichnete Linie kein Graph. Die Aufgabe ist nun, Graphen von Abbildungen f mit gewissen vorgegebenen Eigenschaften zu zeichnen. Als Beispiel wie es gemacht werden soll, ist in (c) ein Graph einer nicht surjektiven Abbildung dargestellt.



Man zeichne in der beschriebenen Weise Beispiele von Graphen von Abbildungen f mit den folgenden Eigenschaften:

(i) f surjektiv, aber nicht injektiv
(ii) f injektiv, aber nicht surjektiv
(iii) f bijektiv
(iv) f konstant
(v) f nicht surjektiv und nicht injektiv
(vi) $X = Y$ und $f = \mathrm{Id}_X$
(vii) $f(X)$ besteht aus genau zwei Elementen.

Abbildung 1: Prof. Dr. Klaus Jänch: Lineare Algebra, Springer-Lehrbuchverlag, 11. Auflage, 2011

Sei M eine Menge. Man bezeichnet mit 2^M die Menge der Abbildungen von M nach $\{0,1\}$.
Geben Sie eine Bijektion $\mathcal{P}(M) \longrightarrow 2^M$ an.

Zeigen Sie außerdem, dass $\mathcal{P}(M)$ echt mächtiger ist als M, dass es also eine injektive, aber keine surjektive Abbildung $M \longrightarrow \mathcal{P}(M)$ gibt. (Satz von Cantor)[1]

Zusatz: Folgen

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(a) $a_n = \left(\frac{10}{n}\right)^n$
(b) $a_n = \frac{1}{n} + \sqrt[n]{2}$
(c) $a_n = \frac{(-3)^n}{n^2}$
(d) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$
(e) $a_n = \sqrt[n]{n!}$
(f) $a_n = \frac{n^3}{n^2+1} - \frac{2n^2}{2n+1}$

Untersuchen Sie, wie „schnell" $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ für $n \longrightarrow \infty$ gegen 0 geht. Bestimmen Sie dazu Zahlen $c, \alpha \in \mathbb{R}$, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{cn^\alpha} = 1$ gilt.

[1] Daniel Grieser: Analysis I, Springer Spektrum, 1. Auflage, 2014