Zu den Sitzungen des Seminars „Mathematik und ihre Didaktik“
am 5. November (Seminar statt Vorlesung) und am 7./14./21. November 2018

Zur Approximation reeller Zahlen durch Farey-Folgen („Farey-Zooming“). Wir beziehen uns auf den Artikel *Continued Fractions without Tears*.

a) Machen Sie sich die (einfache) Tatsache klar, dass eine *ultra-close approximation* immer eine *best approximation* ist. Präzisieren Sie zuvor die Bedeutung (Definition) von *best approximation*. Zeigen Sie außerdem, dass die Umkehrung nicht gilt, und vergleichen Sie die Begriffe *ultra-close approximation* und *best (left/right) approximation* mit den Begriffen *beste Näherung erster bzw. zweiter Art* aus dem Wikipedia-Artikel zum Thema „Kettenbruch“.

b) Führen Sie das „Farey-Zooming“ für $\sqrt{11}$ mit Nennern ≤ 100 durch und bestimmen Sie die jeweilige „Sorte“ der auftretenden Näherungsbrüche (im Hinblick auf die verschiedenen Definitionen, siehe oben).

c) Wie hängt das Farey-Zooming mit dem Dirichletschen Approximationssatz zusammen?

d) Wirklich praktische Anwendungen dieser Approximationstechnik dürften selten sein, aber es gibt sie: Der Astronom *Christiaan Huygens* beschäftigte sich im 17. Jahrhundert mit dem Bau eines mechanischen Modells unseres Sonnensystems, in dem die Anzahl der Zähne der verwendeten Zahnräder proportional zur Umlaufzeit des jeweiligen Planeten um die Sonne zu sein hatte. Es war bekannt, dass für die Umlaufzeiten s und e von Saturn bzw. Erde ziemlich genau die Gleichung $\frac{s}{e} = \frac{77708431}{2640858}$ gilt, doch wollte Huygens verständlicherweise keine Zahnräder mit Millionen von Zähnen bauen. Sondieren Sie mit Blick auf Farey-Zooming Huygens' Alternativen.

e) Angesichts der überschaubaren praktischen Anwendungen unserer Approximationstechnik ist im Umfeld von Schule mit Zweifeln am didaktischen Wert dieses Themas zu rechnen. Überlegen Sie sich, wie Sie diesen Zweifeln entgegentreten könnten.

Farey-Zooming und diophantische Gleichungen. Sei d eine natürliche Zahl, aber kein Quadrat.

a) Sei k außerdem eine ganze Zahl (ungleich 0) mit „kleinem“ Betrag. Es geht nun um die Suche nach ganzzahligen Lösungen m, n der Gleichung $m^2 - dn^2 = k$. Machen Sie sich klar, dass *eine* heuristische Lösungsstrategie darin besteht, die Näherungsbrüche $\frac{m}{n}$ von $\sqrt{d}$ zu betrachten.

b) Führen Sie daher erneut (mindestens) ein Farey-Zooming mit der Zielzahl $\sqrt{d}$ durch, etwa für $d = 11$, und betrachten Sie für jeden Näherungsbruch $\frac{m}{n}$ nun stets $m^2 - dn^2$. Denken Sie an Pólya („First guess, then prove“) und versuchen Sie, Vermutungen zu entwickeln. Überlegen Sie, wie Sie dies in einer Schulklasse organisieren könnten.

c) Zeigen Sie, dass die Menge

$$R := \mathbb{Z} + \sqrt{d}\,\mathbb{Z} \left(= \left\{ a + \sqrt{d}\, b \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\} \right)$$

bezüglich der üblichen Addition und der üblichen Multiplikation ein kommutativer Ring mit Einselement ist. Zeigen Sie außerdem für jedes $\alpha \in R$: Genau dann ist α eine Einheit in R, wenn $N(\alpha) \in \{1, -1\}$ gilt, wobei N durch

$$N\colon R \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad a + \sqrt{d}\, b \longmapsto a^2 - d\, b^2$$

definiert ist.

d) Was ist die Konsequenz aus c) für die Suche nach Lösungen der sogenannten „Pellschen Gleichung“ $m^2 - dn^2 \in \{1, -1\}$? Sehen Sie eine Möglichkeit, diese Konsequenz auch im Schulunterricht erfahrbar bzw. sogar verständlich zu machen?

e) Zahlen der Form $\frac{1}{2}n \cdot (n+1)$ mit $n \in \mathbb{N}$ heißen aus naheliegenden Gründen *Dreieckszahlen*. Finden Sie drei Dreieckszahlen (größer als 1), die zugleich Quadratzahlen sind.
Hinweis: $n(n+1) = 2m^2$ ist äquivalent zu $(2n+1)^2 - 8m^2 = 1$; man substituiere daher $k := 2n+1$.

f) Gesucht sind Dreiecke mit den Seitenlängen $n-1, n, n+1$ ($n \in \mathbb{N}$), deren Flächeninhalt ebenfalls ganzzahlig ist. Sie können hier für die Suche die *Heronische Formel*

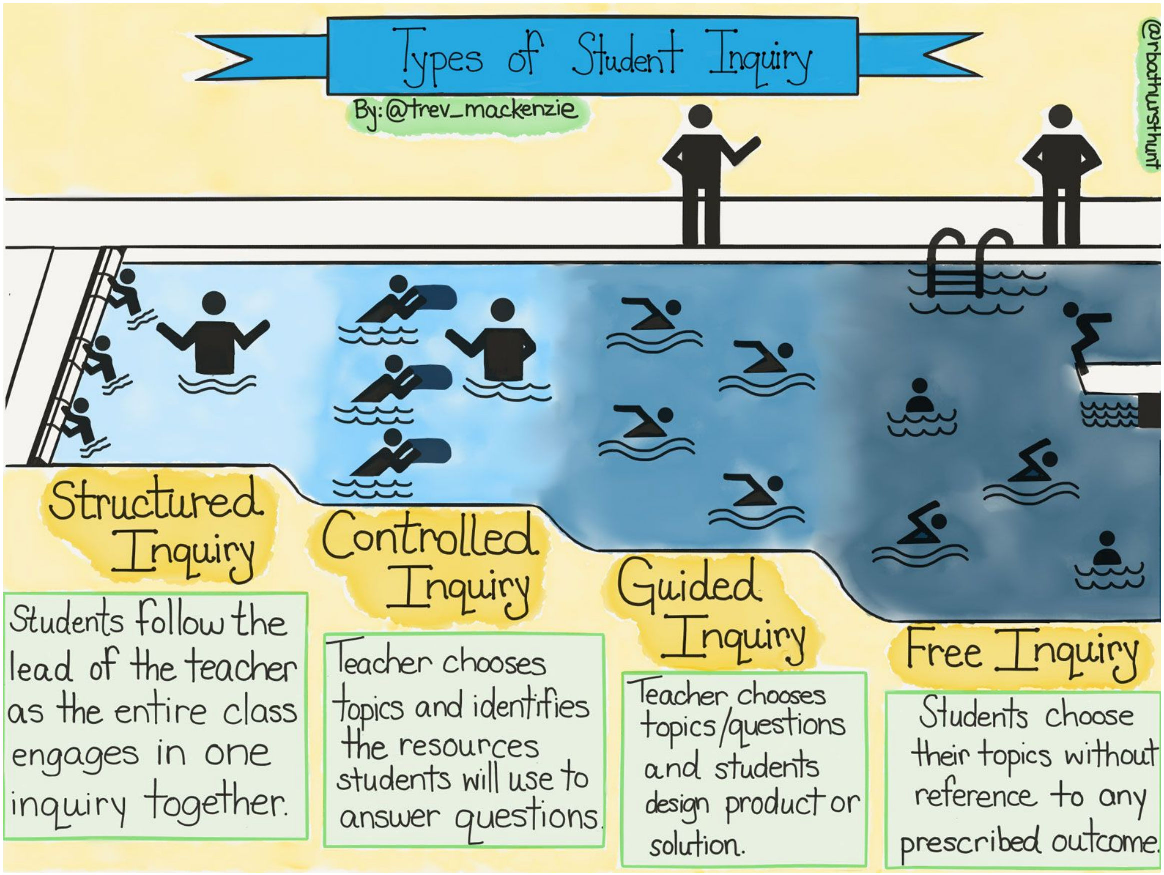
$$A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

zur Berechnung des Flächeninhalts A eines Dreiecks mit den Seitenlängen a, b, c und $s := \frac{1}{2}(a+b+c)$ verwenden. Dabei müssen Sie vermutlich auf Grundlage elementarer Teilbarkeitsüberlegungen eine oder mehrere ganzzahlige Substitutionen vornehmen. Finden Sie drei geeignete Tripel $(n-1, n, n+1)$.

Zum entdeckenden Lernen.

a) Der Plan, entdeckendes Lernen zu ermöglichen, kann (und sollte) in sorgfältig bedachten Graduierungen umgesetzt werden. Lesen Sie dazu den Artikel `https://www.edutopia.org/article/bringing-inquiry-based-learning-into-your-class-trevor-mackenzie` und fassen Sie dessen Aussage zusammen.

b) Skizzieren Sie Unterrichtsentwürfe zum entdeckenden Lernen, etwa mit Blick auf unsere Themen *Approximation reeller Zahlen durch rationale* bzw. *Farey-Zooming*, und überlegen Sie, durch welche Maßnahmen Sie Ihren Unterricht auf verschiedenen Stufen der unten wiedergegebenen Darstellung realisieren können.



© Trevor MacKenzie, auf der Grundlage von *A Districtwide Approach to Staff and Student Learning* von Nancy Fichtman Dana, Carol Thomas und Sylvia Boynton (2011)

„Die Nacherfindung". Vergleichen Sie den in der vorigen Aufgabe genannten Text zu *Inquiry-Based Learning* in Stil und Aussage mit dem Kapitel „Die Nacherfindung" aus Hans Freudenthals *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (aus meinem Downloadbereich).