

Nicht-zentrierte Polygonalzahlen. Unter den figurierten Zahlen nehmen die sogenannten (*nicht-zentrierten*) *Polygonalzahlen* eine hervorgehobene Rolle ein. Allerdings ist offenbar nicht ganz klar, was genau damit gemeint ist. Vergleichen Sie dazu die Darstellung der Fünfeckszahlen unter diesem ersten Link mit der Darstellung unter diesem zweiten Link. Im weiteren Verlauf folgen wir der Idee, die den Abbildungen des zweiten Links zugrunde liegt, denn das scheint die übliche Auffassung von nicht-zentrierten Polygonalzahlen zu sein. Wir streben nun eine *Definition* von $P(m, n)$ an, d.h. der n -ten Zahl aus der Folge der m -Eckszahlen. Beispielsweise soll $P(3, 4) = 10$ gelten, denn die vierte Dreieckszahl ist 10.

- Entwerfen Sie eine *geometrische* Definition von $P(m, n)$, möglichst klar und schultauglich zugleich.
- Entwerfen Sie – in Konkurrenz zu a) – auch eine *algebraische* Definition von $P(m, n)$.
- Gehen Sie von Ihrer algebraischen Definition in b) aus und zeigen Sie, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 3$ die Beziehung

$$P(m, n) = \frac{1}{2} \cdot ((m-2)n^2 - (m-4)n)$$

gilt. Führen Sie diesen Nachweis einmal auf schultaugliche, ein anderes Mal auf hochschulübliche Weise.

- Drücken Sie die in Bild 1 angedeuteten Beziehungen algebraisch aus und beweisen Sie sie.
- Beweisen Sie außerdem die Beziehungen
 - $P(3, n) + P(3, n-1) = P(4, n)$
 - $P(6, n) = P(3, 2n-1)$
 - $P(3, n-1) + P(3, n+1) = 2 \cdot P(3, n) + 1$
 - $P(5, n) = P(4, n) + P(3, n-1)$

und bemühen Sie sich jeweils um eine entsprechende Veranschaulichung wie in Bild 1.

- Zeigen Sie an einem Beispiel, wie eine Veranschaulichung von Polygonalzahlen eine *falsche* Beziehung suggeriert.

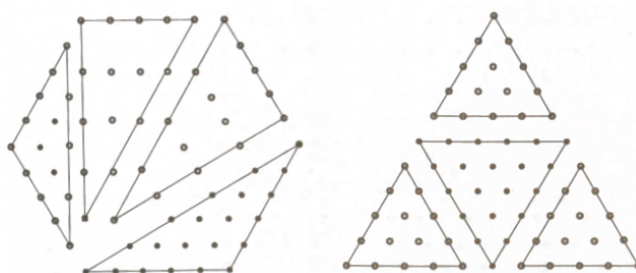


Bild 1

Das Dreischritt-Modell zum Modellieren in der elementaren Algebra. Überlegen Sie sich, welche gedanklichen Schritte eine Schülerin oder ein Schüler beim Aufstellen einer Gleichung für die folgende Aussage zu bewältigen hat, indem Sie das in der Vorlesung vom 14. Januar vorgestellte Dreischritt-Modell von Günther Malle zugrunde legen: „Falls Alfons morgen drei weitere Münzen bekommt, so hat er doppelt so viele wie Befons.“ Bedenken Sie dabei auch mögliche Schülerfehler.

Figurierte Zahlen und Beweise ohne Worte. Die Formel zur Berechnung der Summe von Quadratzahlen, also $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, kann auf vielerlei Weise durch figurierte Terme veranschaulicht werden. Vergleichen Sie die Darstellung aus Bild 2 mit derjenigen aus dem Artikel *The Sum of Squares*. Prüfen Sie in beiden Fällen den *paradigmatischen* Charakter der Darstellung, also die Frage, ob die beispielhaften Darstellungen wirklich stellvertretend für eine allgemeine Aussage sind. Welche Darstellung bevorzugen Sie, und warum?

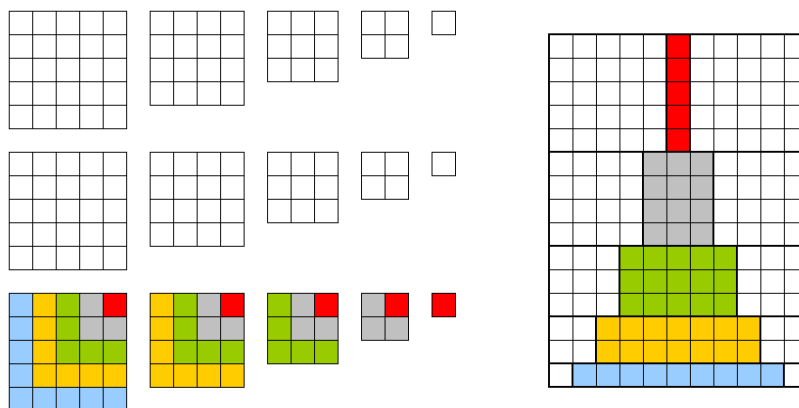


Bild 2

Fehlvorstellungen. Bei dem Dialog in Bild 3 geht es um den Versuch, die Aussage „Er hat drei Platten mehr als Musikkassetten“ durch eine Gleichung auszudrücken (Quelle: Günther Malle, *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*, S. 116). Erstellen Sie eine didaktische Analyse der bei diesem Versuch auftretenden Schwierigkeiten.

- H:** Hm ... $P + 3 = ?$... Die Musikkassetten kann man da ja nicht einbauen. Wenn man jetzt aufschreibt $M = P + 3$, dann ist das ja nicht gleich. Er hat ja mehr, um drei mehr; er kann also nicht gleich haben. Das geht nur so aufschreiben: $P + 3 = ?$
- I:** Wie viele Schallplatten hat er, wenn er drei Kassetten hat?
- H:** Ja, um drei mehr, also sechs.
- I:** Und wie kannst du das aufschreiben, wenn wir nicht wissen, wie viele Kassetten er hat?
- H:** Hm ... das geht nicht aufschreiben; er hat ja drei mehr. Wenn wir jetzt schreiben $P + 3 = M$ oder $M = P + 3$, das geht nicht, weil $P + 3$ muß größer sein als M , weil er ja drei Platten mehr hat als Kassetten. Ich kann nur schreiben: $M < P + 3$.
- I:** Versuch, das mit einer Zeichnung darzustellen!
- H:**



Das sind Kassetten und das sind Schallplatten; und dann hat er da drei mehr. Das ist dann:



Er hat mehr Schallplatten als Kassetten.

- I:** Und wie könnte das in Form einer Gleichung angeschrieben werden?
- H:** Das geht nicht. Es geht nur $P + 3$, und das ist größer als M . Ich kann also ein Größerzeichen dazumachen. Aber eine Gleichung mit M und P kann man nicht aufschreiben.

Bild 3