

Heuristik I. Lösen Sie die folgenden Aufgaben unter bewusster Verwendung heuristischer Strategien.

- a) (MO 450613) Vor Alfons und Befons liegen 11 Gummibärchen auf dem Tisch. Alfons und Befons sind abwechselnd am Zug; ein Zug besteht darin, entweder *ein* Gummibärchen oder die *Hälfte* der Gummibärchen auf dem Tisch aufzuessen; bei der Berechnung der Hälfte ungerader Zahlen wird abgerundet. Alfons macht den ersten Zug; wer das letzte Gummibärchen isst, hat verloren. Wer kann den Sieg erzwingen, und wie?
- b) Jedes der neun Felder eines 3×3 -Schachbrettes wird von genau einem Käfer besetzt. Auf ein Signal hin wechselt jeder Käfer auf ein Nachbarfeld (benachbart heißt hier: mit gemeinsamer Seite). Ist es möglich, dass auch nach dem Signal jedes Feld von genau einem Käfer besetzt ist?
- c) Ein Gitterpunkt ist ein Element aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Auf jedem Gitterpunkt wohne nun genau eine natürliche Zahl. (Auch Zahlen dürfen mehrere Wohnorte haben.) Man beweise: Falls auf jedem Gitterpunkt das arithmetische Mittel seiner vier Gitternachbarn wohnt, so wohnt auf jedem Gitterpunkt *dieselbe* Zahl.
- d) Man beweise: In jedem Raum, in dem sich mindestens zwei Menschen aufhalten, gibt es zwei Leute mit derselben Anzahl von Bekannten in diesem Raum.
- e) Auf einer Tafel sind sechs verschiedene Punkte markiert, und zwar praktischerweise so, dass je drei dieser Punkte nicht kollinear sind. Abwechselnd wählen die Spieler A und B je eine Strecke zwischen zwei verschiedenen dieser Punkte und markieren diese Strecke: A in rot, B in grün. Eine einmal markierte Strecke kann nicht erneut gewählt werden. Gewonnen hat, wer als erster ein Dreieck in seiner Farbe produziert hat.
 - Kann dieses Spiel ohne Sieger enden?
 - Kann einer der beiden Spieler den Sieg erzwingen; und wenn ja, wie?

Heuristik II. Finden Sie weitere Aufgaben (etwa aus dem Fundus der Mathematikolympiaden im Internet), die sich für das Training heuristischer Strategien mit Schülerinnen und Schülern eignen, und bestimmen Sie die jeweils anwendbaren Strategien.

Variation von Aufgaben. Lesen Sie den Artikel *Aufgabenvariation im Mathematikunterricht* (Hans Schupp, 2002) und nehmen Sie insbesondere die dort vorgestellten Variationsstrategien zur Kenntnis. Wählen Sie dann nach eigenem Ermessen eine Aufgabe der Mathematik-Olympiaden (Link siehe oben) und nennen Sie denkbare Variationen dieser Aufgabe, die von Schülerinnen und Schülern vorgeschlagen werden könnten. Bewerten Sie die verschiedenen Variationen im Hinblick auf ihre Machbarkeit und Ergiebigkeit.

Variation von Aufgaben II, Bildungsstandards. Wir betrachten die Aufgabe *Fassadenanstrich* aus *Bildungsstandards Mathematik: konkret* (herausgegeben von Werner Blum und anderen), die im Downloadbereich meiner Website verfügbar ist.

- a) Lösen Sie die (für uns recht einfache) Aufgabe und überlegen Sie, welche mathematischen Kompetenzen (aus der offiziellen Liste der Bildungsstandards) beim Lösen dieser Aufgabe im Mathematikunterricht gefördert bzw. getestet werden.
- b) Beim Nachdenken über Variationen der Aufgabe fiel mir – recht typisch – diese hier zur Variation der Fassadenfläche ein: *Bei welchen Flächenmaßen der anzustreichenden Fassade ist Herrn Meiers Strategie, nur 10-Liter-Farbeimer zu kaufen – möglicherweise mehrere –, optimal?* Lösen Sie bitte auch diese Aufgabe.

- c) Ist die Variation oben nach Ihrer Ansicht unterrichtstauglich? Durch welche erneute(n) Veränderung(en) der variierten Aufgabe oben lässt sich die Zugänglichkeit der Aufgabe für untere Klassenstufen verbessern?
- d) Ersinnen Sie weitere Variationen derselben Aufgabe. Welche sind (für welche Klassenstufen?) unterrichtstauglich? Welche Kompetenzen der Bildungsstandards werden durch sie gefördert?

„Klumpatsch-Aufgaben“. Wir vergleichen die Aufgabe *Pflastersteine* mit der Mathematikolympiaden-Aufgabe MO 570613 – siehe <http://www.mathematik-olympiaden.de/aufgaben/57/1/A57061.pdf>. Beide Aufgaben haben strukturelle Ähnlichkeiten, da beide in ihren Teilaufgaben mit Variationen arbeiten, und sind doch recht verschieden. Arbeiten Sie den grundsätzlichen Unterschied der Variationstechniken in den beiden Aufgaben heraus.