Zu Merkmalen einer „didaktischen Haltung“. Unten finden Sie die Aussage und einen hochschulüblichen Beweis des sogenannten *Approximationssatzes von Dirichlet*. Vergleichen Sie diesen Beweis und seine Darstellung mit den entsprechenden Ausführungen aus „Von Zahlen und Figuren“ (1933) von Hans Rademacher und Otto Toeplitz (siehe den Downloadbereich meiner Institutswebsite in der Rubrik dieses Seminars).

a) Versuchen Sie dem Approximationssatz – möglichst noch vor Lektüre des längeren Vergleichstextes – einen „Sinn“ zu geben, also eine Art „didaktische Einbettung“.

b) Sammeln Sie anhand der Exposition des Themas bei Rademacher und Toeplitz Merkmale einer *didaktischen Haltung* bzw. einer *Didaktisierung*.

c) Ist es eigentlich irgendwie von Bedeutung, dass bei Bundschuh *beliebige* reelle Zahlen approximiert werden, bei Rademacher und Toeplitz hingegen *irrationale*?

Dirichletschen Approximationssatz. *Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{N}$, $\omega \geq 2$. Dann existieren $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $1 \leq q < \omega$ und $|\alpha q - p| \leq \frac{1}{\omega}$. Ist α irrational, so existieren unendlich viele verschiedene teilerfremde $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, für die $|q\alpha - p| < \frac{1}{q}$ gilt.*

Beweis. Für den ersten Teil des Satzes betrachte man die $\omega + 1$ im Einheitsintervall $[0, 1]$ gelegenen Zahlen 1 und*) $\{\alpha x\}$ mit $x \in \{0, \ldots, \omega - 1\}$ und die ω Teilintervalle $[\frac{j-1}{\omega}, \frac{j}{\omega}]$, $j = 1, \ldots, \omega$, von $[0, 1]$ der Länge $\frac{1}{\omega}$. Es existiert mindestens ein derartiges Teilintervall, in das wenigstens zwei der $\omega+1$ oben genannten Zahlen fallen. Sind dies zwei Zahlen des Typs $\{\alpha x\}$, etwa $\{\alpha x_1\}$ und $\{\alpha x_2\}$, wobei o.B.d.A. $x_1 < x_2$ gelten möge, so setzt man $q := x_2 - x_1$, $p := [\alpha x_2] - [\alpha x_1]$ und hat damit alle Forderungen erfüllt. Fallen jedoch 1 und eine Zahl des Typs $\{\alpha x\}$ ins gleiche Teilintervall, so ist $x > 0$, da die Zahl 0 wegen $\omega \geq 2$ nicht in diesem Teilintervall liegen kann. In diesem Fall setzt man $q := x$, $p := [\alpha x] + 1$ und hat damit erneut alle Forderungen für die erste Aussage im Approximationssatz erfüllt.

*) Für reelles z wird $\{z\} := z - [z]$ gesetzt; $\{z\}$ heißt der *gebrochene Teil* von z. Weiter bedeutet $\|z\| := \mathrm{Min}(\{z\}, 1 - \{z\})$ den Abstand von z zur nächstgelegenen ganzen Zahl.

aus Peter Bundschuh: „Einführung in die Zahlentheorie“. Der Beweis des zweiten Teils des Satzes fehlt hier.

Ein Beispiel eines mathematischen Brückenschlages zwischen Universität und Schule. Entwickeln Sie für die Verwendung im Klassenzimmer die Regeln eines *Approximationsspiels*, das auf folgenden Grundideen aufbaut:

- Gegenstand des Spiels ist der „Kauf“ von rationalen Zahlen und deren gewinnbringender „Einsatz“ bei der Approximation von gewissen reellen Zahlen (in unteren Klassenstufen etwa rationale Zahlen mit großem Nenner, in höheren Klassenstufen irrationale Quadratwurzeln natürlicher Zahlen).
- Der Wert und damit der Kaufpreis einer rationalen Zahl (als Werkzeug der Approximation) hängt nur von deren Nenner in der gekürzten Darstellung ab: Je größer, desto teurer.
- Der Gewinn, der sich bei der Approximation einer vorgelegten Zahl erzielen lässt, hängt von der Güte der Approximation ab: Je besser die Approximation, desto mehr gibt es zu gewinnen.
- Das Angebot der Approximationsbrüche ist möglicherweise bezüglich der Größe ihrer Nenner nach oben begrenzt. (Und zwar auch deshalb, um im Falle der Approximation einer *rationalen* Zahl eine perfekte Approximation (d.h. Übereinstimmung) ausschließen zu können.)

Führen Sie außerdem aus, wie das von Ihnen gestaltete Spiel als Mittel zur Entwicklung mathematischer Fragen genutzt werden kann (die womöglich teilweise von Dirichlets Satz aus der vorigen Aufgabe beantwortet werden). Welche der aufkommenden Fragen werden von Dirichlets Satz *nicht* beantwortet?

Zum fraglichen Status der (Mathematik-)Didaktik. Auf *Youtube* gibt es ein Video mit dem Titel *Pólya explains the problem solving technique*. Die Videoqualität ist schlecht, und das Englisch des Vortragenden, des Mathematikers George Pólya, ist kaum besser. Der Vortrag selbst jedoch ist interessant. In der Einleitung des Videos erläutert Pólya sein Dictum *Teaching is not a science, it's an art*, das sich in unserer Vorlesung am 15. Oktober widergespiegelt hat. Studieren Sie die Einleitung des Videos (etwa bis 03:40) und beschreiben Sie (mündlich) Pólyas Haltung zum Unterrichten von Mathematik.

Zum entdeckenden Lernen und zur Freiheit bzw. Unfreiheit des Lehrers. Die Forderung nach einem Unterricht, der entdeckendes Lernen ermöglicht, wurde natürlich nicht nur von George Pólya erhoben. Auch der (im Jahre 2017 verstorbene) Mathematikdidaktiker Heinrich Winter hat sich damit beschäftigt. Im Downloadbereich meiner Institutswebsite finden Sie seinen Artikel *Lernen durch Entdecken?* Lesen Sie diesen Artikel bis einschließlich Abschnitt 5 (also bis zur vierten Seite) und fassen Sie dessen Inhalt zusammen. Beurteilen Sie, inwieweit sich entdeckendes Lernen im Unterrichts*alltag* umsetzen lässt. Welche Hindernisse gibt es?