Zusammenfassung der Habilitationsschrift

zum Thema

"Gelöste und offene P-NP-Probleme über verschiedenen Strukturen"

vorgelegt von
Christine Gaßner

Ausgehend von einem allgemeinen Algorithmenbegriff führen wir ein uniformes abstraktes Berechnungsmodell über beliebigen algebraischen Strukturen, die mit einer gewissen Anzahl von zusätzlichen Relationen ausgestattet sein dürfen, ein. Dieses Modell vereint die Vorteile von Real-RAM-Modellen und dem von Lenore Blum, Steve Smale und Micheal Shub entwickelten BSS-Modell und ist so ein geeignetes Hilfsmittel, um im heutigen Zeitalter der objektorientierten Programmierung erste Abschätzungen der Komplexität von Problemen auf einem hohen Abstraktionsniveau und unter der Voraussetzung von bereitgestellten Klassen (Strukturen) mit vielen implementierten Methoden (Funktionen) vorzunehmen. Wir befassen uns insbesondere mit den Klassen $\mathrm{P}_{\mathcal{A}}$, $\mathrm{DNP}_{\mathcal{A}}$ und $\mathrm{NP}_{\mathcal{A}}$ der Entscheidungsprobleme, die in Polynomialzeit mit Hilfe von deterministischen, digital-nichtdeterministischen oder nichtdeterministischen Maschinen über algebraischen Strukturen $\mathcal{A}$ erkennbar sind. Soweit wie für das Verständnis der Beweise bedeutsam, vergleichen wir das hier verwendete Maschinenmodell auch mit anderen klassischen und neueren Berechnungsmodellen. Zum einen resultiert aus der Uniformität des Modells eine Komplexitätstheorie, die die klassische Komplexitätstheorie einschließt, zum anderen ergeben sich für viele algebraische Strukturen $\mathcal{A}$ auch neue Fragestellungen, zu denen das Problem der abstrakten Entscheidbarkeit des zugehörigen Halteproblems und die $\mathrm{P}_{\mathcal{A}}$-$\mathrm{NP}_{\mathcal{A}}$-Probleme gehören. Um solche Fragen angemessen diskutieren zu können, werden abstrakte Erkennbarkeits-, Entscheidbarkeits- und Reduktionsbegriffen in Anlehnung an die klassische Berechenbarkeitstheorie definiert. Neben den Maschinen über verschiedenen Strukturen werden in dem Zusammenhang auch Orakelmaschinen untersucht, die einerseits die Grundlage der Turingreduktionen bilden und andererseits eine veränderte Sichtweise auf Fragen der Relativierungen von Komplexitätsklassen gestatten und erfordern. Im Rahmen des hier betrachteten Berechnungsmodells werden in der Habilitationsschrift folgende Thesen diskutiert, auf die angegebene Weise untermauert und bewiesen.

- Für jede Struktur $\mathcal{A}$, die die Kodierung der Maschinen über $\mathcal{A}$ erlaubt, kann das entsprechende Halteproblem nicht durch eine Maschine über $\mathcal{A}$ entschieden werden.

- Halteprobleme müssen nicht innerhalb der zugrunde gelegten Klasse von Maschinen über einer Struktur $\mathcal{A}$ semi-entscheidbar, d. h. erkennbar, sein.

- Am Beispiel von Maschinen zur Verarbeitung von reellen oder komplexen Zahlen, die den additiven BSS-Maschinen entsprechen, wird gezeigt, dass die verschiedensten logischen, algebraischen und topologischen Beweistechniken und -methoden geeignet sein können, um nachzuweisen, dass es unterhalb des Halteproblems abstrakt erkennbare Probleme von verschiedenen algorithmischen Schwierigkeitsgraden gibt, die echt schwächer als das entsprechende Halteproblem sind.

- Während die $\mathrm{P}_{\mathcal{A}}$-$\mathrm{NP}_{\mathcal{A}}$-Probleme für viele Strukturen $\mathcal{A}$ noch nicht gelöst werden konnten, führen zugelassene zusätzliche Orakelbefragungen nicht selten zu einer Trennung der relativierten Versionen der Polynomialzeitkomplexitätsklassen. Neben vielen konkreten Beispielen für Strukturen, die insbesondere die reellen Zahlen oder die komplexen Zahlen enthalten, können auch einige sehr weitreichende Aussagen getroffen werden, die ganze Klassen von Strukturen einbeziehen. So werden verschiedene Konstruktionen für Orakel O und Q in uniformer Weise (d. h. für eine ganze Klasse von Strukturen anwendbar) beschrieben und Strukturen $\mathcal{A}$ mit den Eigenschaften (i), (ii), (iii) oder (iv) angeben.

(i) $\mathrm{P}_\mathcal{A} \neq \mathrm{DNP}_\mathcal{A} \neq \mathrm{NP}_\mathcal{A}$ und $\mathrm{P}^O_\mathcal{A} = \mathrm{DNP}^O_\mathcal{A} = \mathrm{NP}^O_\mathcal{A}$,

(ii) $\mathrm{P}_\mathcal{A} \neq \mathrm{DNP}_\mathcal{A} = \mathrm{NP}_\mathcal{A}$ und $\mathrm{P}^O_\mathcal{A} = \mathrm{DNP}^O_\mathcal{A}$ und $\mathrm{DNP}^Q_\mathcal{A} \neq \mathrm{NP}^Q_\mathcal{A}$,

(iii) $\mathrm{P}_\mathcal{A} = \mathrm{DNP}_\mathcal{A} \neq \mathrm{NP}_\mathcal{A}$ und $\mathrm{P}^Q_\mathcal{A} \neq \mathrm{DNP}^Q_\mathcal{A}$ und $\mathrm{DNP}^O_\mathcal{A} = \mathrm{NP}^O_\mathcal{A}$,

(iv) $\mathrm{P}_\mathcal{A} = \mathrm{DNP}_\mathcal{A} = \mathrm{NP}_\mathcal{A}$ und $\mathrm{P}^Q_\mathcal{A} \neq \mathrm{DNP}^Q_\mathcal{A}$ und $\mathrm{DNP}^O_\mathcal{A} \neq \mathrm{NP}^O_\mathcal{A}$.

Auf diese Weise wird auch noch einmal die Unabhängigkeit der meisten $\mathrm{P}_\mathcal{A}$-$\mathrm{NP}_\mathcal{A}$-Probleme von den Ergebnissen für die relativierten Versionen unterstrichen. Neben der Konstruktion von Orakelmengen fließen hier auch folgende Resultate für Strukturen über Strings (d. h. für Strukturen, die Strings als Elemente und darüber hinaus gewisse weitere Relationen und Operationen enthalten) und für Strukturen über binären Bäumen (deren Grundmengen Mengen von binären Bäumen sind) ein.

- Für einfache Strukturen $\mathcal{A}$ über Strings, die eine Operation zum Anfügen von Symbolen und Operationen zum Entfernen der letzten Symbole enthalten, gilt $\mathrm{DNP}_\mathcal{A} = \mathrm{NP}_\mathcal{A}$ und das $\mathrm{P}_\mathcal{A}$-$\mathrm{DNP}_\mathcal{A}$-Problem ist zum klassischen P-NP-Problem äquivalent. Für solche Strukturen werden zusätzliche Relationen definieren, so dass für die Expansionen $\mathcal{B}$ die Beziehungen $\mathrm{P}_\mathcal{B} = \mathrm{DNP}_\mathcal{B} \neq \mathrm{NP}_\mathcal{B}$ oder $\mathrm{P}_\mathcal{B} = \mathrm{NP}_\mathcal{B}$ gelten.

- Für einfache Strukturen $\mathcal{A}$ über binären Bäumen, die Operationen zum Verketten der beiden Wurzeln zweier Bäume und zur Berechnung der direkten Unterbäume enthalten, gilt $\mathrm{P}_\mathcal{A} \neq \mathrm{DNP}_\mathcal{A} = \mathrm{NP}_\mathcal{A}$. Wir definieren für solche Strukturen, die anstelle der Identitätsrelation nur eine Relation zum Testen, ob ein Baum der leere Baum ist, enthalten, eine zusätzliche Relation, so dass für die Expansion $\mathcal{B}$ die Gleichung $\mathrm{P}_\mathcal{B} = \mathrm{NP}_\mathcal{B}$ gilt.

- Jede Struktur $\mathcal{A}$ mit nur abzählbar vielen Operationen und Relationen kann in eine Struktur $\mathcal{B}$ über Strings eingebettet werden, so dass $\mathrm{P}_\mathcal{B} = \mathrm{NP}_\mathcal{B}$ gilt.

- Jede Struktur $\mathcal{A}$ endlicher Signatur kann in eine Struktur $\mathcal{B}$ über binären Bäumen ohne Identitätsrelation, die aber den Test, ob ein Baum der leere Baum ist, erlaubt, eingebettet werden, so dass $\mathrm{P}_\mathcal{B} = \mathrm{NP}_\mathcal{B}$ gilt.