Quanten-Lévy-Prozesse auf Deformationen von Bialgebren

Diplomarbeit

vorgelegt von

Malte Gerhold

Themensteller: Prof. Dr. rer. nat. habil. M. Schürmann
Zweitgutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. V. Liebscher

17. November 2009

Lehrstuhl für Algebra und funktionalanalytische Anwendungen
Institut für Mathematik und Informatik
Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Lévy-Prozesse, d.h. stochastische Prozesse mit unabhängigen stationären Zuwächsen sind eine der wichtigsten und bestuntersuchten Klassen stochastischer Prozesse. Die Lévy-Prozesse auf $\mathbb{R}$ sind durch die Lévy-Khintchine-Formel klassifiziert. Eine naheliegende Verallgemeinerung ist es, Lévy-Prozesse mit Werten in beliebigen Gruppen zu betrachten. Dabei heißt ein stochastischer Prozeß X_t mit Werten in der (meßbaren) Gruppe G Lévy-Prozeß, wenn die „Zuwächse“ $X_s^{-1}X_t$ stationär und unabhängig sind.

Der Übergang von einer kommutativen (klassischen) Theorie zu einer nichtkommutativen (Quanten-) Theorie vollzieht sich, indem man statt den ursprünglichen Objekten (hier: Wahrscheinlichkeitsräume) die Algebren von Funktionen auf diesen axiomatisiert und die Kommutativitätsforderung, die für Algebren von Funktionen ja stets erfüllt ist, fallen läßt. Das führt zur Definition eines Quantenwahrscheinlichkeitsraumes (QWR) als ein Paar $(\mathcal{A}, \Phi)$ bestehend aus einer unitalen $*$-Algebra $\mathcal{A}$ und einem positiven, normierten linearen Funktional Φ auf $\mathcal{A}$. Ist $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so kann man diesen stets als kommutativen QWR auffassen, indem man $\mathcal{A} = \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ und $\Phi(f) = \mathbb{E}(f) = \int f \mathrm{d}\mathbb{P}$ setzt. Die Algebra $\mathcal{A}$ spielt insofern die Rolle der meßbaren Funktionen, das Funktional die Rolle des Integrals, d.h. der Erwartung. In dieser dualen Sichtweise erklärt sich auch die auf den ersten Blick „falschherum“ wirkende Definition einer Quantenzufallsvariable als $*$-Algebrahomomorphismus $j : B \to \mathcal{A}$. Ist $X : \Omega \to E$ eine (klassische) Zufallsvariable mit Werten in E, so ist

$$j_X : \mathcal{L}^\infty(E) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega),$$
$$j_X(f) = f \circ X$$

eine Quantenzufallsvariable.

Nachdem wir nun den Wahrscheinlichkeitsraum durch einen evtl. „nichtkommutativen Raum“ ersetzt haben, ist es naheliegend, zur Definition eines Quanten-Lévy-Prozesses $j_{st} : B \to \mathcal{A}$ nicht zu fordern, daß B eine Alge-

bra von Funktionen auf einer Gruppe ist, sondern eine entsprechende, evtl. nichtkommutative Verallgemeinerung, also eine „Quantengruppe“. Es gibt bisher keine einheitliche Definition, was eine Quantengruppe ist, allerdings viele Beispiele, und es sind stets Hopf-Algebren, und damit auch Bialgebren (für Beispiele von Quantengruppen siehe z.B. [13], [19]; in [6] finden sich Beispiele in direktem Bezug zur Quantenstochastik).
In [17] entwickelt Schürmann eine Theorie von Quanten-Lévy-Prozessen auf Bialgebren. Als Unabhängigkeitsbegriff wird die Tensorunabhängigkeit benutzt. Dort wird gezeigt, daß sich jeder solche Quanten-Lévy-Prozeß als Lösung einer quantenstochastischen Differentialgleichung schreiben und auf dem Bose-Fockraum realisieren läßt.
In [20] hat Wirth additive Deformationen von Bialgebren definiert, eine Klasse von Deformationen der Algebrastruktur, die in besonderer Weise mit der Koalgebrastruktur verträglich ist. In [18] hat Schürmann Lévy-Prozesse auf additiven Deformationen von $*$-Bialgebren definiert und einige erste Beispiele behandelt.
In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß die Theorie aus [17] tatsächlich auf diesen Fall anwendbar ist und analoge Ergebnisse wie im Fall nichtdeformierter Algebren gelten, insbesondere die Darstellung der Prozesse als Lösungen quantenstochastischer Differentialgleichungen und ihre Realisierung auf dem Fockraum betreffend. Darüberhinaus führt die Frage, wie sich die Prozesse auf Deformationen von Bialgebren von solchen auf nichtdeformierten unterscheiden, auf in [20] noch nicht gestellte Fragen zur Kohomologie von Deformationen von Bialgebren.

1.2 Übersicht

Im folgenden wird der Inhalt der Kapitel kurz zusammengefaßt und anschließend aufgeschlüsselt, was sich in welchem Abschnitt findet.

Kapitel 2: Ist $\mathcal{A}$ eine endlichdimensionale Algebra mit Multiplikation μ und Einselement $\mathbb{1}$, so ist der Dualraum $\mathcal{A}' = \{\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \mid \psi \text{ linear}\}$ eine Koalgebra, indem man setzt

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi \circ \mu \\ \delta\varphi &= \varphi(\mathbb{1}) \end{aligned}$$

Dabei heißt ein Vektorraum C mit Abbildungen $\Delta : C \to C \otimes C$ und $\delta : C \to \mathbb{C}$ Koalgebra, falls

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta &= (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta \\ (\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta &= (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Delta = \mathrm{id}, \end{aligned}$$

wobei id die identische Abbildung auf C bezeichnet und $C \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \otimes C$ identifiziert werden. Die Bedingungen heißen Koassoziativität und Koeinseigenschaft. Ein Standardbeispiel für eine Bialgebra (d.h. eine Algebra mit verträglicher Koalgebrastruktur) ist die Bialgebra $\mathcal{F}(G)$ der Funktionen auf einer endlichen Halbgruppe G. Dabei wird die Algebrastruktur von der Algebrastruktur der komplexen Zahlen induziert, die Koalgebrastruktur von der Algebrastruktur von $\mathbb{C}G$; wir können $\mathcal{F}(G)$ mit dem Dualraum der Gruppenalgebra $(\mathbb{C}G)'$ identifizieren. In ähnlicher Weise lassen sich kompakte, sowie lokalkompakte, abelsche Gruppen durch assoziierte Hopf-Algebren beschreiben. Ein zweites wichtiges Beispiel ist die universelle Einhüllende $U(\mathfrak{L})$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{L}$. Stellen wir uns die Elemente von $\mathfrak{L}$ als Ableitungen auf einem geeigneten Raum vor, so werden aus $x(ab) = x(a)b + ax(b)$ und $x(1) = 0$ die duale Komultiplikation und Koeins

$$\begin{aligned}\Delta x &= x \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes x \\ \delta x &= 0\end{aligned}$$

Ein weiterer wichtiger Punkt dieses Kapitels ist die Definition der Faltung. Sind (C, Δ, δ) eine Koalgebra, $(\mathcal{A}, \mu, \mathbb{1})$ eine Algebra und $R, S : C \to \mathcal{A}$ lineare Abbildungen, so setzt man

$$R \star S = \mu \circ (R \otimes S) \circ \Delta$$

Insbesondere existiert eine Faltung für lineare Funktionale auf Koalgebren und das Faltungsexponential

$$e_\star^{t\psi}(b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi^{\star k}(b)}{k!}$$

konvergiert für alle $\psi \in C'$ und $b \in C$.
In Abschnitt 2.1 wird das Tensorprodukt eingeführt. Abschnitt 2.2 beschäftigt sich mit Algebren und $*$-Algebren, die wir in einer für das Verständnis von Koalgebren und Bialgebren geeigneten Art einführen.
In Abschnitt 2.3 definieren wir Koalgebren und wiederholen zwei wichtige Sätze, den Fundamentalsatz für Koalgebren 2.5, und die Konvergenz des Faltungsexponentials 2.4. Schließlich betrachten wir in 2.4 die genannten Beispiele von Bialgebren und neben diesen auch noch ein Beispiel einer weder kommutativen noch kokommutativen Bialgebra eingeführt, die nichtkommutative Koeffizienten-Bialgebra der unitären Gruppe.

Kapitel 3: Hier beschäftigen wir uns mit den additiven Deformationen von Bialgebren. Eine additive Deformation auf einer Bialgebra B ist dabei eine Familie von Multiplikationen $(\mu_t)_{t \geq 0}$ auf B, sodaß $B_t = (B, \mu_t)$ für alle t eine unitale Algebra ist, $B_0 = B$ die Stetigkeitsbedingung $\delta \circ \mu_t \to \delta \otimes \delta$ punktweise erfüllt ist und

$$\Delta \circ \mu_{t+s} = (\mu_t \otimes \mu_s) \circ \Lambda$$

Dabei bezeichnet Λ die Komultiplikation auf $B \otimes B$. Mit anderen Worten ist $\Delta : B_{t+s} \to B_t \otimes B_s$ ein Algebrahomomorphismus.

Eine solche Deformation einer Bialgebra ist auch eine Deformation der Algebra im Sinne von Gerstenhaber ([8]), wobei die Konvergenz bei uns immer punktweise zu verstehen ist, während Gerstenhaber mit formalen Potenzreihen arbeitet. Es ist also nicht überraschend, daß die infenitesimalen Deformationen Kozyklen in der Hochschild-Kohomologie sind. Schreiben wir formal

$$\mu_t(a \otimes b) = ab + tF(a \otimes b) + \mathcal{O}(t^2)$$

so liefert die Assoziativitätsbedingung von μ_t

$$\begin{aligned}0 = (\mu_t \circ (\mu_t \otimes \mathrm{id}) - \mu_t \circ (\mathrm{id} \otimes \mu_t))(a \otimes b \otimes c) \\ = t(aF(b \otimes c) + F(a \otimes bc) - F(a \otimes b)c - F(ab \otimes c))\end{aligned}$$

d.h. $F \in Z_2(B, B)$ (Menge der 2-Kozyklen auf B mit Werten in B). Es folgt (nach Umsortieren) für $L = \delta \circ F$:

$$\delta(a)L(b \otimes c) - L(ab \otimes c) + L(a \otimes bc) - L(a \otimes b)\delta(c) = \partial L = 0,$$

wobei ∂ den Korandoperator der Hochschild-Kohomologie bezeichnet. D.h. $L \in Z_2(B, \mathbb{C})$ (Menge der 2-Kozyklen auf B mit Werten in $\mathbb{C}$). Die Existenz der Koeins erlaubt es uns, die Hochschild-Kohomologie zum B-Bimodul $\mathbb{C}$ zu betrachten.
Bisher ist die Bedingung, daß Δ Algebrahomomorphismus von B_{t+s} nach $B_t \otimes B_s$ ist, noch nicht eingebracht. Man kann zeigen, daß $\mu_t = \mu \star e_\star^{tL} = e_\star^{tL} \star \mu$, wobei $\star$ die übliche Faltung für Abbildungen von einer Koalgebra in eine Algebra bezeichnet, hier also speziell $\mu \star e_\star^{tL} = (e_\star^{tL} \otimes \mu) \circ \Lambda$. Damit ergibt sich (durch Ableiten) $\mu \star L = L \star \mu$. Um also die infinitesimalen Deformationen mit den Kozyklen zu identifizieren, müssen wir auch $\mu \star F = F \star \mu$ bzw. $\mu \star L = L \star \mu$ fordern. Dies führt zu einem abgewandelten Kokettenkomplex $\widetilde{C}_n(B, \mathbb{C})$ und die Generatoren der additiven Deformationen sind Kozyklen in dieser Kohomologie, also $L \in \widetilde{Z}_n(B, \mathbb{C})$. Nun ist zu erwarten, daß zu homologen Generatoren äquivalente Deformationen gehören. Tatsächlich zeigen wir, daß, wenn der Generator L ein Korand ist, also $L \in \widetilde{B}_2(B, \mathbb{C})$, die Algebren B_t alle auf kanonische Weise isomorph sind. Zu solch einem L existiert nach Definition ein $\psi \in \widetilde{C}_1(B, \mathbb{C})$ mit $L = \partial\psi$. Die Isomorphismen sind dann gegeben durch

$$\Phi_t = (\mathrm{id} \otimes e_\star^{t\psi}) \circ \Delta$$

Ist B eine $*$-Bialgebra, d.h. verfügt B über eine Involution, so werden als Deformationen nur solche zugelassen, für die alle B_t wieder $*$-Algebren mit der gleichen Involution sind. Dann muß man von den Generatoren zusätzlich verlangen, daß $L(a^* \otimes b^*) = \overline{L(b \otimes a)}$. Die bisherigen Betrachtungen gelten jeweils entsprechend im Falle von $*$-Bialgebren.
Die Einführung der entsprechenden Kohomologien geschieht in Abschnitt 3.1, die additiven Deformationen werden in 3.2 eingeführt. In Abschnitt 3.3

werden die von Korändern erzeugten Deformationen untersucht.

Kapitel 4: Sei B eine $*$-Bialgebra, L Generator einer additiven Deformation. Ein lineares Funktional $\psi : B \to \mathbb{C}$ heißt dann L-bedingt positiv, falls

$$L(a^* \otimes a) + \psi(a^* a) \geq 0 \qquad \forall a \in \ker \delta$$

$S := L - \partial\psi$ ist damit eine positiv semidefinite Bilinearform auf $\ker \delta$. Wir bezeichnen mit N den zugehörigen Nullraum. Wir können nun eine GNS-artige Konstruktion durchführen, um den Prähilbertraum $D = \ker \delta / N$, die kanonische Abbildung $\eta : B \to D$ (mit $\eta(\mathbb{1}) = 0$) und die $*$-Darstellung ρ mit $\rho(a)\eta(b) := \eta(ab) - \eta(a)\delta(b)$ zu definieren. Es gilt dann $S(a \otimes b) = \langle \eta(a^*), \eta(b) \rangle$. Ähnlich, wie in [17] läßt sich dann zeigen, daß die quantenstochastische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \mathrm{d}j_{st} &= j_{st} \star \mathrm{d}I_t \\ j_{ss} &= \delta \, \mathrm{id} \end{aligned}$$

mit $I_t = A_t^*(\eta(b)) + A_t(\eta(b^*)) + \Lambda_t(\rho(b) - \delta(b)) + \psi(b)t$ eine eindeutig bestimmten Lévy-Prozeß auf dem QWR $(\mathcal{A}, \Phi)$ als Lösung besitzt. Dabei ist ein Lévy-Prozeß auf einer Deformation einer Bialgebra eine Familie von Algebrahomomorphismen $j_{st} : B_{t-s} \to \mathcal{A}$, $0 \leq s \leq t$, sodaß gilt:

- $j_{sr} \star j_{rt} = j_{st}$ für $0 \leq s \leq r \leq t$.
- $j_{s_1 t_1}(B), \ldots, j_{s_n t_n}(B)$ sind tensorunabhängig für $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq \cdots \leq s_n \leq t_n$.
- $\Phi \circ j_{st} = \Phi \circ j_{0,(t-s)}$ für $0 \leq s \leq t$.
- Es ist $\lim\limits_{t \to 0+} \Phi \circ j_{0,t} = \delta$ punktweise.

Um nun alle Lévy-Prozesse auf Deformationen einer bestimmten Bialgebra B zu finden, betrachtet man alle $*$-Darstellungen ρ und zugehörigen ρ-δ-Kozyklen η auf B. Zu einem linearen Funktional ψ liefert dann $L := S + \partial\psi$ eine additive Deformation, sofern $L \star \mu = \mu \star L$, und es folgt, daß ψ L-bedingt positiv ist. Ist B kokommutativ, so können wir also ein beliebiges lineares Funktional wählen, und die entstehenden Deformationen sind auch alle äquivalent. Ist S sogar ein Korand, so ist auch L ein Korand, und die Deformation trivial. Man kann in diesem Fall einen Prozeß auf dem nichtdeformierten B angeben, der sich nur im Driftterm ψ in der Differentialgleichung von dem ursprünglichen Prozeß unterscheidet. Wir zeigen, daß solche Prozesse in einfacher Weise zusammenhängen. Wir beweisen außerdem zwei Sätze, die die Situation wesentlich vereinfachen. Zum einen zeigen wir, daß, wenn B eine endlich erzeugte kommutative $*$-Bialgebra ist, sich jede endlichdimensionale Darstellung ρ so zerlegen läßt, daß der eine Anteil der Koeins entspricht und für den anderem Anteil das zugehörige S ein Korand ist. Sind wir also an Prozessen interssiert, die nicht äquivalent zu Prozessen auf nichtdeformierten Bialgebren sind, so können wir $\rho = \delta$ annehmen. In diesem Fall zeigen wir, daß S genau dann ein Korand ist, wenn S

symmetrisch ist. Die Polynombialgebra in zwei Veränderlichen $\mathbb{C}[x, y]$ und die Gruppenbialgebra $\mathbb{C}\mathbb{Z}$ werden als Beispiele ausführlich behandelt und jeweils die Prozesse untersucht, die sich nicht gemäß der obigen Diskussion auf den nichtdeformierten Fall zurückführen lassen.
In Abschnitt 4.1 werden einige Resultate zu klassischen Lévy-Prozessen wiederholt, die grundlegenden Definitionen der Quantenstochastik, die im folgenden verwendet werden, finden ich in Abschnitt 4.2. Im nächsten Abschnitt 4.3 stehen die wesentlichen Resultate aus der Theorie der quantenstochastischen Differentialgleichungen auf Koalgebren, die wir in Abschnitt 4.4 anwenden, um die Darstellung von Lévy-Prozessen als Lösung quantenstochastischer Differentialgleichungen und ihre Realisierung auf dem Fockraum zu beweisen. In Abschnitt 4.5 untersuchen wir Lévyprozesse auf Deformationen kokommutativer Bialgebren. Daraufhin werden in Abschnitt 4.6 anhand von Beispielen Kriterien entwickelt, wann ein Prozeß zu einem Prozeß auf einer nichtdeformierten Bialgebra durch Änderung des Drifttermes gemacht werden kann und diejenigen Prozesse, für die das nicht der Fall ist werden genauer untersucht. Die Kriterien werden in Abschnitt 4.7 verallgemeinert und bewiesen. Schließlich werden noch die kommutative und nichtkommutative Koeffizientenalgebra der unitären Gruppe in Abschnitt 4.8 als Beispiele betrachtet, da sie eine Situation darstellen, in der die entwickelten Sätze nicht anwendbar sind.

Kapitel 2

Algebraische Grundlagen

In diesem Kapitel werden wir auf den Begriff der Bialgebra hinarbeiten und versuchen die Definition hinreichend zu motivieren, insbesondere deutlich zu machen, inwiefern Bialgebren ein Ersatz für Halbgruppen in einer nichtkommutativen Theorie sein können. Als Beispiele betrachten wir schließlich Gruppenbialgebren, universelle Einhüllende von Lie-Algebren sowie Matrix-Bialgebren.

2.1 Tensorprodukte

Wir stellen die wichtigsten Grundlagen zu Tensorprodukten von Vektorräumen zusammen.*
Vektorräume sind, falls nichts anderes explizit gesagt wird, stets über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Satz 2.1 (Existenz des Tensorproduktes)**.** *Seien $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ Vektorräume. Dann gibt es einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten Vektorraum $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ und eine bilineare Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathcal{V} \times \mathcal{W} &\to \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \\ (v, w) &\mapsto v \otimes w, \end{aligned}$$

sodaß es zu jeder bilinearen Abbildung $R : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \to \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ beliebiger Vektorraum, eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\Phi : \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \to \mathcal{U}$ gibt, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \times \mathcal{W} \arrow[rr, "\otimes"] \arrow[dr, "R"'] & & \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \arrow[dl, "\Phi"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}$$

*Vgl. z.B. [11], Kapitel 10

kommutiert, d.h. $R(v,w) = \Phi(v \otimes w)$ *für alle* $v \in \mathcal{V}, w \in \mathcal{W}$.
Außerdem gilt

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} = \operatorname{Lin}\{v \otimes w : v \in \mathcal{V}, w \in \mathcal{W}\}$$

Wir beweisen den Satz hier nicht, geben nur eine mögliche Konstruktion des Tensorproduktes an. Man erhält eine Basis von $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ als kartesisches Produkt einer Basis von $\mathcal{V}$ und einer Basis von $\mathcal{W}$. Für Basisvektoren definiert man $v \otimes w := (v, w)$ und setzt bilinear fort. Dies liefert einen Vektorraum und eine bilineare Abbildung, die die Bedingungen des Satzes erfüllen.

Definition 2.1 (Tensorprodukt, reine Tensoren)**.** Der nach Satz 2.1 bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Vektorraum $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ zusammen mit der Abbildung $(v,w) \mapsto v \otimes w$ heißt *Tensorprodukt* von $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$.
Elemente der Form $v \otimes w$ mit $v \in \mathcal{V}, w \in \mathcal{W}$ heißen *reine Tensoren.*

Für endlichdimensionale Vektorräume ist die Dimension des Tensorproduktes gleich dem Produkt der Dimensionen der einzelnen Räume.
Für einen beliebigen Vektorraum $\mathcal{V}$ gilt: $\mathcal{V} \otimes \mathbb{C} \cong \mathcal{V} \cong \mathbb{C} \otimes \mathcal{V}$, indem man $v \otimes 1 \equiv v \equiv 1 \otimes v$ identifiziert. Davon werden wir im folgenden oft Gebrauch machen.

Definition 2.2 (Tensorprodukt von Abbildungen)**.** Seien $A_i : \mathcal{V}_i \to \mathcal{W}_i$, $i = 1, 2$ lineare Abbildungen. Dann definieren wir $A_1 \otimes A_2 : \mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2 \to \mathcal{W}_1 \otimes \mathcal{W}_2$ als die nach Satz 2.1 eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit

$$(A_1 \otimes A_2)(v_1 \otimes v_2) := A_1(v_1) \otimes A_2(v_2).$$

Tatsächlich ist diese Definition des Tensorproduktes für Abbildungen verträglich mit dem bereits definierten Tensorprodukt von Vektorräumen.
Häufig werden wir den sogenannten Flipoperator benutzen:

Definition 2.3 (Der Flipoperator τ)**.** Seien $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ Vektorräume. Der *Flipoperator* $\tau : \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \to \mathcal{W} \otimes \mathcal{V}$ ist$_{def}$ die nach Satz 2.1 eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit

$$\tau(v \otimes w) = w \otimes v \quad \forall v \in \mathcal{V}, w \in \mathcal{W}.$$

Außerdem ist es oft nötig, Tensorprodukte endlich vieler Vektorräume zu betrachten. Die Tensorproduktbildung ist im folgenden Sinne assoziativ:

Satz 2.2 (Assoziativität des Tensorproduktes)**.** *Seien* $\mathcal{V}_i$*,* $i = 1, \ldots, n$ *Vektorräume. Dann gibt es einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten Vek-*

torraum $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{V}_i$ *und eine* n*-lineare Abbildung*

$$\begin{aligned} \bigtimes_{i=1}^{n} \mathcal{V}_i &\to \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{V}_i \\ (v_1, \ldots, v_n) &\mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n, \end{aligned}$$

sodaß es zu jeder n*-linearen Abbildung* $R : \bigtimes_{i=1}^n \mathcal{V}_i \to \mathcal{U}$*,* $\mathcal{U}$ *beliebiger Vektorraum, eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung* $\Phi : \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{V}_i \to \mathcal{U}$ *gibt, sodaß*

$$\begin{tikzcd} \bigtimes_{i=1}^n \mathcal{V}_i \arrow[rr, "\otimes"] \arrow[dr, "R"'] & & \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{V}_i \arrow[dl, "\Phi"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}$$

kommutiert.
Es gilt

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{V}_i \cong \left(\bigotimes_{i=k_0}^{k_1} \mathcal{V}_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=k_1+1}^{k_2} \mathcal{V}_i \right) \otimes \cdots \otimes \left(\bigotimes_{i=k_{l-1}+1}^{k_l} \mathcal{V}_i \right)$$

für alle $1 = k_0 < k_1 < \cdots < k_{l-1} < k_l = n$*. Dabei ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit*

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto (v_1 \otimes \cdots \otimes v_{k_1}) \otimes \cdots \otimes (v_{k_{l-1}+1} \otimes \cdots \otimes v_n)$$

ein Isomorphismus. Außerdem ist

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{V}_i = \operatorname{Lin} \{ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \ : \ v_i \in \mathcal{V}_i, i = 1, \ldots, n \} \tag{2.1}$$

Der Beweis hierfür ist leicht mit Hilfe der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes zu führen.
Natürlich identifizieren wir alle möglichen solchen Tensorprodukte miteinander und setzen künftig keine Klammern bei der Bildung von Tensorprodukten mehrerer Faktoren.

Für unendlichdimensionale Hilberträume ist das oben definierte algebraische Tensorprodukt zwar wieder ein Prähilbertraum, wenn wir das Skalarprodukt in natürlicher Weise fortsetzen, allerdings nicht vollständig. Deshalb definiert man in diesem Fall ein topologisches Tensorprodukt.

Definition 2.4 (Tensorprodukt von Hilberträumen)**.** Seien $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ Hilberträume. Dann ist das algebraische Tensorprodukt bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle v_1 \otimes v_2, w_1 \otimes w_2 \rangle := \langle v_1, w_1 \rangle \langle v_2, w_2 \rangle$$

ein Prähilbertraum. Wir nennen die Vervollständigung

$$\mathcal{H}_1 \overline{\otimes} \mathcal{H}_2 := \overline{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2}$$

topologisches Tensorprodukt oder einfach wieder *Tensorprodukt* und benutzen das gewöhnliche Symbol $\otimes$ statt $\overline{\otimes}$.

2.2 Algebren

In diesem Abschnitt stellen wir die wichtigsten Definitionen zu assoziativen Algebren zusammen und geben eine Reihe von Beispielen, insbesondere solche, die auch als Bialgebren aufgefaßt werden können.*

Definition 2.5 (Algebra, Homomorphismus, Ideal)**.** Eine (assoziative, komplexe) *Algebra* ist$_{def}$ ein Vektorraum $\mathcal{A}$ mit einer bilinearen Multiplikationsabbildung $\mu : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, sodaß das Assoziativgesetz gilt, d.h.

$$\mu(a, \mu(b, c)) = \mu(\mu(a, b), c) \quad \forall a, b, c \in \mathcal{A}.$$

$\mathcal{A}$ heißt *unital*, falls es ein Element $\mathbb{1} \in \mathcal{A}$ gibt, mit

$$\mu(\mathbb{1}, a) = a = \mu(a, \mathbb{1}) \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

$\mathcal{A}$ heißt *kommutativ*, falls

$$\mu(a, b) = \mu(b, a) \quad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Sind $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ Algebren mit Multiplikationen μ_1, μ_2, so heißt eine lineare Abbildung $\Phi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ (Algebra-) *Homomorphismus*, falls

$$\Phi(\mu_1(a, b)) = \mu_2(\Phi(a), \Phi(b)).$$

Ein Unterraum I der Algebra $\mathcal{A}$ heißt *Ideal*, falls für $a \in \mathcal{A}$, $b \in I$ stets $ab, ba \in I$. In diesem Fall definieren wir die *Quotientenalgebra* $\mathcal{A}/I := \{a + I \mid a \in \mathcal{A}\}$ mit Multiplikation

$$\widetilde{\mu}(a + I, b + I) := \mu(a, b) + I \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$$

*Vgl. [3], Chapter III, §1,2.

und diese ist, da I Ideal ist, auch wohldefiniert.

Für $\mu(a,b)$ schreiben wir auch einfach ab.
Die Definition einer Algebra läßt sich etwas umformulieren, sodaß die auftretenden Gleichungen nur noch Gleichungen zwischen gewissen linearen Abbildungen sind. Dies ist vor allem hilfreich, wenn wir im nächsten Abschnitt Koalgebren definieren wollen, da deren Axiome sich auf diese Weise ganz analog formulieren lassen.
Offenbar können wir μ aufgrund der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes auch als lineare Abbildung $\mu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ auffassen. Die Assoziativität liest sich dann

$$\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes \mathrm{id}),$$

wobei id die identische Abbildung auf $\mathcal{A}$ bezeichnet, d.h. $\mathrm{id}(a) = a$ für alle $a \in \mathcal{A}$.
Die Existenz einer Eins ist äquivalent zur Existenz einer linearen Abbildung $\kappa : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$, sodaß:

$$\mu \circ (\kappa \otimes \mathrm{id}) = \mathrm{id} = \mu \circ (\mathrm{id} \otimes \kappa), \tag{2.2}$$

wobei $\mathbb{C} \otimes \mathcal{A} \cong \mathcal{A} \cong \mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ identifiziert werden. Die Äquivalenz ist leicht einzusehen:
Ist $\mathbb{1}$ neutrales Element der Multiplikation in $\mathcal{A}$, so erfüllt die Abbildung $\kappa : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ mit $\kappa(\lambda) := \lambda\mathbb{1}$ die Gleichung (2.2).
Ist umgekehrt eine Abbildung κ gegeben, die (2.2) erfüllt, so ist $\mathbb{1} := \kappa(1)$ neutrales Element der Multiplikation.
Die Kommutativität läßt sich in dieser Sichtweise schreiben als

$$\mu \circ \tau = \mu,$$

wobei τ den Flipoperator bezeichnet .[*]
Die Axiome einer unitalen Algebra lassen sich dann folgendermaßen in kommutativen Diagrammen ausdrücken

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[dl, "\mu \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes \mu"] & \\
\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[dr, "\mu"'] & & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[dl, "\mu"] \\
 & \mathcal{A} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C} \otimes \mathcal{A} = \mathcal{A} = \mathcal{A} \otimes \mathbb{C} \arrow[dl, "\kappa \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes \kappa"] \arrow[dd, "\mathrm{id}"] & \\
\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[dr, "\mu"'] & & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[dl, "\mu"] \\
 & \mathcal{A} &
\end{tikzcd}$$

[*]Vgl. Def. 2.3.

Die Algebra ist kommutativ genau dann, wenn auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\mu"'] & & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[dl, "\mu"] \\ & \mathcal{A} & \end{tikzcd}$$

kommutiert.
Sind $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ Algebren mit Multiplikation μ_1 bzw. μ_2, so ist $\Phi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ ein Homomorphismus, falls

$$\Phi \circ \mu_1 = \mu_2 \circ (\Phi \otimes \Phi).$$

Ein Unterraum I der Algebra $\mathcal{A}$ ist ein Ideal, wenn

$$\mu(\mathcal{A} \otimes I + I \otimes \mathcal{A}) \subseteq I$$

Nun folgen einige Beispiele für Algebren, die wir in den weiteren Abschnitten zu Beispielen von Bialgebren ausbauen werden.

Beispiel 2.1 (Algebra der komplexwertigen Funktionen auf einer Menge)*.* Für eine beliebige Menge M ist der Raum der komplexwertigen Funktionen auf M,

$$\mathcal{F}(M) := \{f : M \to \mathbb{C}\},$$

eine kommutative Algebra, wenn wir die linearen Operationen und die Multiplikation punktweise definieren, d.h.

$$\begin{aligned} (f+g)(m) &:= f(m) + g(m) \\ (\lambda f)(m) &:= \lambda f(m) \\ (fg)(m) &:= f(m)g(m) \end{aligned}$$

für alle $f, g \in \mathcal{F}(M), m \in M, \lambda \in \mathbb{C}$.
$\mathcal{F}(M)$ ist auch unital mit $\mathbb{1}(m) := 1$ für alle $m \in M$.

Beispiel 2.2 (Algebra der Endomorphismen eines Vektorraumes)*.* Für einen Vektorraum $\mathcal{V}$ bildet der Raum der Endomorphismen auf $\mathcal{V}$,

$$\mathrm{End}(\mathcal{V}) = \{A : \mathcal{V} \to \mathcal{V} \mid A \text{ linear}\},$$

bzgl. der Hintereinanderausführung eine Algebra. Die identische Abbildung id ist das neutrale Element, $\mathrm{End}(\mathcal{V})$ ist also unital.
Ist die Dimension von $\mathcal{V}$ größer als eins, so ist $\mathrm{End}(\mathcal{V})$ nichtkommutativ.
Hat $\mathcal{V}$ die Dimension $n < \infty$, so erhalten wir die Algebra der $n \times n$-Matrizen.

Beispiel 2.3 (Halbgruppen-Algebra). Sei H eine Halbgruppe. Wir identifizieren $x \in H$ mit der Abbildung $\delta_x : H \to \mathbb{C}$ definiert durch $\delta_x(y) := \delta_{x,y}$. Dann bezeichnet $\mathbb{C}H$ die Halbgruppen-Algebra von H. Als Vektorraum ist $\mathbb{C}H := \mathrm{Lin}(H)(= \mathrm{Lin}\,\{\delta_x | x \in H\})$ und H ist dann eine Basis von $\mathbb{C}H$. Die Multiplikation ist die lineare Fortsetzung der Multiplikation in H.
Offenbar ist $\mathbb{C}H$ kommutativ/unital genau dann, wenn H kommutativ/unital ist.

Beispiel 2.4 (Polynomalgebra). Aus dem vorangehenden Beispiel erhalten wir als Spezialfall für $H = \mathbb{N}^n$ die Polynomalgebra in n kommutierenden Unbestimmten $\mathbb{C}\,[x_1, \ldots, x_n]$. Für $(k_1, \ldots, k_n)$ schreiben wir $x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$.
Auch die Polynomalgebra in nichtkommutierenden Unbestimmten können wir so realisieren. Als Halbgruppe wählen wir die von $\{x_1, \ldots, x_n\}$ erzeugte freie Halbgruppe, d.h. die Menge aller Wörter über dem Alphabet $\{x_1, \ldots, x_n\}$ mit Hintereinanderschreibung als Halbgruppenoperation. Diese ist offenbar unital mit dem leeren Wort als Neutralelement. $\mathbb{C}H$ schreiben wir dann auch als $\mathbb{C}\,\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

Beispiel 2.5 (Tensoralgebra). Sei $\mathcal{V}$ ein Vektorraum. Dann können wir gemäß Satz 2.2 die Vektorräume $\mathcal{V}^{\otimes k}$ definieren. Wir setzen dabei $\mathcal{V}^{\otimes 0} := \mathbb{C}$. Dann definieren wir

$$\mathfrak{T}(\mathcal{V}) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{V}^{\otimes k} = \mathbb{C} \oplus \mathcal{V} \oplus (\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}) \oplus \ldots$$

und als Multiplikation setzen wir

$$(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)(w_1 \otimes \ldots \otimes w_m) := v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_m$$

linear auf $\mathfrak{T}(\mathcal{V})$ fort. Die erhaltene Algebra heißt *Tensoralgebra* über $\mathcal{V}$. Offenbar ist $\mathfrak{T}(\mathcal{V})$ unital mit $\mathbb{1} = 1_{\mathbb{C}}$.
Die Tensoralgebra ist durch folgende universelle Eigenschaft charakterisiert: Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige unitale Algebra, $R : \mathcal{V} \to \mathcal{A}$ eine lineare Abbildung. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Algebrahomomorphismus $\Phi : \mathfrak{T}(\mathcal{V}) \to \mathcal{A}$, sodaß

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "R"'] & & \mathfrak{T}(\mathcal{V}) \arrow[dl, "\Phi"] \\ & \mathcal{A} & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Für das nächste Beispiel benötigen wir Lie-Algebren.

Definition 2.6 (Lie-Algebra)**.** Ein Vektorraum $\mathfrak{L}$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung $(x, y) \mapsto [x, y]$ heißt *Lie-Algebra*, falls

$$\begin{aligned} [x, y] &= -[y, x] && \text{(Antisymmetrie)} \\ [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] &= 0 && \text{(Jacobi-Identität)} \end{aligned}$$

für alle $x, y, z \in \mathfrak{L}$.

Beispiel 2.6 (Universelle Einhüllende)*.* Sei $\mathfrak{L}$ eine Liealgebra, $\mathfrak{T}(\mathfrak{L})$ die Tensoralgebra über $\mathfrak{L}$ gemäß Bsp. 2.5.
Wir bezeichnen mit N das von den Elementen der Form

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$$

erzeugte Ideal in $\mathfrak{T}(\mathfrak{L})$. Nun setzen wir

$$U(\mathfrak{L}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{L})/N$$

und nennen $U(\mathfrak{L})$ die universelle Einhüllende Algebra der Lie-Algebra $\mathfrak{L}$. Sie ist durch folgende universelle Eigenschaft ausgezeichnet:
Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Algebra, $R : \mathfrak{L} \to \mathcal{A}$ eine lineare Abbildung, sodaß

$$R([x, y]) = [R(x), R(y)] \quad \forall x, y \in \mathfrak{L}, \tag{2.3}$$

wobei $[a, b] := ab - ba$ für $a, b \in \mathcal{A}$ den Kommutator bezeichnet.
Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Algebrahomomorphismus

$$\Phi : U(\mathfrak{L}) \to \mathcal{A},$$

sodaß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{L} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "R"'] & & U(\mathfrak{L}) \arrow[dl, "\Phi"] \\ & \mathcal{A} & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Sind $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ Algebren, so wollen wir auch $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ als Algebra auffassen. Wir definieren dazu für $a_1, b_1 \in \mathcal{A}_1$ und $a_2, b_2 \in \mathcal{A}_2$

$$(a_1 \otimes a_2)(b_1 \otimes b_2) := (a_1 b_1)(a_2 b_2)$$

oder über die linearen Abbildungen ausgedrückt:

$$\mu_\otimes = \mu_1 \widetilde{\otimes} \mu_2 := (\mu_1 \otimes \mu_2) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}), \tag{2.4}$$

wobei μ_1, μ_2 die Multiplikationen der Algebren $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ bezeichnen.
Bilden wir das Tensorprodukt von endlich vielen Algebren, so müssen wir uns überzeugen, daß das Ergebnis nicht von der Reihenfolge abhängt, in der wir die Tensorprodukte bilden. Wir wissen schon, daß sie als Vektorräume übereinstimmen. Was noch fehlt, ist der Nachweis, daß die Multiplikationen übereinstimmen, also daß für drei Algebren $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ mit Multiplikationen μ_1, μ_2, μ_3 gilt:

$$(\mu_1 \widetilde{\otimes} \mu_2) \widetilde{\otimes} \mu_3 = \mu_1 \widetilde{\otimes} (\mu_2 \widetilde{\otimes} \mu_3)$$

Wir rechnen für beliebige Vektorraume $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$ und Vektoren $v_i, w_i \in \mathcal{V}_i$, $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{id}_{\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_1} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}_2} \otimes \tau_{\mathcal{V}_3, \mathcal{V}_2} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}_3}) \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{V}_1} \otimes \tau_{\mathcal{V}_2 \otimes \mathcal{V}_3, \mathcal{V}_1} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}_2 \otimes \mathcal{V}_3}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes w_1 \otimes w_2 \otimes w_3) \\
&= (\mathrm{id}_{\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_1} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}_2} \otimes \tau_{\mathcal{V}_3, \mathcal{V}_2} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}_3}) (v_1 \otimes w_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes w_2 \otimes w_3) \\
&= (v_1 \otimes w_1 \otimes v_2 \otimes w_2 \otimes v_3 \otimes w_3) \\
&= (\mathrm{id}_{\mathcal{V}_1} \otimes \tau_{\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_1} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}_2} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}_3 \otimes \mathcal{V}_3}) (v_1 \otimes v_2 \otimes w_1 \otimes w_2 \otimes v_3 \otimes w_3) \\
&= (\mathrm{id}_{\mathcal{V}_1} \otimes \tau_{\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_1} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}_2} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}_3 \otimes \mathcal{V}_3}) \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2} \otimes \tau_{\mathcal{V}_3, \mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}_3}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes w_1 \otimes w_2 \otimes w_3)\,,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{id}_{\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_1} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}_2} \otimes \tau_{\mathcal{V}_3, \mathcal{V}_2} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}_3}) \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{V}_1} \otimes \tau_{\mathcal{V}_2 \otimes \mathcal{V}_3, \mathcal{V}_1} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}_2 \otimes \mathcal{V}_3}) \\
&= (\mathrm{id}_{\mathcal{V}_1} \otimes \tau_{\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_1} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}_2} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}_3 \otimes \mathcal{V}_3}) \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2} \otimes \tau_{\mathcal{V}_3, \mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}_3})
\end{aligned} \tag{2.5}$$

und folgern induktiv, daß

$$(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n)\,(b_1 \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_n) = a_1 b_1 \otimes a_2 b_2 \otimes \cdots \otimes a_n b_n$$

für endlich viele Algebren $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ und $a_i, b_i \in \mathcal{A}_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Die vorangehende Rechnung scheint einen sehr einfachen Sachverhalt unnötig kompliziert auszudrücken. Während für Algebren die Assoziativität des Tensorproduktes in der üblichen Schreibweise als Trivialität erscheint, ist das gleiche Ergebnis für Koalgebren nicht so klar. Die gewählte Formulierung mit den Ordnungsoperatoren ist dagegen in beiden Fällen gültig und erspart uns damit im nächsten Abschnitt Arbeit.

Häufig werden wir einen Positivitätsbegriff benötigen und definieren deshalb:

Definition 2.7 (∗-Algebra, Involution, Selbstadjungiertheit, Positivität)**.** Eine ∗-*Algebra* ist$_{def}$ eine Algebra $\mathcal{A}$, die zusätzlich mit einer *Involution* genannten Abbildung $\mathcal{A} \to \mathcal{A},\ a \mapsto a^*$ ausgestattet ist, sodaß

$$
\begin{aligned}
(a + \lambda b)^* &= a^* + \overline{\lambda} b^* && \text{(d.h. }^*\text{ ist antilinear)} \\
a^{**} &= a && \text{(d.h. }^*\text{ ist selbstinvers)} \\
(ab)^* &= b^* a^* && \text{(d.h. }^*\text{ ist Antihomomorphismus)}
\end{aligned}
$$

für alle $a, b \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{C}$.
Ein Element $a \in \mathcal{A}$ heißt

- *selbstadjungiert*, falls $a = a^*$,
- *positiv*, falls ein $b \in \mathcal{A}$ existiert, mit $a = b^* b$.

Jedes positive Element ist selbstadjungiert, da

$$(b^* b)^* = b^* b^{**} = b^* b.$$

Es ist klar, was unter $*$-Homomorphismen und $*$-Idealen zu verstehen ist.

Beispiel 2.7 ($*$-Algebra der Funktionen auf einer Menge). Die in Bsp. 2.1 definierte Algebra $\mathcal{F}(M)$ wird zu einer $*$-Algebra, wenn wir

$$f^*(m) := \overline{f(m)} \qquad \forall m \in M$$

definieren.
Die selbstadjungierten Elemente sind dann die reellwertigen Funktionen, da $f(m) \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $f(m) = \overline{f(m)} = f^*(m)$.
Die positiven Elemente sind genau die im üblichen Sinne positiven Funktionen. Gelte nämlich $f = g^* g$ für ein $g \in \mathcal{F}(M)$, dann ist

$$f(m) = \overline{g(m)} g(m) = |g(m)|^2 \geq 0$$

für alle $m \in M$. Ist umgekehrt $f(m) \geq 0$ für alle $m \in M$, so setze $g(m) := \sqrt{f(m)}$ und es gilt offenbar

$$f(m) = g(m)^2 = \overline{g(m)} g(m) = (g^* g)(m),$$

also $f = g^* g$.

Beispiel 2.8 ($*$-Algebra der beschränkten linearen Operatoren auf einem Hilbertraum). Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, so bilden die beschränkten linearen

Operatoren eine $*$-Algebra. Für $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definieren wir den adjungierten Operator T^* mit Hilfe des Lemmas von Riesz:

$$\langle T^* x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

Insbesondere setzen wir für eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$

$$A^*_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

2.3 Koalgebren

In diesem Abschnitt werden Koalgebren definiert, Beispiele für Koalgebren angegeben und wir definieren die Faltung und das Faltungsexponential.*

Wir betrachten eine endlichdimensionale, unitale Algebra $\mathcal{A}$ und suchen auf dem Dualraum $\mathcal{A}' = \{\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \mid \varphi \text{ linear}\}$ nach einer natürlichen algebraischen Struktur. Wie wir wissen ist $\mathcal{A}'$ ein Vektorraum. Da $\mathcal{A}$ über eine Multiplikation verfügt, ist es naheliegend eine Abbildung $\Delta : \mathcal{A}' \to (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})'$ mittels

$$\Delta(\varphi)(a \otimes b) := \varphi(ab) \tag{2.6}$$

zu definieren. Bezeichnet μ die Multiplikation auf $\mathcal{A}$, ist also $\Delta(\varphi) = \varphi \circ \mu$. Da $\mathcal{A}$ endlichdimensional ist, gilt $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})' \cong \mathcal{A}' \otimes \mathcal{A}'$ und wir können diese Räume vermöge $(\varphi \otimes \psi)(a \otimes b) := \varphi(a)\psi(b)$ identifizieren. Damit rechnen wir nach:

$$\begin{aligned}
((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(\varphi) &= (\Delta \otimes \mathrm{id}) \underbrace{(\varphi \circ \mu)}_{\in \mathcal{A}' \otimes \mathcal{A}'} \\
&= \varphi \circ \mu \circ (\mu \otimes \mathrm{id}) \\
&= \varphi \circ \mu \circ (\mathrm{id} \otimes \mu) \quad \text{wegen der Assoziativität von } \mu \\
&= (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\varphi \circ \mu) \\
&= ((\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(\varphi)
\end{aligned}$$

Aus der Assoziativität von μ wird also die sogenannte Koassoziativität von Δ.
Man beachte, daß für diese Rechnung wichtig war, $\Delta(\varphi)$ als Element von $\mathcal{A}' \otimes \mathcal{A}'$ aufzufassen.
Da $\mathcal{A}$ unital ist, können wir auch eine Abbildung $\delta : \mathcal{A}' \to \mathbb{C}$ durch

$$\delta(\varphi) := \varphi(\mathbb{1}) \tag{2.7}$$

definieren. Bezeichnet κ die Einsabbildung und identifizieren wir $\mathbb{C}$ mit den

*Vgl. [1], [13], [17], [19]

linearen Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ vermöge $z \equiv (w \mapsto wz)$, so gilt

$$\delta(\varphi) := \varphi \circ \kappa.$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned}
((\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(\varphi) &= (\delta \otimes \mathrm{id})(\varphi \circ \mu) \\
&= \varphi \circ \mu \circ (\kappa \otimes \mathrm{id}) \\
&= \varphi & \text{wegen der Einseigenschaft} \\
&= \varphi \circ \mu \circ (\mathrm{id} \otimes \kappa) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \delta)(\varphi \circ \mu) \\
&= ((\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Delta)(\varphi).
\end{aligned}$$

Aus der Einseigenschaft wird also die sogenannte Koeinseigenschaft.

Die Rechnungen motivieren die Definition:

Definition 2.8 (Koalgebra, Komultiplikation, Koeins, Koalgebrahomomorphismus, Koideal)**.** Eine *Ko-Algebra* ist$_{def}$ ein Tripel (C, Δ, δ), wobei C ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $\Delta : C \to C \otimes C$, $\delta : C \to \mathbb{C}$ *Komultiplikation* und *Koeins* genannte lineare Abbildungen sind, sodaß

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta &= (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta & &\text{(Koassoziativität)} \\
(\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta &= (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Delta = \mathrm{id} & &\text{(Koeinseigenschaft),}
\end{aligned}$$

d.h. die beiden Diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & C \otimes C \otimes C & \\
C \otimes C \arrow[ur, "\Delta \otimes \mathrm{id}"] & & C \otimes C \arrow[ul, "\mathrm{id} \otimes \Delta"'] \\
 & C \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[ur, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}
\qquad \Bigg| \qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C} \otimes C = C = C \otimes \mathbb{C} & \\
C \otimes C \arrow[ur, "\delta \otimes \mathrm{id}"] & & C \otimes C \arrow[ul, "\mathrm{id} \otimes \delta"'] \\
 & C \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[ur, "\Delta"'] \arrow[uu, "\mathrm{id}"] &
\end{tikzcd}$$

kommutieren.

C heißt *kokommutativ*, falls

$$\Delta = \tau \circ \Delta,$$

d.h. falls das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[rr, "\tau"] & & C \otimes C \\
 & C \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[ur, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.
Sind C_1, C_2 Koalgebren mit Komultiplikationen Δ_1, Δ_2, so nennen wir eine lineare Abbildung $\Phi : C_1 \to C_2$ *Koalgebrahomomorphismus*, falls

$$(\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_1 = \Delta_2 \circ \Phi$$

Ein Unterraum I der Koalgebra C heißt *Koideal*, falls

$$\begin{aligned} \Delta(I) &\subseteq C \otimes I + I \otimes C \\ I &\subseteq \operatorname{kern} \delta. \end{aligned}$$

Das sind genau die Bedingungen, die man benötigt,um sicherstellen, daß $\widetilde{\Delta}$ und $\widetilde{\delta}$ repräsentantenweise auf C/I definiert werden können.

In einer unitalen Algebra können wir sinnvollerweise Produkte von endlich vielen Faktoren statt nur von genau zwei Faktoren betrachten. Dabei setzt man das leere Produkt als Neutralelement, das Produkt von genau einem Faktor ist die identische Abbildung und beim Produkt von $n+1$ Faktoren multipliziert man erst die ersten n und dann das Ergebnis mit dem $(n+1)$-ten Faktor.
Schreiben wir dies mit den Abbildungen μ und κ, so erhalten wir

- $\mu^{(0)} = \kappa$,
- $\mu^{(n+1)} = \mu \circ (\mu^{(n)} \otimes \mathrm{id})$.

Aufgrund der Assoziativität darf man die Faktoren beliebig klammern, d.h. in dieser Sprache

$$\mu^{(n)} = \mu^{(l)} \circ \left(\mu^{(k_1)} \otimes \cdots \otimes \mu^{(k_l)}\right)$$

für alle $n, l \in \mathbb{N}$ mit $k_i \geq 0, i = 1, \ldots, n$ und $k_1 + \cdots + k_l = n$. So wie es sinnvoll ist, Produkte von endlich vielen Faktoren zu betrachten, so ist es in einer Koalgebra sinnvoll, die Abbildungen $\Delta^{(n)} : C \to C^{\otimes n}$ zu betrachten, die induktiv definiert sind durch

- $\Delta^{(0)} := \delta$
- $\Delta^{(n+1)} := (\Delta^{(n)} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$

Es ist also insbesondere $\Delta^{(1)} = \mathrm{id}$ und $\Delta^{(2)} = \Delta$ (Man vergleiche dies mit entsprechenden Gleichungen für die Multiplikation in einer Algebra). Aus der Koassoziativität und Koeinseigenschaft folgt, daß

$$\Delta^{(n)} = \left(\Delta^{(k_1)} \otimes \cdots \otimes \Delta^{(k_l)}\right) \circ \Delta^{(l)}$$

für alle $n, l \in \mathbb{N}$ mit $k_i \geq 0, i = 1, \ldots, n$ und $k_1 + \cdots + k_l = n$. Insbesondere folgt hieraus

$$(\mathrm{id}_k \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}_{n-1-k}) \circ \Delta^{(n)} = \Delta^{(n+1)} \tag{2.8}$$
$$(\mathrm{id}_k \otimes \delta \otimes \mathrm{id}_{n-1-k}) \circ \Delta^{(n)} = \Delta^{(n-1)} \tag{2.9}$$

für $n \geq 1, k = 0, \ldots, n-1$. Dabei bezeichnet id_n die identische Abbildung auf $C^{\otimes n}$, $C^{\otimes 0} := \mathbb{C}$.
Bei einigen Rechnungen ist die sogenannte *Sweedler-Notation* sehr hilfreich. Da $\Delta^{(n)}(c) \in C^{\otimes n}$, hat es nach (2.1) eine Darstellung als Summe reiner Tensoren. Für $\Delta^{(n)}(c)$ schreiben wir $\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes \cdots \otimes c_{(n)}$ oder einfach $c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes \cdots \otimes c_{(n)}$. (2.8) und (2.9) werden zu

$$\begin{aligned} c_{(1)} \otimes \cdots \otimes c_{(k-1)} \otimes \Delta(c_{(k)}) \otimes c_{(k+1)} \otimes \cdots \otimes c_{(n)} &= c_{(1)} \otimes \cdots \otimes c_{(n+1)} \\ \delta(c_{(k)}) c_{(1)} \otimes \cdots \otimes c_{(k-1)} \otimes c_{(k+1)} \otimes \cdots \otimes c_{(n+1)} &= c_{(1)} \otimes \cdots \otimes c_{(n)}, \end{aligned}$$

wobei $n \geq 1$.
Wie bei Algebren, fassen wir auch das Tensorprodukt zweier Koalgebren C_1, C_2 mit Komultiplikationen Δ_1, Δ_2 und Koeinheiten δ_1, δ_2 wieder als Koalgebra auf, wobei wir

$$\begin{aligned} \Delta_\otimes &= \Delta_1 \widetilde{\otimes} \Delta_2 := (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta_1 \otimes \Delta_2) \\ \delta_\otimes &= \delta_1 \widetilde{\otimes} \delta_2 := \delta_1 \otimes \delta_2 \end{aligned}$$

setzen. Sind die beiden Koalgebren gleich, so schreiben wir auch Λ für die Komultiplikation des Tensorproduktes.
Wir rechnen die Koassoziativität und die Koeinseigenschaft nach und benutzen dabei die Sweedler Notation:

$$\begin{aligned} ((\Delta_\otimes \otimes \mathrm{id}_2) \circ \Delta_\otimes)(c \otimes d) &= (\Delta_\otimes \otimes \mathrm{id}_2)(c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)}) \\ &= c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)} \otimes c_{(3)} \otimes d_{(3)} \\ &= (c_{(1)} \otimes d_{(1)}) \otimes \Delta_\otimes(c_{(2)} \otimes d_{(2)}) \\ &= ((\mathrm{id}_2 \otimes \Delta_\otimes) \circ \Delta_\otimes)(c \otimes d) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} ((\delta_\otimes \otimes \mathrm{id}_2) \circ \Delta_\otimes)(c \otimes d) &= (\delta_\otimes \otimes \mathrm{id}_2)(c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)}) \\ &= \delta_1(c_{(1)}) \delta_2(d_{(1)}) c_{(2)} \otimes d_{(2)} \\ &= c \otimes d \\ &= \delta_1(c_{(2)}) \delta_2(d_{(2)}) c_{(1)} \otimes d_{(1)} \\ &= (\mathrm{id}_2 \otimes \delta_\otimes)(c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)}) \\ &= ((\mathrm{id}_2 \otimes \delta_\otimes) \circ \Delta_\otimes)(c \otimes d) \end{aligned}$$

für alle $c \in C_1,\ d \in C_2$.

An dieser Stelle ist noch festzustellen, daß die Bildung von Tensorprodukten mehrerer Koalgebren assoziativ ist, in dem Sinne, daß die Identifizierung von $C \otimes D \otimes E$ mit $(C \otimes D) \otimes E$ und $C \otimes (D \otimes E)$ mit der Koalgebrastruktur verträglich ist. Das folgt aber direkt aus (2.5).

Beispiel 2.9 (Koalgebra der Funktionen auf einer endlichen Halbgruppe). Sei H eine endliche Halbgruppe mit Neutralelement e. Dann ist $\mathcal{F}(H \times H) \equiv \mathcal{F}(H) \otimes \mathcal{F}(H)$. Wir identifizieren $f \otimes g \in \mathcal{F}(H) \otimes \mathcal{F}(H)$ mit der Abbildung $(x, y) \mapsto f(x)\, g(y)$. Setzen wir nun für $x, y \in H$, $f \in \mathcal{F}(H)$

- $\Delta(f)(x, y) := f(xy)$,
- $\delta(f) := f(e)$,

so erhalten wir eine Koalgebra.
Da nämlich H eine Basis von $\mathbb{C}H$ ist, ist $\mathcal{F}(H) \equiv (\mathbb{C}H)'$. Die Definition von Komultiplikation und Koeins entspricht damit (2.6) und (2.7). Wir haben also Koassoziativität und Koeinseigenschaft bereits nachgerechnet.
Offenbar ist $\mathcal{F}(H)$ genau dann kokommutativ, wenn H kommutativ ist.

Beispiel 2.10 (Halbgruppen-Koalgebra). Sei H eine Halbgruppe. Wir definieren für $x \in H$

- $\Delta(x) := x \otimes x$
- $\delta(x) := 1$

und setzen Δ und δ als lineare Abbildungen auf $\mathbb{C}H$ fort. Dann ist $(\mathbb{C}H, \Delta, \delta)$ eine Koalgebra. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(x) &= (\Delta \otimes \mathrm{id})(x \otimes x) \\
&= x \otimes x \otimes x \\
&= x \otimes \Delta(x) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \Delta)(x \otimes x) \\
&= ((\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(x)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
((\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(x) &= (\delta \otimes x)(x \otimes x) \\
&= \delta(x) x \\
&= x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x\delta(x) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \delta)(x \otimes x) \\
&= ((\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Delta)(x).
\end{aligned}$$

Man beachte, daß, falls H endlich ist und wir $\mathbb{C}(H)$ als Dualraum von $(\mathbb{C}H)'$ auffassen, Komultiplikation und Koeins wieder (2.6) und (2.7) entsprechen. Schreiben wir nämlich $x(f) := f(x)$, so erhalten wir

$$\Delta(x)(f \otimes g) = x(fg) = fg(x) = f(x)g(x) = x(f)x(g) = (x \otimes x)(f \otimes g)$$

und

$$\delta(x) = x(\mathbb{1}) = \mathbb{1}(x) = 1.$$

Beispiel 2.11 (Matrix-Koalgebra). Auch das Matrixprodukt liefert ein Beispiel für eine Koalgebra. Aus der Polynomalgebra in d^2 Variablen $\mathbb{C}\left[x_{kl}; k, l = 1, \ldots, d\right]$ wird eine Koalgebra, indem wir

$$\begin{aligned}
\Delta(x_{kl}) &:= \sum_{i=1}^{d} x_{ki} \otimes x_{il} \\
\delta(x_{kl}) &:= \delta_{kl}
\end{aligned}$$

definieren und diese Abbildungen als Algebrahomomorphismen auf $\mathbb{C}\left[x_{kl}; k, l = 1, \ldots, d\right]$ fortsetzen.

Wir müßten nun Koassoziativität und Koeinseigenschaft nachweisen. Betrachten wir die x_{kl} allerdings als die Koordinatenfunktionen $x_{kl} : M_d \to \mathbb{C}$, $x_{kl}\big((a_{ij})_{i,j=1,\ldots,d}\big) = a_{kl}$, so sehen wir, daß der von den x_{kl} erzeugte Vektorraum gerade der Dualraum der endlichdimensionalen Algebra M_d der $d \times d$ Matrizen ist. Die Definitionen von Koprodukt und Koeins sind dann gerade dual zur Matrixmultiplikation und Einheitsmatrix. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned}
x_{kl}(AB) = (AB)_{kl} = \sum_{i=1}^{d} a_{ki} b_{il} &= \sum_{i=1}^{d} x_{ki}(A) x_{il}(B) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{d} x_{ki} \otimes x_{il} \right) (A \otimes B)
\end{aligned}$$

und

$$x_{kl}(E) = \delta_{kl}.$$

Damit folgen Koassoziativität und Koeinseigenschaft aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation und der Einseigenschaft der Einheitsmatrix.

Wir haben zu Beginn dieses Abschnittes gesehen, daß der Dualraum einer endlichdimensionalen Algebra eine Koalgebra ist. Der Dualraum einer Koalgebra ist stets eine Algebra. Wir definieren:

Definition 2.9 (Faltung)**.** Seien C eine Koalgebra mit Komultiplikation Δ und $\mathcal{A}$ eine Algebra mit Multiplikation μ. Dann definieren wir für lineare Abbildungen $\Phi, \Psi : C \to \mathcal{A}$ die *Faltung*

$$\Phi \star \Psi := \mu \circ (\Phi \otimes \Psi) \circ \Delta.$$

Insbesondere gilt für $\varphi, \psi \in C'$

$$\varphi \star \psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta.$$

Satz 2.3 (Faltungsalgebra)**.** *Sei (C, Δ, δ) eine Koalgebra und $(\mathcal{A}, \mu, \kappa)$ eine unitale Algebra. Dann ist $\mathbf{L}(C, \mathcal{A})$, der Raum der linearen Abbildungen von C nach $\mathcal{A}$, mit der Multiplikationsabbildung $\star$ eine unitale Algebra und $\kappa \circ \delta$ das neutrale Element.*
Insbesondere erhalten wir für $\mathcal{A} = \mathbb{C}$, daß C' eine unitale Algebra mit Neutralelement δ ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Assoziativität von $\star$.
Dazu schreiben wir vorübergehend

$$m(\Phi \otimes \Psi) := \Phi \star \Psi \quad \text{für } \Phi, \Psi \in \mathbf{L}(C, \mathcal{A}),$$

also $m(R) = \mu \circ R \circ \Delta$ für $R \in \mathbf{L}(C, \mathcal{A}) \otimes \mathbf{L}(C, \mathcal{A})$. Sei $H \in (\mathbf{L}(C, \mathcal{A}))^{\otimes 3}$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}(m \circ (m \otimes \mathrm{id}))(H) &= m((\mu \otimes \mathrm{id}) \circ H \circ (\Delta \otimes \mathrm{id})) \\ &= \mu \circ (\mu \otimes \mathrm{id}) \circ H \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \\ &= \mu \circ (\mathrm{id} \otimes \mu) \circ H \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta \\ &= m((\mathrm{id} \otimes \mu) \circ H \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta)) \\ &= (m \circ (\mathrm{id} \otimes m))(H).\end{aligned}$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß $(\kappa \circ \delta) \star \Phi = \Phi = \Phi \star (\kappa \circ \delta)$ für alle $\Phi \in \mathbf{L}(C, \mathcal{A})$.

Wir rechnen

$$\begin{aligned}(\kappa \circ \delta) \star \Phi &= \mu \circ ((\kappa \circ \delta) \otimes \Phi) \circ \Delta \\ &= \mu \circ (\kappa \otimes \mathrm{id}) \circ \Phi \circ (\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \\ &= \Phi \\ &= \mu \circ (\mathrm{id} \otimes \kappa) \circ \Phi \circ (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Delta \\ &= \mu \circ (\Phi \otimes (\kappa \circ \delta)) \circ \Delta \\ &= \Phi \star (\kappa \circ \delta).\end{aligned}$$

Für $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ ist $\mu = \kappa = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, wobei wieder $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ mit $\mathbb{C}$ identifiziert wird. Damit ist die Behauptung für $C' = \mathbf{L}(C, \mathbb{C})$ klar. □

Definition 2.10 (Faltungsexponential)**.** Sei C eine Koalgebra und $\varphi \in C'$ ein lineares Funktional. Dann definieren wir das *Faltungsexponential* von φ als

$$e_\star^\varphi := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{\star k}}{k!},$$

wobei die Konvergenz punktweise zu verstehen ist. Natürlich ist $\varphi^{\star 0} = \delta$ als Neutralelement der Faltungsalgebra zu verstehen.

Satz 2.4 (Konvergenz des Faltungsexponentials)**.** *Das Faltungsexponential*

$$e_\star^\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{\star k}(c)}{k!}$$

konvergiert für alle $\varphi \in C'$ und alle $c \in C$. Es gilt

$$\varphi \star \psi = \psi \star \varphi \quad \Rightarrow \quad e_\star^\varphi \star e_\star^\psi = e_\star^{\varphi+\psi}, \tag{2.10}$$

also insbesondere $e_\star^{s\psi} \star e_\star^{t\psi} = e_\star^{(s+t)\psi}$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$. Außerdem ist $e_\star^0 = \delta$.

Für den Beweis benötigen wir den

Satz 2.5 (Fundamentalsatz für Koalgebren)**.** *Sei C eine Koalgebra. Dann ist jeder endlichdimensionale Untervektorraum von C in einer endlichdimensionalen Unterkoalgebra enthalten.*

Dabei ist eine Unterkoalgebra ein Untervektorraum $U \subseteq C$, für den $\Delta U \subseteq U \otimes U$ ist. Einen Beweis findet man in [17] Theorem 4.4.2 oder [1] Corollary 2.2.14.

Beweis von Satz 2.4. Ist allgemein D ein endlichdimensionaler Vektorraum, so existiert ein Skalarprodukt, das aus D einen endlichdimensionalen Hilbertraum macht. Dann ist jede lineare Abbildung l von D in einen beliebigen normierten Vektorraum $\mathcal{V}$ beschränkt, d.h. es existiert

$$||l|| = \inf \{\alpha > 0 : ||l(d)|| \leq \alpha \, ||d|| \;\; \forall d \in D\} .$$

Mit D ist natürlich auch $D^{\otimes k}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein endlichdimensionaler Hilbertraum.
Sei nun $c \in C$ und $\psi \in C'$. Es bezeichne

- C_c eine endlichdimensionale Unterkoalgebra von C, die c enthält (eine solche Unterkoalgebra existiert nach dem Fundamentalsatz für Koalgebren 2.5),
- $\psi_c = \psi|_{C_c}$ die Einschränkung von ψ auf C_c und
- $\Delta_c = \Delta|_{C_c}$ die Einschränkung von Δ auf C_c.

Dann gilt

$$\left|\left|\psi_c^{\otimes k}\right|\right| \leq \left|\left|\psi\right|\right|^k \quad \text{und} \quad \left|\left|\Delta_c^{(k)}\right|\right| \leq \left|\left|\Delta_c\right|\right|^{k-1}.$$

Die erste Gleichung folgt direkt daraus, daß $||A \otimes B|| \leq ||A|| \, ||B||$ für beschränkte lineare Abbildungen A, B. Für die zweite Gleichung benutzen wir zusätzlich $||A \circ B|| \leq ||A|| \, ||B||$ und $||\mathrm{id}|| = 1$. Schließlich sehen wir, daß

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\psi_c^{\star k}}{k!}(c)\right| \leq \frac{1}{||\Delta_c||} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{||\psi_c||^k \, ||\Delta_c||^k}{k!} \, ||c|| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

als Rest einer konvergenten Reihe.
Man zeigt (2.10) wie bei der gewöhnlichen Exponentialfunktion, die beiden übrigen Gleichungen sind trivial. □

2.4 Bialgebren

Wir geben zunächst die Definition einer Bialgebra und anschließend einige Beispiele. Insbesondere das erste Beispiel zeigt, inwiefern der Begriff der Bialgebra den Begriff der Halbgruppe verallgemeinert.*

Definition 2.11 (Bialgebra, $*$-Bialgebra, Bialgebrahomomorphismus, Biideal)**.** Ein 5-Tupel $(B, \mu, \kappa, \Delta, \delta)$ heißt *Bialgebra*, falls gilt:

*Vgl. [1], [13], [17], [19]

- (B, μ, κ) ist eine unitale Algebra,
- (B, Δ, δ) ist eine Koalgebra,
- Δ, δ sind Algebrahomomorphismen.

Eine Bialgebra heißt $*$-*Bialgebra*, falls sie über eine Involution verfügt und Δ und δ sogar $*$-Algebrahomomorphismen sind.
($*$-)Bialgebrahomomorphismen sind Abbildungen, die sowohl ($*$-)Algebra- als auch ($*$-)Koalgebrahomomorphismen sind.
($*$-)Biideale sind Unterräume, die sowohl ($*$-)Ideale als auch ($*$-)Koideale sind.

In der dritten Bedingung ist $B \otimes B$ als Algebra mit Multiplikation gemäß (2.4) aufzufassen. Die Bedingung bedeutet ausgeschrieben:

$$\Delta \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta) \tag{2.11}$$
$$\delta \circ \mu = \delta \otimes \delta \tag{2.12}$$

Beispiel 2.12 (Bialgebra der Funktionen auf einer endlichen Halbgruppe). Sei H eine endliche Halbgruppe. Dann ist $\mathcal{F}(H)$ nach Bsp.2.1 eine Algebra und nach Bsp.2.9 eine Koalgebra. Aber Δ und δ sind auch Algebrahomomorphismen, da für beliebige $f, g \in \mathcal{F}(H)$

$$\Delta(fg)(x,y) = fg(xy) = f(xy)\,g(xy) = \Delta f(x,y)\,\Delta g(x,y) = (\Delta f\,\Delta g)(x,y)$$

und

$$\delta(fg) = fg(e) = f(e)\,g(e) = \delta f\,\delta g.$$

Also ist $\mathcal{F}(H)$ eine Bialgebra.

Beispiel 2.13 (Halbgruppen-Bialgebra). Sei H eine Halbgruppe. Dann ist $\mathbb{C}H$ nach Bsp. 2.3 eine Algebra und nach Bsp. 2.10 eine Koalgebra. Wir sehen, daß Δ und δ Algebrahomomorphismen sind, da für alle $x, y \in H$

$$\Delta(xy) = xy \otimes xy = (x \otimes x)(y \otimes y)$$

und

$$\delta(xy) = 1 = 1 \cdot 1 = \delta(x)\delta(y).$$

Also ist $\mathbb{C}H$ tatsächlich eine Bialgebra.
Ist H eine involutive Halbgruppe, d.h. auf H ist zusätzlich zur Halbgruppenstruktur eine Abbildung $x \mapsto x^* : H \to H$ mit $x^{**} = x$ und $(xy)^* = y^* x^*$

für alle $x \in H$ gegeben, so können wir diese Abbildung antilinear zu einer Involution auf $\mathbb{C}H$ fortsetzen. Wir erhalten dann offenbar eine $*$-Algebra. Ist $H = G$ eine Gruppe, so definiert $g^* := g^{-1}$ eine Involution. Ist nichts weiter gesagt, so ist diese Involution gemeint.

Beispiel 2.14 (Universelle Einhüllende Bialgebra). Sei $U(\mathfrak{L})$ die universelle Einhüllende Algebra der Lie-Algebra $\mathfrak{L}$. Dann definieren wir lineare Abbildungen $\Delta : \mathfrak{L} \to U(\mathfrak{L}) \otimes U(\mathfrak{L})$ und $\delta : \mathfrak{L} \to \mathbb{C}$ durch

$$\begin{aligned} \Delta x &:= x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x, \\ \delta x &:= 0. \end{aligned}$$

Wir wollen diese auf $U(\mathfrak{L})$ fortsetzen und müssen daher (2.3) nachrechnen:

$$\begin{aligned} &[\Delta x, \Delta y] \\ =& [x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x, y \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes y] \\ =& [x \otimes \mathbf{1}, y \otimes \mathbf{1}] + [\mathbf{1} \otimes x, \mathbf{1} \otimes y] + \underbrace{[x \otimes \mathbf{1}, \mathbf{1} \otimes y]}_{=0} + \underbrace{[\mathbf{1} \otimes x, y \otimes \mathbf{1}]}_{=0} \\ =&(x \otimes y) \otimes \mathbf{1} - (y \otimes x) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes (x \otimes y) - \mathbf{1} \otimes (y \otimes x) \\ =& [x, y] \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes [x, y] \\ =& \Delta\, [x, y]\,. \end{aligned}$$

Für δ ist nichts zu zeigen.
Damit gibt es eindeutig bestimmte Fortsetzungen als Algebrahomomorphismen auf $U(\mathfrak{L})$, die wir wieder mit Δ und δ bezeichnen.
Wir wollen zeigen, daß $U(\mathfrak{L})$ mit diesen Abbildungen zu einer Bialgebra wird. Wir rechnen

$$\begin{aligned} ((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(x) =& (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta x) \\ =& (\Delta \otimes \mathrm{id})(x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x) \\ =& \Delta x \otimes \mathbf{1} + \Delta \mathbf{1} \otimes x \\ =& x \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes x \\ =& x \otimes \Delta \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \Delta x \\ =& (\mathrm{id} \otimes \Delta)(x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x) \\ =& (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta x) \\ =& ((\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(\delta \otimes \mathrm{id})(\Delta x) &= (\delta \otimes \mathrm{id})(x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x) \\ &= \delta(x) \otimes \mathbf{1} + \delta(\mathbf{1}) \otimes x \\ &= x \\ &= (\mathrm{id} \otimes \delta)(\Delta x)\end{aligned}$$

und erhalten die Koassoziativität und Koeinseigenschaft.
Verfügt $\mathfrak{L}$ über eine Involution, d.h. eine antilineare, selbstinverse Abbildung $x \mapsto x^*$ mit

$$[x, y]^* = [y^*, x^*] \quad \forall x, y \in \mathfrak{L},$$

so können wir diese antilinear auf $U(\mathfrak{L})$ fortsetzen. Wir erhalten dann eine $*$-Bialgebra.
Wir untersuchen noch den Fall, daß $\mathfrak{L}$ abelsch ist, d.h. $[x, y] = 0$ für alle $x, y \in \mathfrak{L}$. Wir erhalten dann für $U(\mathfrak{L})$ die sogenannte symmetrische Tensoralgebra. Ist $\mathfrak{L}$ endlichdimensional und $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis, so ist $U(\mathfrak{L})$ isomorph zur Polynomalgebra $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ in den kommutierenden Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$. Wir betrachten $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ im folgenden stets als $*$-Bialgebra mit $x_i^* = x_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Schließlich definieren wir noch:

Definition 2.12 (Hopf-Algebra, Antipode, $*$-Hopf-Algebra)**.** Eine Bialgebra B zusammen mit einer linearen Abbildung $S : B \to B$ heißt *Hopf-Algebra*, falls

$$\mu \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \mu \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta = \kappa \circ \delta$$

S heißt dann *Antipode* oder auch *Koinverse*. Eine $*$-Bialgebra mit Antipode S heißt *$*$-Hopf-Algebra*, falls S invertierbar ist und

$$S^{-1}(a) = S(a^*)^* \qquad \forall a \in B.$$

Beispiel 2.15 (Hopf-Algebra der Funktionen auf einer endlichen Gruppe). Sei G eine endliche Gruppe. Dann ist $\mathcal{F}(G)$, wie wir bereits wissen, eine Bialgebra. Tatsächlich wird $\mathcal{F}(G)$ zu einer Hopf-Algebra, wenn wir

$$S(f)(x) := f(x^{-1})$$

setzen. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
(\mu \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta)(f)(x) &= \mu\left(f_{(1)} \otimes S(f_{(2)})\right)(x) \\
&= f_{(1)}(x)\ f_{(2)}(x^{-1}) \\
&= \Delta f(x, x^{-1}) \\
&= f(xx^{-1}) = f(e) \\
&= \delta(f)\mathbb{1}(x) \\
&= (\kappa \circ \delta)(f)(x) \\
&= (\mu \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(f)(x).
\end{aligned}$$

Beispiel 2.16 (Universelle Einhüllende Hopf-Algebra). Auch die universelle Einhüllende $U(\mathfrak{L})$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{L}$ trägt die Struktur einer Hopf-Algebra. Wir definieren $S : \mathfrak{L} \to U(\mathfrak{L})$ durch

$$S(x) := -x \quad \text{für } x \in \mathfrak{L}$$

S erfüllt nicht (2.3). Wir müssen daher etwas vorsichtiger sein beim Fortsetzen. Zunächst können wir S als Antialgebrahomomorphismus auf $\mathfrak{T}(\mathfrak{L})$ fortsetzen, d.h. wir definieren

$$S(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) := S(x_n) \otimes \cdots \otimes S(x_1)$$

und setzen dann linear fort. Wir beobachten, daß S das von Elementen der Form $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ erzeugte Ideal N (siehe Bsp 2.6) auf Null abbildet:

$$S(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = y \otimes x - x \otimes y + [x, y] = 0.$$

Damit können wir S repräsentantenweise auf $U(\mathfrak{L}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{L})/N$ definieren. Um zu zeigen, daß S eine Antipode ist, rechnen wir

$$\begin{aligned}
(\mu \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(x) &= (\mu \circ (S \otimes \mathrm{id})(x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x) \\
&= \mu(-x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x) \\
&= -x + x = 0 = \kappa(\delta x) \\
&= (\mu \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta)(x)
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathfrak{L}$.

Die bisherigen Beispiele waren alle kommutativ oder kokommutativ. Wir arbeiten nun auf ein Beispiel einer weder kommutativen, noch kokommutativen Bialgebra hin.

Beispiel 2.17 (Matrix $*$-Bialgebra $\mathcal{M}_d$ und Koeffizientenalgebra der unitären Gruppe U_d). Die Polynomalgebra $\mathbb{C}[x_{kl}]$ ist gemäß Bsp. 2.11 auch eine Koalgebra. Die Komultiplikation und die Koeins wurden dort auf den Generatoren definiert und als Homomorphismen fortgesetzt. Also haben wir offenbar ein Beispiel für eine Bialgebra. Wir erhalten mit der gleichen Konstruktion eine $*$-Bialgebra, wenn wir die Komultiplikation und Koeins als $*$-Homomorphismen auf die Polynomalgebra $\mathbb{C}[x_{kl}, x_{kl}^*]$ fortsetzen. Die Algebra ist offenbar kommutativ. Wir nennen sie Matrix $*$-Bialgebra und bezeichnen sie mit $\mathcal{M}_d$.
Die Elemente der Form

$$\sum_{i=1}^{d} x_{ki}x_{li}^* - \delta_{kl} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{d} x_{ik}^* x_{il} - \delta_{kl}$$

erzeugen ein $*$-Ideal I in $\mathbb{C}[x_{kl}, x_{kl}^*]$. Wir setzen $\mathcal{U}_d := \mathbb{C}[x_{kl}, x_{kl}^*]/I$. Damit $\mathcal{U}_d$ wieder eine Bialgebra ist, muß I auch ein Koideal sein, d.h. es müssen $\Delta I \subseteq B \otimes I + I \otimes B$ und $I \subseteq \operatorname{kern} \delta$ gelten. Wie wir in Def. 2.8 erwähnt haben, sind das genau die Bedingungen, die man braucht, damit Δ und δ auf $\mathcal{U}_d$ vermöge

$$\begin{aligned} \Delta(a + I) &:= (a_{(1)} + I) \otimes (a_{(2)} + I) \\ \delta(a + I) &:= \delta(a) \end{aligned}$$

wohldefiniert sind. Um nun zu zeigen, daß I tatsächlich ein Koideal ist, rechnen wir

$$\begin{aligned} \Delta(\sum_i x_{ki}x_{li}^* - \delta_{kl}) &= \sum_{i,r,s} (x_{kr} \otimes x_{ri})(x_{ls}^* \otimes x_{si}^*) - \delta_{kl} \otimes \delta_{kl} \\ &= \sum_{i,r,s} x_{kr}x_{ls}^* \otimes x_{ri}x_{si}^* - \delta_{kl} \otimes \delta_{kl} \\ &= \sum_{r,s} x_{kr}x_{ls}^* \otimes (\sum_i x_{ri}x_{si}^* - \delta_{rs} + \delta_{rs}) - \delta_{kl} \otimes \delta_{kl} \\ &= \sum_{r,s} x_{kr}x_{ls}^* \otimes (\sum_i x_{ri}x_{si}^* - \delta_{rs}) + \sum_{r,s} x_{kr}x_{ls}^* \otimes \delta_{rs} - \delta_{kl} \otimes \mathbb{1} \\ &= \underbrace{\sum_{r,s} x_{kr}x_{ls}^* \otimes (\sum_i x_{ri}x_{si}^* - \delta_{rs})}_{\in B \otimes I} + \underbrace{\sum_{r} x_{kr}x_{lr}^* \otimes \mathbb{1} - \delta_{kl} \otimes \mathbb{1}}_{\in I \otimes B}. \end{aligned}$$

Daß auch $\Delta(\sum_{i=1}^n x_{ik}^* x_{il} - \delta_{kl}) \in I \otimes B + B \otimes I$, folgt analog und $I \subseteq \operatorname{kern} \delta$

ist offensichtlich.
$\mathcal{U}_d$ ist auch eine Hopfalgebra. Die Antipode ist auf den Generatoren durch $S(x_{kr}) = x_{rk}^*$ festgelegt.
In [9] zeigen Glockner und Waldenfels, daß $\mathcal{U}_n$ tatsächlich isomorph zu der von den Koeffizientenfunktionen $\xi_{kl} : U(\mathbb{C}^d) \to \mathbb{C}$ der unitären Gruppe erzeugten Algebra ist.

Beispiel 2.18 (Freie Matrix $*$-Bialgebra $\mathcal{M}_d^f$ und nichtkommutative Koeffizientenalgebra der unitären Gruppe $\mathcal{U}_d^f$). Wir erhalten ein nichtkommutatives Analogon des vorherigen Beispiels, wenn wir die von $x_{kl}, k, l = 1, \ldots, d$ erzeugte freie (nichtkommutative) unitale $*$-Algebra $\mathcal{M}_d^f := \mathbb{C}\langle x_{kl}, x_{kl}^* \rangle$ betrachten und wieder das Koprodukt und die Koeins gemäß Bsp.2.11, also die dualen Operationen zur Matrixmultiplikation, als $*$-Algebrahomomorphismen fortsetzen. Wir nennen $\mathcal{M}_d^f$ auch freie Matrix $*$-Bialgebra. Genau wie im vorigen Beispiel dividieren wir durch die Unitaritätsrelationen und erhalten die $*$-Bialgebra $\mathcal{U}_d^f := \mathbb{C}\langle x_{kl}, x_{kl}^* \rangle / I$, die wir auch nichtkommutative Koeffizientenalgebra der unitären Gruppe nennen.
Dies ist ein Beispiel für eine Bialgebra, die keine Hopf-Algebra ist (vgl. [5], Kapitel 2 Abschnitt 1).
Ist $\mathcal{H}$ ein unendlichdimensionaler, separabler Hilbertraum, dann läßt sich ein unitärer Operator U auf $\mathcal{C}^d \otimes \mathcal{H}$ als $d \times d$-Matrix $(U_{kl})_{kl}$ auffassen, deren Eingänge U_{kl} beschränkte Operatoren auf $\mathcal{H}$ sind. Glockner und Waldenfels haben in [9] gezeigt, daß die von den Funktionen $U \mapsto U_{kl}$ erzeugte Algebra isomorph zu $\mathcal{U}_d^f$ ist.

Kapitel 3

Deformationen von Bialgebren

Die hier betrachteten Deformationen sind die von Wirth in [20] eingeführten „additiven Deformationen von Bialgebren“. Dabei wird die Multiplikation μ durch eine ganze Familie von Multiplikationen μ_t ersetzt. Sie sind Deformationen der Algebra $(B, \mu, \mathbb{1})$ im Sinne der Gerstenhaber Deformationstheorie [8], insbesondere ist stets $(B, \mu_t, \mathbb{1})$ wieder eine Algebra, allerdings gibt es keine entsprechende Deformation des Koproduktes und $(B, \mu_t, \mathbb{1}, \Delta, \delta)$ ist im allgemeinen keine Bialgebra, sondern Δ ist ein Homomorphismus von (B, μ_{t+s}) nach $(B, \mu_t) \otimes (B, \mu_s)$.
Im Abschnitt 3.1 werden wir die Hochschild-Kohomologie einführen. Die Erzeugenden unserer Deformationen sind 2-Kozyklen in dieser Kohomologie*. Die hier auftretenden Generatoren haben allerdings die zusätzliche Eigenschaft, unter der Faltung mit der Multiplikation zu vertauschen. Wir definieren also eine Kohomologie, die dies berücksichtigt, indem von den Koketten verlangt wird, daß sie ebenfalls vertauschen, um wieder eine Entsprechung der infinitesimalen Deformationen mit den Kozyklen zu haben.
Im Abschnitt 3.2 führen wir dann den Begriff der additiven Deformation nach [20] ein und folgen im wesentlichen Wirths Beweis, daß diese Deformationen gerade von normierten, kommutierenden Kozyklen erzeugt werden. Außerdem zeigen wir, daß den Korändern der neu eingeführten Kohomologie triviale Deformationen entsprechen, in dem Sinne, daß die auftretenden Algebren (B, μ_t) dann alle in kanonischer Weise isomorph sind.

3.1 Hochschild-Kohomologie

Wir führen zunächst kohomologische Grundbegriffe ein. Wir wollen dann die Kohomologie von Bialgebren betrachten. Jede Bialgebra ist insbesondere eine Algebra, weshalb wir zunächst die Hochschild-Kohomologie für Algebren einführen. Anschließend definieren wir eine Kohomologie, die die gegebene Situation noch besser erfaßt, wie wir besonders deutlich in Abschnitt 3.3 sehen werden.

*Vgl. [7], [8] und [20]

Definition 3.1 (Kokettenkomplex; Koketten, Kozyklen, Koränder; Kohomologien)**.** Ein *Kokettenkomplex* besteht aus einer Folge von Vektorräumen $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Abbildungen $\partial_n : C_n \to C_{n+1}$, genannt *Korand-Operatoren*, sodaß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\partial_{n+1} \circ \partial_n = 0$$

Die Elemente von

- C_n heißen *(n)-Koketten* (C wie chain),
- $Z_n := \operatorname{kern} \partial_n$ heißen *(n)-Kozyklen* (Z wie Zyklus),
- $B_n := \operatorname{bild} \partial_{n-1}$ heißen *(n)-Koränder* (B wie boundary).

Die Bedingung über die Korandoperatoren besagt dann gerade, daß alle Koränder insbesondere Kozyklen sind.
Außerdem definieren wir

$$\partial : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$$
$$\partial f = \partial_n f \text{ für } f \in C_n.$$

Wir setzen noch

$$H_n := Z_n/B_n \quad (H \text{ wie Homologie})$$

und nennen den Vektorraum H_n n-te Kohomologie. Ist $H_n = \{0\}$, so heißt das offenbar, daß alle Kozyklen auch Koränder sind.

Bevor wir die Hochschild-Kohomologie definieren können, benötigen wir den Begriff des Moduls:

Definition 3.2 (Wirkung, Modul)**.** Seien $\mathcal{A}$ eine Algebra, M ein Vektorraum. Dann heißt eine bilineare Abbildung

$$\mathcal{A} \times M \to M,\ (a, m) \mapsto a.m$$

$\mathcal{A}$-*Linkswirkung* oder kurz *Linkswirkung*, wenn klar ist um welche Algebra es geht, falls

$$(ab).m = a.(b.m) \quad \forall a, b \in \mathcal{A}, m \in M.$$

M heißt dann *($\mathcal{A}$-)Linksmodul*. Entsprechend ist eine *($\mathcal{A}$-)Rechtwirkung* eine bilinearen Abbildung

$$M \times \mathcal{A} \to M,\ (m, a) \mapsto m.a$$

mit

$$m.(ab) = (m.a).b \quad \forall a, b \in \mathcal{A}, m \in M$$

und M heißt dann *($\mathcal{A}$-)Rechtsmodul*. Sind auf M sowohl eine Linkswirkung, als auch eine Rechtswirkung definiert, so heißt M ein *($\mathcal{A}$-)Bimodul*.

Man beachte, daß Linksmoduln und Darstellungen das gleiche sind. Ist π eine Darstellung von $\mathcal{A}$ auf M, d.h. ein Homomorphismus $\pi : \mathcal{A} \to \operatorname{End} M$, so wird durch

$$a.m := \pi(a)(m) \tag{3.1}$$

eine Linkswirkung auf M definiert und umgekehrt definiert eine Linkswirkung auch eine Darstellung, indem wir (3.1) andersherum lesen. Genauso entspricht eine Rechtswirkung einer linearen Abbildung $\sigma : \mathcal{A} \to \operatorname{End} M$, für die

$$\sigma(ab) = \sigma(b)\sigma(a) \quad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Wir nennen σ eine Antidarstellung.

Definition 3.3 (Hochschild-Kohomologie)**.** Sei M ein $\mathcal{A}$-Bimodul. Wir setzen

$$C_n(B, M) := \left\{ f : \mathcal{A}^{\otimes n} \to M \;\middle|\; f \text{ linear} \right\}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $C_0(B, M) \cong M$.
Wir definieren die Korandoperatoren $\partial_n : C_n(B, M) \to C_{n+1}(B, M)$ durch

$$\begin{aligned}(\partial_n f)(a_1, \ldots, a_{n+a}) := a_1.f(a_2, \ldots, a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \; f(a_1, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_{n+1}) \\ + (-1)^{n+1} \; f(a_1, \ldots, a_n).a_{n+1}\end{aligned} \tag{3.2}$$

für $n > 0$ und

$$(\partial_0 m)(a) := a.m - m.a,$$

wobei wir $C_0(B, M)$ mit M identifizieren.

Sind die Links- und Rechtswirkung durch die Darstellung π und die Antidarstellung σ gegeben, so sprechen wir von π-σ-Kozyklen, bzw. π-σ-Korändern.

Der folgende Satz rechtfertigt den Namen Kohomologie:

Satz 3.1. *Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra und M ein $\mathcal{A}$ Bimodul. Dann ist $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit ∂_n gemäß voriger Definition ein Kokettenkomplex, d.h.*

$$\operatorname{bild} \partial_n \subseteq \operatorname{kern} \partial_{n+1}$$

oder kurz $\partial^2 = 0$.

Beweis. In [10] findet sich ein vielleicht etwas eleganterer Induktionsbeweis, aber auch einfaches Ausrechnen führt zum Ziel. Wir setzen, um die Rechnungen übersichtlicher zu gestalten,

$$\chi_i^{(n)} f(x_1, \ldots, x_{n+1}) := \begin{cases} x_1.f(x_2, \ldots, x_{n+1}) & \text{für } i = 0, \\ f(x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) & \text{für } 1 \leq i \leq n \\ f(x_1, \ldots, x_n).x_{n+1} & \text{für } i = n+1 \end{cases}$$

und beobachten, daß für $i = 0, \ldots, n+2$, $j = 0, \ldots, n+1$

$$\chi_i^{(n+1)} \chi_j^{(n)} = \begin{cases} \chi_{j+1}^{(n+1)} \chi_i^{(n)} & \text{für } i \leq j \\ \chi_j^{(n+1)} \chi_{i-1}^{(n)} & \text{für } i > j \end{cases} \quad ,$$

da sich hinter der Stelle, an der wir zwei Elemente zusammenfassen, die Numerierung um eins verschiebt. Damit ist

$$\partial_n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \chi_i^{(n)}$$

und wir rechnen

$$\partial_{n+1} \partial_n = \partial_{n+1} \left(\sum_{0 \leq j \leq n+1} (-1)^j \chi_j^{(n)} \right) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n+2 \\ 0 \leq j \leq n+1}} (-1)^{i+j} \chi_i^{(n+1)} \chi_j^{(n)}.$$

Wir teilen die Summe auf in Summanden, in denen $i \leq j$ bzw. $j > i$ und erhalten

$$\sum_{0 \leq i \leq j \leq n+1} (-1)^{i+j} \chi_i^{(n+1)} \chi_j^{(n)} + \sum_{0 \leq j < i \leq n+2} (-1)^{i+j} \chi_i^{(n+1)} \chi_j^{(n)}. \tag{3.3}$$

Offenbar gilt mit $i' = j$ und $j' = i - 1$

$$0 \leq j < i \leq n+2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq i' \leq j' \leq n+1$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{0\leq j<i\leq n+2} (-1)^{i+j}\chi_i^{(n+1)}\chi_j^{(n)} &= \sum_{0\leq j<i\leq n+2} (-1)^{i+j}\chi_j^{(n+1)}\chi_{i-1}^{(n)} \\ &= \sum_{0\leq i'\leq j'\leq n+1} (-1)^{i'+j'+1}\chi_{i'}^{(n+1)}\chi_{j'}^{(n)} \\ &= -\sum_{0\leq i'\leq j'\leq n+1} (-1)^{i'+j'}\chi_{i'}^{(n+1)}\chi_{j'}^{(n)},\end{aligned}$$

also schließlich, indem wir dies in (3.3) einsetzen, $\partial^2 = 0$. $\square$

Bei uns geht es stets um B-Bimodulen für eine Bialgebra B. Die folgenden beiden Fälle kommen vor:

- Auf $\mathbb{C}$ sind Links- und Rechtswirkung durch die Koeinheit δ gegeben, d.h.
$$a.\lambda.b = \delta(a)\delta(b)\lambda$$
für $a, b \in B$, $\lambda \in \mathbb{C}$
Ist nichts weiter gesagt, so ist diese Kohomologie gemeint.

- ρ ist eine Darstellung von B auf einem Vektorraum D, die Rechtswirkung ist durch δ gegeben, d.h.
$$a.v.b = \delta(b)\rho(a)v$$
für $a, b \in B$, $v \in D$.

Wir führen noch einen zweiten Kokettenkomplex ein.

Definition 3.4 (Kommutierende, normierte Hochschild-Kohomologie, Koketten, Kozyklen und Koränder)**.** Sei B eine Bialgebra. Dann setzen wir für $n \in \mathbb{N}$
$$\widetilde{C}_n := \left\{ f \in C_n \;\middle|\; f \star \mu^{(n)} = \mu^{(n)} \star f \text{ und } f(\mathbb{1}^{\otimes n}) = 0 \right\}$$
und nennen die Elemente *normierte, kommutierende Koketten*. Dabei ist $\mu^{(n)} : a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto a_1 \ldots a_n$ die Multiplikationsabbildung für n Faktoren, insbesondere $\mu^{(1)} = \mathrm{id}$ und $\mu^{(0)} = \kappa$. Wir schreiben
$$\widetilde{Z}_n = \operatorname{kern} \partial_n, \quad \widetilde{B}_n = \operatorname{bild} \partial_{n-1} \quad \text{und} \quad \widetilde{H}_n = \widetilde{Z}_n / \widetilde{B}_n$$
und sagen entsprechend *normierter, kommutierender Kozyklus* zu den Elementen von $\widetilde{Z}_n$ und *normierter, kommutierender Korand* zu den Elementen von $\widetilde{B}_n$.

Satz 3.2. *Die $\widetilde{C}_n$ bilden mit dem Korandoperator nach Def. 3.3 einen Kokettenkomplex.*

Beweis. Es ist nur zu zeigen, daß $\partial_n : \widetilde{C}_n \to \widetilde{C}_{n+1}$. Sei also $f \in \widetilde{C}_n$. Dann rechnen wir

$$\partial f(\mathbb{1}^{\otimes n+1}) = \delta(\mathbb{1}) f(\mathbb{1}^{\otimes n}) - f(\mathbb{1}^{\otimes n}) \pm \cdots = 0$$

und

$$\partial f \star \mu^{(n+1)} = \left(\delta \otimes f + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f \circ (\mathrm{id}_{k-1} \otimes \mu \otimes \mathrm{id}_{n-k}) + (-1)^{n+1} f \otimes \delta \right) \star \mu^{(n+1)}.$$

Wir zeigen nun, daß die einzelnen Summanden unter der Faltung mit der Multiplikation vertauschen:

$$\begin{aligned}
&(\delta \otimes f) \star \mu^{(n+1)}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\
&= \delta(a_1^{(1)}) f\left(a_2^{(1)} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}^{(1)}\right) a_1^{(2)} \ldots a_{n+1}^{(2)} \\
&= a_1 f\left(a_2^{(1)} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}^{(1)}\right) a_2^{(2)} \ldots a_{n+1}^{(2)} \\
&= a_1 f\left(a_2^{(2)} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}^{(2)}\right) a_2^{(1)} \ldots a_{n+1}^{(1)} \qquad \text{da } f \star \mu^{(n)} = \mu^{(n)} \star f \\
&= a_1^{(1)} \ldots a_{n+1}^{(1)} \delta(a_1^{(2)}) f\left(a_2^{(2)} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}^{(2)}\right) \\
&= \mu^{(n+1)} \star (\delta \otimes f).
\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$(f \otimes \delta) \star \mu^{(n+1)} = \mu^{(n+1)} \star (f \otimes \delta).$$

Bleiben noch die mittleren Summanden:

$$\begin{aligned}
&(f \circ (\mathrm{id}_{k-1} \otimes \mu \otimes \mathrm{id}_{n-k})) \star \mu^{(n+1)}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\
&= f\left(a_1^{(1)} \otimes \cdots \otimes (a_k^{(1)} a_{k+1}^{(1)}) \otimes \cdots \otimes a_{n+1}^{(1)}\right) a_1^{(2)} \ldots a_k^{(2)} a_{k+1}^{(2)} \ldots a_{n+1}^{(2)} \\
&= f\left(a_1^{(1)} \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1})^{(1)} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}^{(1)}\right) a_1^{(2)} \ldots (a_k a_{k+1})^{(2)} \ldots a_{n+1}^{(2)}
\end{aligned}$$

(da Δ Algebrahomomorphismus ist)

$$= f\left(a_1^{(2)} \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1})^{(2)} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}^{(2)}\right) a_1^{(1)} \ldots (a_k a_{k+1})^{(1)} \ldots a_{n+1}^{(1)}$$

$$(\text{da } f \star \mu^{(n)} = \mu^{(n)} \star f)$$

$$= \mu^{(n+1)} \star (f \circ (\mathrm{id}_{k-1} \otimes \mu \otimes \mathrm{id}_{n-k}))(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}).$$

□

Zum Abschluß dieses Abschnittes zeigen wir noch:

Satz 3.3. *$H_2(\mathbb{CZ}) = \{0\}$ und $\widetilde{H}_2 = \{0\}$, d.h. Jeder 2-Kozyklus von $\mathbb{CZ}$ ist Korand (Genauer: jeder δ-δ-2-Kozyklus ist δ-δ-2-Korand).*

Beweis. Wir identifizieren die linearen Abbildungen von $\mathbb{CZ}^{\otimes n}$ nach $\mathbb{C}$ mit den entsprechenden Abbildungen von $\mathbb{Z}^n$ nach $\mathbb{C}$.
Sei g ein 2-Kozyklus. Nach (3.2) gilt dann

$$\delta(k)g(l,m) - g(k+l,m) + g(k,l+m) - g(k,l)\delta(m) = 0$$

für alle $k, l, m \in \mathbb{CZ}$. Wir definieren $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ induktiv durch

$$\begin{aligned} 2f(0) &= g(0,0), \\ f(k+1) &= f(k) - g(k,1), && \text{für } k \geq 0, \\ f(k-1) &= f(k) + g(k-1,1), && \text{für } k \leq 0. \end{aligned}$$

Aus der Kozyklusbedingung für g folgt, indem wir $l = m = 0$ setzen, $g(k,0) = g(0,0)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Damit ergibt sich sofort

$$\begin{aligned} \partial f(k,0) &= \delta(k)f(0) - f(k) + f(k)\delta(0) \\ &= g(0,0) = g(k,0). \end{aligned}$$

Jetzt zeigen wir induktiv, daß $\partial f(k,l) = g(k,l)$ für alle $l \geq 0$:

$$\begin{aligned} \partial f(k,l+1) &= f(l+1) - f(k+l+1) + f(k) \\ &= f(l) - g(l,1) - f(k+l) + g(k+l,1) + f(k) \\ &= \partial f(k,l) - g(l,1) + g(k+l,1) \\ &= g(k,l) - g(l,1) + g(k+l,1) \\ &= g(k,l+1). \end{aligned}$$

Analog erhält man Gleichheit für $l \leq 0$ und damit $\partial f = g$. Also ist jeder

Kozyklus Korand und folglich $H_2 = \{0\}$.
Ist $g(0,0) = 0$, so ist auch $f(0) = 0$, also folgt aus $g \in \widetilde{Z}_2$ auch $f \in \widetilde{C}_1$ und damit $g \in \widetilde{B}_2$. Schließlich haben wir $\widetilde{H}_2 = \{0\}$. □

3.2 Additive Deformationen

In [20] hat Wirth den Begriff der additiven Deformation einer Bialgebra eingeführt. Wir folgen der dortigen Darstellung in Abschnitt 2.2 eng. Im Beweis von Satz 3.4 kommen wir allerdings mit gewöhnlichen Ableitungen anstelle formaler Differentiale aus.

Definition 3.5. Eine *additive Deformation* einer Bialgebra B ist eine Familie $(\mu_t)_{t\geq 0}$, sodaß B mit Multiplikation μ_t eine unitale Algebra (mit gleichem Neutralelement wie B) wird und gilt:

$$\mu_0 = \mu,$$

$$(\mu_s \otimes \mu_t) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta) = \Delta \circ \mu_{s+t} \quad \forall s,t \geq 0, \tag{3.4}$$

$$\delta \circ \mu_t \xrightarrow[t\to 0+]{} \delta \otimes \delta \text{ punktweise.} \tag{3.5}$$

Ist B eine $*$-Bialgebra, so soll (B, μ_t) auch wieder eine $*$-Bialgebra sein.

Bezeichnen wir mit B_t die Algebra (B, μ_t), so sagt Bedingung (3.4), daß Δ ein Algebrahomomorphismus von B_{s+t} nach $B_s \otimes B_t$ ist. Für $s = t = 0$ wiederholt dies die Bialgebrabedingung (2.12).

Satz 3.4 (Generator einer additiven Deformation; Wirth, [20])**.** *Sei B eine Bialgebra und $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine additive Deformation. Dann ist $(\delta \circ \mu_t)_{t\in\geq 0}$ eine Faltungshalbgruppe linearer Funktionale auf $B \otimes B$ und es existiert ein Generator L, sodaß*

$$\delta \circ \mu_t = e_\star^{tL}.$$

Außerdem gilt

$$L = \left.\frac{\mathrm{d}(\delta \circ \mu_t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}(\delta \circ \mu_t - \delta \otimes \delta),$$

$$\mu \star e_\star^{(tL)} = \mu_t \qquad \forall t \geq 0, \tag{3.6}$$

$$L(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) = 0,$$

$$L \star \mu = \mu \star L$$

und

$$\delta(a)L(b \otimes c) - L(ab \otimes c) + L(a \otimes bc) - L(a \otimes b)\delta(c) = 0$$

für alle $a, b, c \in B$. *Insbesondere ist also* $L \in \widetilde{Z}_2$.
Ist umgekehrt L *ein normierter, kommutierender 2-Kozyklus, so definiert* (3.6) *eine additive Deformation der Bialgebra* B.
Ist B *eine* $*$*-Bialgebra, so muß* L *auch hermitesch sein, d.h.*

$$L(b \otimes c) = \overline{L(c^* \otimes b^*)} \qquad \forall b, c \in B.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $(\delta \circ \mu_t)_{t \in \geq 0}$ eine Faltungshalbgruppe ist. Wir setzen $M_t := \delta \circ \mu_t$. Für $s, t \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
(\delta \circ \mu_s) \star (\delta \circ \mu_t) &= ((\delta \circ \mu_s) \otimes (\delta \circ \mu_t)) \circ \Lambda \\
&= (\delta \otimes \delta) \circ (\mu_s \otimes \mu_t) \circ \Lambda \\
&= \delta \circ (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Delta \circ \mu_{s+t} \quad \text{nach (3.4)} \\
&= \delta \circ \mu_{s+t} \quad \text{wegen der Koeinseigenschaft.}
\end{aligned}$$

Es gilt auch $\delta \circ \mu_t \to \delta \otimes \delta$ für $t \to 0$, da $\mu_t \to \mu$ punktweise (3.5) und $\delta \circ \mu = \delta \otimes \delta$.
Damit existiert $L(b) := \frac{d((M_t)(b \otimes c))}{dt}\Big|_{t=0}$ für alle $b, c \in B$ und definiert eine lineare Abbildung $L : B \otimes B \to \mathbb{C}$, für die $\delta \circ \mu_t = M_t = e_\star^{tL}$ für alle $t \geq 0$. Wir erhalten nun

$$\begin{aligned}
\mu \star e_\star^{tL} &= (\mu \otimes e_\star^{tL}) \circ \Lambda \\
&= (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ (\mu \otimes \mu_t) \circ \Lambda \\
&= (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Delta \circ \mu_t \quad \text{wegen (3.4)} \\
&= \mu_t,
\end{aligned}$$

womit (3.6) gezeigt ist.
Offenbar folgt analog $e_\star^{tL} \star \mu = \mu_t$, also insbesondere $M_t \star \mu = \mu \star M_t$ für alle $t \geq 0$.
Es bleibt zu zeigen, daß L ein normierter, kommutierender 2-Kozyklus ist. Da

$$(\delta \circ \mu_t)(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) = \delta(\mathbb{1}) = 1 \quad \forall t \geq 0,$$

erhalten wir durch Ableiten, daß L normiert ist.

L kommutiert auch, da

$$\begin{aligned}
& & \mu \star (\delta \circ \mu_t) = (\delta \circ \mu_t) \star \mu & \\
\Leftrightarrow & & \varphi \circ (\mu \star (\delta \circ \mu_t)) = \varphi \circ ((\delta \circ \mu_t) \star \mu) & \quad \forall \varphi \in B' \\
\Leftrightarrow & & (\varphi \circ \mu) \star (\delta \circ \mu_t) = (\delta \circ \mu_t) \star (\varphi \circ \mu) & \quad \forall \varphi \in B' \\
\Rightarrow_{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}\right)} & & (\varphi \circ \mu) \star L = L \star (\varphi \circ \mu) & \quad \forall \varphi \in B' \\
\Leftrightarrow & & \varphi \circ (\mu \star L) = \varphi \circ (L \star \mu) & \quad \forall \varphi \in B' \\
\Leftrightarrow & & \mu \star L = L \star \mu. &
\end{aligned}$$

Da B mit μ_t eine Algebra ist, gilt

$$\mu_t \circ (\mathrm{id} \otimes \mu_t) = \mu_t \circ (\mu_t \otimes \mathrm{id}). \tag{3.7}$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\delta \circ \mu_t \circ (\mathrm{id} \otimes \mu_t) &= M_t \circ (((\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta) \otimes \mu_t) \\
&= M_t \circ (\delta \otimes \mathrm{id} \otimes M_t \otimes \mu) \circ (\Delta \otimes \Lambda) \\
&= M_t \circ (\delta \otimes M_t \otimes \mathrm{id} \otimes \mu) \circ (\Delta \widetilde{\otimes} \Lambda) \\
&= (\delta \otimes M_t \otimes (M_t \circ (\mathrm{id} \otimes \mu)) \circ (\Delta \widetilde{\otimes} \Lambda) \\
&= (\delta \otimes M_t) \star (M_t \circ (\mathrm{id} \otimes \mu)).
\end{aligned}$$

Leiten wir diese Gleichung ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta \circ \mu_t \circ (\mathrm{id} \otimes \mu_t))\bigg|_{t=0} &= (\delta \otimes L) \star (M_0 \circ (\mathrm{id} \otimes \mu)) + (\delta \otimes M_0) \star (L \circ (\mathrm{id} \otimes \mu)) \\
&= (\delta \otimes L) \star (\delta \otimes \underbrace{(\delta \circ \mu)}_{=\delta \otimes \delta}) + (\delta \otimes \delta \otimes \delta) \star (L \circ (\mathrm{id} \otimes \mu)) \\
&= \delta \otimes L + L \circ (\mathrm{id} \otimes \mu).
\end{aligned}$$

Wir können entsprechend mit der rechten Seite von (3.7) verfahren, um

$$\delta \otimes L + L \circ (\mathrm{id} \otimes \mu) = L \otimes \delta + L \circ (\mu \otimes \mathrm{id})$$

zu erhalten, d.h. L ist 2-Kozyklus.
Ist B sogar eine $*$-Bialgebra, so gilt auch

$$(\delta \circ \mu_t)(b \otimes c) = \overline{(\delta \circ \mu_t)(c^* \otimes b^*)} \quad \forall b, c \in B,$$

also folgt durch Differenzieren, daß L hermitesch ist.
Wir zeigen jetzt die Umkehrung. Sei also L ein normierter, kommutierender 2-Kozyklus. Wir müssen die Assoziativität von $\mu_t := \mu \star e_\star^{tL}$ beweisen. Wir rechnen unter Verwendung der Sweedler Notation für $b, c, d \in B$

$$\begin{aligned}(\mu_t \circ (\mathrm{id} \otimes \mu_t))(b \otimes c \otimes d) &= \mu_t(b \otimes c_{(1)} d_{(1)} e_\star^{tL}(c_{(2)} \otimes d_{(2)})) \\ &= e_\star^{tL}(c_{(2)} \otimes d_{(2)}) \mu_t(b \otimes c_{(1)} d_{(1)}) \\ &= e_\star^{tL}(c_{(3)} \otimes d_{(3)}) b_{(1)} c_{(1)} d_{(1)} e_\star^{tL}(b_{(2)} \otimes c_{(2)} d_{(2)}) \\ &= b_{(1)} c_{(1)} d_{(1)} e_\star^{tL}(b_{(2)} \otimes c_{(2)} d_{(2)}) \delta(b_{(3)}) e_\star^{tL}(c_{(3)} \otimes d_{(3)})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(\mu_t \circ (\mu_t \otimes \mathrm{id}))(b \otimes c \otimes d) &= \mu_t(b_{(1)} c_{(1)} \otimes d e_\star^{tL}(b_{(2)} \otimes c_{(2)})) \\ &= e_\star^{tL}(b_{(2)} \otimes c_{(2)}) \mu_t(b_{(1)} c_{(1)} \otimes d) \\ &= e_\star^{tL}(b_{(3)} \otimes c_{(3)}) b_{(1)} c_{(1)} d_{(1)} e_\star^{tL}(b_{(2)} c_{(2)} \otimes d_{(2)}) \\ &= b_{(1)} c_{(1)} d_{(1)} \\ &\qquad e_\star^{tL}(b_{(2)} c_{(2)} \otimes d_{(2)}) e_\star^{tL}(b_{(3)} \otimes c_{(3)}) \delta(d_{(3)}).\end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen, daß

$$\begin{aligned}&e_\star^{tL}(b_{(1)} \otimes c_{(1)} d_{(1)}) \delta(b_{(2)}) e_\star^{tL}(c_{(2)} \otimes d_{(2)}) = \\ &\qquad\qquad e_\star^{tL}(b_{(1)} c_{(1)} \otimes d_{(1)}) e_\star^{tL}(b_{(2)} \otimes c_{(2)}) \delta(d_{(2)})\end{aligned}$$

für alle $b, c, d \in B$ bzw.

$$(e_\star^{tL} \circ (\mathrm{id} \otimes \mu)) \star (\delta \otimes e_\star^{tL}) = (e_\star^{tL} \circ (\mu \otimes \mathrm{id})) \star (e_\star^{tL} \otimes \delta). \tag{3.8}$$

Daß L ein 2-Kozyklus ist, können wir in der Form

$$L \circ (\mathrm{id} \otimes \mu) + \delta \otimes L = L \circ (\mu \otimes \mathrm{id}) + L \otimes \delta \tag{3.9}$$

schreiben. Wir wollen zeigen, daß (3.8) gerade das Exponential von (3.9) ist. Es gilt

$$\begin{aligned}(L \circ (\mathrm{id} \otimes \mu)) \star (\delta \otimes L) &= (\delta \otimes L) \star (L \circ (\mathrm{id} \otimes \mu)), \\ (L \circ (\mu \otimes \mathrm{id})) \star (L \otimes \delta) &= (L \otimes \delta) \star (L \circ (\mu \otimes \mathrm{id})),\end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned}(L \circ (\mathrm{id} \otimes \mu)) \star (\delta \otimes L) &= ((L \circ (\mathrm{id} \otimes \mu)) \otimes (\delta \otimes L)) \circ (\Delta \widetilde{\otimes} \Lambda) \\ &= L \circ (\mathrm{id} \otimes \mu \otimes \delta \otimes L) \circ (\Delta \widetilde{\otimes} \Lambda) \\ &= L \circ (\mathrm{id} \otimes \delta \otimes \mu \otimes L) \circ (\Delta \otimes \Lambda) \\ &= L \circ (\delta \otimes \mathrm{id} \otimes L \otimes \mu) \circ (\Delta \otimes \Lambda) \\ &= L \circ (\delta \otimes L \otimes \mathrm{id} \otimes \mu) \circ (\Delta \widetilde{\otimes} \Lambda) \\ &= ((\delta \otimes L) \otimes (L \circ (\mathrm{id} \otimes \mu))) \circ (\Delta \widetilde{\otimes} \Lambda) \\ &= (\delta \otimes L) \star (L \circ (\mathrm{id} \otimes \mu)).\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung folgt analog.
Damit können wir

$$e_\star^{t(L \circ (\mathrm{id} \otimes \mu) + \delta \otimes L)} = e_\star^{t(L \circ (\mathrm{id} \otimes \mu))} \star e_\star^{t\delta \otimes L} \tag{3.10}$$

schreiben und entsprechend für die rechte Seite von (3.9). Außerdem haben wir für beliebige lineare Funktionale $R, S : B \otimes B \to \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}(R \star S) \circ (\mathrm{id} \otimes \mu) &= (R \circ (\mathrm{id} \otimes \mu)) \star (S \circ (\mathrm{id} \otimes \mu)), \\ (R \star S) \circ (\mu \otimes \mathrm{id}) &= (R \circ (\mu \otimes \mathrm{id})) \star (S \circ (\mu \otimes \mathrm{id})), \\ \delta \otimes (R \star S) &= (\delta \otimes R) \star (\delta \otimes S), \\ (R \star S) \otimes \delta &= (R \otimes \delta) \star (S \otimes \delta),\end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned}(R \star S) \circ (\mathrm{id} \otimes \mu) &= (R \otimes S) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta) \circ (\mathrm{id} \otimes \mu) \\ &= (R \otimes S) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id}_2 \otimes \mu \otimes \mu) \circ (\Delta \otimes \Lambda) \\ &= (R \otimes S) \circ (\mathrm{id} \otimes \mu \otimes \mathrm{id} \otimes \mu) \circ (\Delta \widetilde{\otimes} \Lambda) \\ &= ((R \circ (\mathrm{id} \otimes \mu)) \otimes (S \circ (\mathrm{id} \otimes \mu))) \circ (\Delta \widetilde{\otimes} \Lambda) \\ &= (R \circ (\mathrm{id} \otimes \mu)) \star (S \circ (\mathrm{id} \otimes \mu))\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\delta \otimes (R \star S) &= (\delta \circ \underbrace{(\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta}_{=\mathrm{id}}) \otimes ((R \otimes S) \circ \Lambda) \\
&= ((\delta \otimes \delta) \circ \Delta) \otimes ((R \otimes S) \circ \Lambda) \\
&= (\delta \otimes \delta \otimes R \otimes S) \circ (\Delta \otimes \Lambda) \\
&= (\delta \otimes R \otimes \delta \otimes S) \circ (\Delta \widetilde{\otimes} \Lambda) \\
&= (\delta \otimes R) \star (\delta \otimes S).
\end{aligned}$$

Die zweite und vierte Gleichung erhält man analog. Wir fahren mit der Hauptrechnung (3.10) fort und erhalten

$$e_\star^{t(L \circ (\mathrm{id} \otimes \mu))} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (L \circ (\mathrm{id} \otimes \mu))^{\star k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k L^{\star k}}{k!} \circ (\mathrm{id} \otimes \mu) = e_\star^{tL} \circ (\mathrm{id} \otimes \mu)$$

und

$$e_\star^{t\delta \otimes L} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (\delta \otimes L)^{\star k}}{k!} = \delta \otimes \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k L^{\star k}}{k!} = \delta \otimes e_\star^{tL}.$$

Damit folgt schließlich (3.8) und damit die Assoziativität von μ_t. Wir zeigen noch die Bedingung (3.4). Für $s, t \geq 0$ ist

$$\begin{aligned}
\Delta \circ \mu_{s+t} &= \Delta \circ (e_\star^{(s+t)L} \otimes \mu) \circ \Lambda \\
&= (e_\star^{(s+t)L} \otimes (\Delta \circ \mu)) \circ \Lambda \\
&= (e_\star^{(s+t)L} \otimes \mu \otimes \mu) \circ (\mathrm{id}_2 \otimes \Lambda) \circ \Lambda \\
&\qquad\qquad (\text{da } \mu \text{ Koalgebrahomomorphismus (2.11)}) \\
&= ((e_\star^{sL} \star e_\star^{tL}) \otimes \mu \otimes \mu) \circ (\mathrm{id}_2 \otimes \Lambda) \circ \Lambda \\
&= (e_\star^{sL} \otimes e_\star^{tL} \otimes \mu \otimes \mu) \circ (\Lambda \otimes \mathrm{id}_4) \circ (\mathrm{id}_2 \otimes \Lambda) \circ \Lambda \\
&= (e_\star^{sL} \otimes e_\star^{tL} \otimes \mu \otimes \mu) \circ (\mathrm{id}_2 \otimes \Lambda \otimes \mathrm{id}_2) \circ (\mathrm{id}_2 \otimes \Lambda) \circ \Lambda \\
&\qquad\qquad (\text{wegen Koassoziativität von } \Lambda) \\
&= (e_\star^{sL} \otimes \mu \otimes e_\star^{tL} \otimes \mu) \circ (\Lambda \otimes \Lambda) \circ \Lambda \\
&\qquad\qquad (\text{da } L \text{ kommutiert}) \\
&= (\mu_s \otimes \mu_t) \circ \Lambda.
\end{aligned}$$

Falls B sogar eine $*$-Bialgebra und L hermitesch ist, gilt auch

$$\begin{aligned}\mu_t(b \otimes c) = b_{(1)}c_{(1)}\, e_\star^{tL}(b_{(2)} \otimes c_{(2)}) &= (c^*_{(1)}b^*_{(1)})^*\, \overline{e_\star^{tL}(c^*_{(2)} \otimes b^*_{(2)})} \\ &= \left(c^*_{(1)}b^*_{(1)}\, e_\star^{tL}(c^*_{(2)} \otimes b^*_{(2)})\right)^* \\ &= (\mu_t(c^* \otimes b^*))^*\end{aligned}$$

für alle $b, c \in B$. $\square$

3.3 Deformationen und Koränder

In diesem Abschnitt spielen die folgenden Operatoren eine wesentliche Rolle:

Definition 3.6. Sei (C, Δ, δ) eine Koalgebra, $\varphi : C \to \mathbb{C}$ ein lineares Funktional. Dann definieren wir $L_\varphi, R_\varphi : C \to C$ durch

$$\begin{aligned}L_\varphi &:= (\varphi \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta, \\ R_\varphi &:= (\mathrm{id} \otimes \varphi) \circ \Delta.\end{aligned}$$

Wir sagen, daß φ *kommutiert*, falls

$$L_\varphi = R_\varphi.$$

Lemma 3.5. *Seien (C, Δ, δ) eine Koalgebra, $\varphi, \psi \in C'$. Dann gilt*

$$\varphi \star \psi = \varphi \circ R_\psi = \psi \circ L_\varphi, \tag{3.11}$$

$$\delta \circ R_\varphi = \delta \circ L_\varphi = \varphi, \tag{3.12}$$

$$L_\varphi \circ L_\psi = L_{\psi \star \varphi}, \tag{3.13}$$

$$R_\varphi \circ R_\psi = R_{\varphi \star \psi}. \tag{3.14}$$

Außerdem sind die folgenden Bedingungen für $\varphi \in C'$ äquivalent:

- $L_\varphi = R_\varphi$
- $\varphi \in \mathbf{Z}(C')$

Dabei bezeichnet $\mathbf{Z}(C')$ das Zentrum von C', d.h. $\varphi \in \mathbf{Z}(C')$ genau dann, wenn $\varphi \star \psi = \psi \star \varphi$ für alle $\psi \in C'$.

Beweis. Wir erhalten (3.11) direkt durch Einsetzen der Definitionen:

$$\begin{aligned}\psi \circ L_\varphi = \psi \circ (\varphi \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta &= \varphi \star \psi \\ &= \varphi \circ (\mathrm{id} \otimes \psi) \circ \Delta \\ &= \varphi \circ R_\psi .\end{aligned}$$

Damit ist auch (3.12) gezeigt, da wir nach Satz 2.3 wissen, daß δ das neutrale Element bzgl. $\star$ ist.
Rechnen wir nun (3.13) und (3.14) nach:

$$\begin{aligned}L_\varphi \circ L_\psi &= (\varphi \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \circ (\psi \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \\ &= (\varphi \otimes \mathrm{id}) \circ (\psi \otimes \Delta) \circ \Delta \\ &= (\varphi \otimes \mathrm{id}) \circ (\psi \otimes \mathrm{id}_2) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta \\ &= (\varphi \otimes \mathrm{id}) \circ (\psi \otimes \mathrm{id}_2) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \\ &= (\psi \otimes \varphi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \\ &= ((\psi \star \varphi) \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \\ &= L_{\psi \star \varphi}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}R_\varphi \circ R_\psi &= (\mathrm{id} \otimes \varphi) \circ \Delta \circ (\mathrm{id} \otimes \psi) \circ \Delta \\ &= (\mathrm{id} \otimes \varphi) \circ (\Delta \otimes \psi) \circ \Delta \\ &= (\mathrm{id} \otimes \varphi) \circ (\mathrm{id}_2 \otimes \psi) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \\ &= (\mathrm{id} \otimes \varphi) \circ (\mathrm{id}_2 \otimes \psi) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta \\ &= (\mathrm{id} \otimes \varphi \otimes \psi) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta \\ &= (\mathrm{id} \otimes (\varphi \star \psi)) \circ \Delta \\ &= R_{\varphi \star \psi} .\end{aligned}$$

Abschließend zeigen wir die behauptete Äquivalenz:
Gelte $L_\varphi = R_\varphi$. Dann rechnen wir für beliebiges $\psi \in C'$

$$\varphi \star \psi = \psi \circ L_\varphi = \psi \circ R_\varphi = \psi \star \varphi,$$

d.h. $\varphi \in \mathbf{Z}(C')$.
Ist umgekehrt $L_\varphi \neq R_\varphi$, so gibt es ein $c \in C$ mit $l := L_\varphi(c) \neq R_\varphi(c) =: r$.

Sei $\psi \in C'$ so, daß $\psi(l) \neq \psi(r)$. Dann erhalten wir

$$(\varphi \star \psi)(c) = \psi(l) \neq \psi(r) = (\psi \star \varphi)(c)$$

und damit $\varphi \notin \mathbf{Z}(C')$. □

Beispiel 3.1. Wir betrachten die Koalgebra $\mathcal{F}(G)$ für eine endliche Gruppe G mit Neutralelement e (vgl. Bsp.2.9). Wie wir wissen, ist $\mathcal{F}(G)' \equiv \mathbb{C}G$. Die folgende Rechnung zeigt, daß R_x und L_x, $x \in G$, die Rechts- bzw. Linkstranslation sind. D.h. es gilt

$$\begin{aligned}(R_x(f))(y) &= ((\mathrm{id} \otimes x) \circ \Delta)(f)(y) \\ &= (\mathrm{id} \otimes x)(f_{(1)} \otimes f_{(2)})(y) \\ &= (f_{(2)}(x) f_{(1)})(y) \\ &= f_{(1)}(y) f_{(2)}(x) \\ &= (\Delta f)(y \otimes x) = f(yx)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(L_x(f))(y) &= ((x \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(f)(y) \\ &= (x \otimes \mathrm{id})(f_{(1)} \otimes f_{(2)})(y) \\ &= (f_{(1)}(x) f_{(2)})(y) \\ &= f_{(1)}(x) f_{(2)}(y) \\ &= (\Delta f)(x \otimes y) = f(xy),\end{aligned}$$

wobei $f \in \mathcal{F}(G)$, $y \in G$.
Nach Lemma 3.5 ist $R_\psi = L_\psi$ genau dann, wenn $\psi \in \mathbf{Z}(\mathbb{C}G)$. Es ist also interessant, das Zentrum $\mathbf{Z}(\mathbb{C}G)$ zu untersuchen. Es bezeichne

$$[x] = \left\{ x' \in G : yx'y^{-1} = x \text{ für ein } y \in G \right\}$$

die Konjugationsklasse von x.

Behauptung. Es gilt

$$\mathbf{Z}(\mathbb{C}G) = \mathrm{Lin}\Big\{ \sum_{y \in [x]} y : x \in G \Big\} \quad \text{und} \quad \dim \mathbf{Z}(\mathbb{C}G) = \#\Big\{ [x] : x \in G \Big\}.$$

Beweis. Sei $x \in G$. Dann rechnen wir

$$z \sum_{y\in[x]} y = z \sum_{y\in G} yxy^{-1} = \sum_{y\in G} zyxy^{-1} \overset{xz=z'}{=} \sum_{y'\in G} y'xy'^{-1}z = \sum_{y\in[x]} yz,$$

Also ist $\sum_{y\in[x]} y \in \mathbf{Z}(\mathbb{C}G)$ und wir haben die eine Inklusion gezeigt. Umgekehrt schließen wir

$$\begin{aligned}
\sum \alpha_x x \in \mathbf{Z}(\mathbb{C}G) \Rightarrow \quad & \forall y \in G \quad & y(\sum \alpha_x x) = (\sum \alpha_x x)y \\
\Rightarrow \quad & \forall y \in G \quad & \sum \alpha_x yx = \sum \alpha_x xy \\
\Rightarrow \quad & \forall y \in G \quad & \sum \alpha_{y^{-1}x} x = \sum \alpha_{xy^{-1}} x \\
\Rightarrow \quad & \forall x, y \in G \quad & \alpha_{y^{-1}x} = \alpha_{xy^{-1}} \\
\Rightarrow \quad & \forall x, y \in G \quad & \alpha_x = \alpha_{yxy^{-1}} \\
\Rightarrow \quad & & \sum \alpha_x x \in \operatorname{Lin}\Big\{\sum_{y\in[x]} y : x \in G\Big\}
\end{aligned}$$

und erhalten die andere Inklusion. □

Im folgenden sei $(B, \mu, \kappa, \Delta, \delta)$ eine Bialgebra und Λ bezeichne die Komultiplikation in $B \otimes B$. Ein paar weitere Eigenschaften von L_φ und R_φ:

Lemma 3.6. *Sei $\varphi \in B'$. Dann gilt*

$$R_{\delta\otimes\varphi} = \mathrm{id} \otimes R_\varphi \tag{3.15}$$

$$R_{\varphi\otimes\delta} = R_\varphi \otimes \mathrm{id} \tag{3.16}$$

$$\mu \circ R_{\varphi\circ\mu} = R_\varphi \circ \mu \tag{3.17}$$

und

$$L_{\delta\otimes\varphi} = \mathrm{id} \otimes L_\varphi \tag{3.18}$$

$$L_{\varphi\otimes\delta} = L_\varphi \otimes \mathrm{id} \tag{3.19}$$

$$\mu \circ L_{\varphi\circ\mu} = L_\varphi \circ \mu. \tag{3.20}$$

Beweis. Wir rechnen, um (3.15) zu zeigen,

$$\begin{aligned}
R_{\delta\otimes\varphi} &= (\mathrm{id}_2 \otimes \delta \otimes \varphi) \circ \Lambda \\
&= (\mathrm{id} \otimes \delta \otimes \mathrm{id} \otimes \varphi) \circ (\Delta \otimes \Delta) \\
&= ((\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Delta) \otimes ((\mathrm{id} \otimes \varphi) \circ \Delta) \\
&= \mathrm{id} \otimes R_\varphi
\end{aligned}$$

und erhalten (3.16), (3.18) und (3.19) analog. Zum Beweis von (3.17) rechnen wir

$$\begin{aligned}\mu \circ R_{\varphi\circ\mu} &= \mu \circ (\mathrm{id}_2 \otimes(\varphi \circ \mu)) \circ \Lambda \\ &= (\mu \otimes (\varphi \circ \mu)) \circ \Lambda \\ &= (\mathrm{id} \otimes\varphi) \circ (\mu \otimes \mu) \circ \Lambda \\ &= (\mathrm{id} \otimes\varphi) \circ \Delta \circ \mu \\ &= R_\varphi \circ \mu\end{aligned}$$

und (3.20) folgt analog. □

Ziel des Abschnittes ist es, für die Deformationen, deren Generatoren in $\widetilde{B}_2$ liegen, nachzuweisen, daß die deformierten Multiplikationen sich als Basistransformierte der ursprünglichen Multiplikation schreiben lassen. Der Schlüssel dazu liegt im folgenden Lemma:

Lemma 3.7. *Sei B eine Bialgebra und $\psi \in \widetilde{C}_1$, d.h. ψ ist ein kommutierendes lineares Funktional mit $\psi(\mathbb{1}) = 0$. Dann ist $L := \partial\psi$ ein normierter, kommutierender 2-Kozyklus, durch $\mu_t := \mu \star e_\star^{tL}$ ist eine additive Deformation auf B gegeben und es gilt*

$$\mu_t = R^{-1}_{e_\star^{t\psi}} \circ \mu \circ (R_{e_\star^{t\psi}} \otimes R_{e_\star^{t\psi}}). \tag{3.21}$$

Ist B eine $*$-Bialgebra und ψ zusätzlich hermitesch, so ist auch L hermitesch und die Deformation eine Deformation der $*$-Bialgebra.

Beweis. Offenbar ist $L = \partial\psi \in \widetilde{B}_2 \subseteq \widetilde{Z}_2$, also ist L ein normierter, kommutierender 2-Kozyklus. Ist B eine $*$-Bialgebra und $\psi(b^*) = \overline{\psi(b)}$ für alle $b \in B$, so gilt auch

$$\begin{aligned}L(c^* \otimes b^*) &= \delta(c^*)\psi(b^*) - \psi(c^*b^*) + \psi(c^*)\delta(b^*) \\ &= \overline{\delta(c)\psi(b)} - \overline{\psi(bc)} + \overline{\psi(c)\delta(b)} \\ &= \overline{L(b \otimes c)},\end{aligned}$$

also ist L hermitesch. In jedem Fall folgt, daß $(\mu_t)_{t\geq 0}$ mit $\mu_t = \mu \star e_\star^{tL}$ eine additive Deformation ist.
Bleibt noch (3.21) zu zeigen. Hierfür rechnen wir nach, daß

$$e_\star^{t\partial\psi} = (\delta \otimes e_\star^{t\psi}) \star (e_\star^{t\psi} \circ \mu) \star (e_\star^{t\psi} \otimes \delta) \tag{3.22}$$

gilt. Es ist zu zeigen, daß die Ausdrücke im Exponenten auf der rechten

Seite kommutieren, daß also

$$(\delta \otimes \psi) \star (\psi \otimes \delta) = (\psi \otimes \delta) \star (\delta \otimes \psi), \tag{3.23}$$

$$(\delta \otimes \psi) \star (\psi \circ \mu) = (\psi \circ \mu) \star (\delta \otimes \psi). \tag{3.24}$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned}
(\delta \otimes \psi) \star (\psi \otimes \delta) &= (\delta \otimes \psi \otimes \psi \otimes \delta) \circ \Lambda \\
&= ((\delta \otimes \psi) \circ \Delta) \otimes ((\psi \otimes \delta) \circ \Delta) \\
&= (\psi \circ (\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta) \otimes (\psi \circ (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Delta) \\
&= (\psi \circ (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Delta) \otimes (\psi \circ (\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta) \\
&= (\psi \otimes \delta) \star (\delta \otimes \psi)
\end{aligned}$$

und erhalten (3.23) sowie

$$\begin{aligned}
(\delta \otimes \psi) \star (\psi \circ \mu) &= (\delta \otimes \psi \otimes (\psi \circ \mu)) \circ \Lambda \\
&= (\psi \circ \mu) \circ (\delta \otimes \psi \otimes \mathrm{id}_2) \circ \Lambda \\
&= (\psi \circ \mu) \circ (\delta \otimes \mathrm{id} \otimes \psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta) \\
&= (\psi \circ \mu) \circ (\mathrm{id} \otimes \delta \otimes \mathrm{id} \otimes \psi) \circ (\Delta \otimes \Delta) \\
&= (\psi \circ \mu) \circ (\mathrm{id}_2 \otimes \delta \otimes \psi) \circ \Lambda \\
&= ((\psi \circ \mu) \otimes \delta \otimes \psi) \circ \Lambda \\
&= (\psi \circ \mu) \star (\delta \otimes \psi)
\end{aligned}$$

und erhalten (3.24). Damit ist (3.22) gezeigt.
Nun folgt (3.21), indem wir rechnen

$$\begin{aligned}
\mu_t = \mu \star e_\star^{t\partial\psi} &= (\mu \otimes e_\star^{t\partial\psi}) \circ \Lambda \\
&= \mu \circ R_{e_\star^{t\partial\psi}} \\
&= \mu \circ R_{e_\star^{-t\psi\circ\mu} \star (\delta \otimes e_\star^{t\psi}) \star (e_\star^{t\psi} \otimes \delta)} \quad \text{wegen (3.22)} \\
&= \mu \circ R_{e_\star^{-t\psi}\circ\mu} \circ R_{\delta \otimes e_\star^{t\psi}} \circ R_{e_\star^{t\psi}\circ\delta} \quad \text{wegen (3.14)} \\
&= (R_{e_\star^{t\psi}})^{-1} \circ \mu \circ (R_{e_\star^{t\psi}} \otimes R_{e_\star^{t\psi}}) \quad \text{nach Lemma 3.6.}
\end{aligned}$$

□

Nun zum Hauptsatz dieses Abschnittes:

Satz 3.8. *Sei B eine $*$-Bialgebra. Ist $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine additive Deformation mit Generator $L \in \widetilde{B}_2$, d.h. es gilt $L = \partial\psi$ für ein hermitesches, normiertes, kommutierendes lineares Funktional ψ, so gilt*

$$\mu_t = \Phi_t^{-1} \circ \mu \circ (\Phi_t \otimes \Phi_t)$$

mit $\Phi_t := R_{e_\star^{t\psi}}$ und für alle $s, t \geq 0$, $b \in B$ gilt

$$\begin{aligned} \Phi_s \circ \Phi_t &= \Phi_{s+t}, \\ \Phi_t &\xrightarrow{t\to 0+} \mathrm{id} \quad \textit{punktweise}, \\ \Phi_t(b^*) &= \Phi_t(b)^*, \\ \Phi_t(\mathbb{1}) &= \mathbb{1}, \\ (\Phi_t \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta &= (\mathrm{id} \otimes \Phi_t) \circ \Delta. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Ist umgekehrt $(\Phi_t)_{t\geq 0}$ eine Familie von invertierbaren, linearen Abbildungen auf B, die die genannten Bedingungen erfüllt, so definiert

$$\mu_t := \Phi_t^{-1} \circ \mu \circ (\Phi_t \otimes \Phi_t)$$

eine additive Deformation mit Generator $L = \partial\psi \in \widetilde{B}_2$, wobei ψ Generator der Faltungshalbgruppe $\varphi_t := \delta \circ \Phi_t$ ist.

Beweis. Die erste Hälfte folgt direkt aus Lemma 3.7.
Zum Beweis der 2. Hälfte zeigen wir zunächst, daß $\Phi_t = R_{\varphi_t}$ gilt, indem wir rechnen

$$\begin{aligned} R_{\varphi_t} &= R_{\delta\circ\Phi_t} \\ &= (\mathrm{id} \otimes \delta \circ \Phi_t) \circ \Delta \\ &= (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ (\mathrm{id} \otimes \Phi_t) \circ \Delta \\ &= (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ (\Phi_t \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \quad \text{nach (3.25)} \\ &= \Phi_t \circ (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Delta \\ &= \Phi_t. \end{aligned}$$

Um nun den Satz zu beweisen, zeigen wir, daß ψ ein hermitesches, normiertes, kommutierendes lineares Funktional ist, um dann mit Lemma 3.7 zu schließen, daß $\partial\psi$ Generator der gewünschten additiven Deformation ist. Zunächst weisen wir Hermitizität und Normiertheit von den φ_t nach. Es gilt für $t \geq 0$ und $b \in B$

$$\varphi_t(b^*) = (\delta \circ \Phi_t)(b^*) = \delta(\Phi_t(b)^*) = \overline{\varphi_t(b)}$$

sowie

$$\varphi_t(\mathbb{1}) = (\delta \circ \Phi_t)(\mathbb{1}) = \delta(\mathbb{1}) = 1.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
(\varphi_t \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta &= ((\delta \circ \Phi_t) \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \\
&= (\delta \otimes \mathrm{id}) \circ (\Phi_t \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \\
&= (\delta \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Phi_t) \circ \Delta \\
&= (\delta \otimes \Phi_t) \circ \Delta \\
&= \Phi_t \qquad\qquad \text{(wegen Koeinseigenschaft)} \\
&= (\mathrm{id} \otimes \varphi_t) \circ \Delta \qquad \text{(da } \Phi_t = R_{\varphi_t}\text{)}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich offenbar durch Differenzieren für den Generator ψ:

- $\psi(b^*) = \overline{\psi(b)}$,
- $\psi(1) = 0$,
- ψ kommutiert.

Nun liefert das Lemma:

$$\mu_t := e_\star^{t\partial\psi} \star \mu = \Phi_t^{-1} \circ \mu \circ (\Phi_t \otimes \Phi_t)$$

ist additive Deformation mit Generator $\partial\psi$. Da ψ kommutiert gilt auch $L \in \widetilde{B}_2$. □

Es stellt sich die Frage, ob jede additive Deformation, deren Generator ein Korand ist, sich durch eine Halbgruppe von Isomorphismen im obigen Sinne beschreiben läßt, also ob wir daraus, daß $\partial\psi$ kommutiert, schließen können, daß ψ kommutiert. Dies ist im allgemeinen sicher falsch, da $\partial\psi = \partial(\psi + \varphi)$ für einen beliebigen Kozyklus φ. Wir müssen also genauer fragen, ob es zu jedem Generator L einer additiven Deformation, die Korand ist, ein hermitesches, normiertes, kommutierendes lineares Funktional ψ gibt, sodaß $L = \partial\psi$.
Diese Frage ist äquivalent zu der folgenden kohomologischen Frage: Ist die Abbildung $\iota : \widetilde{H}_2 \to H_2$ mit $\iota(L + \widetilde{B}_2) := L + B_2$ injektiv?
Wir sehen die Äquivalenz folgendermaßen ein: Wenn es zu jedem $L \in B_2 \cap \widetilde{C}_2$ ein $\psi \in \widetilde{C}_1$ mit $L = \partial\psi$ gibt, so folgt aus $\iota(L + \widetilde{B}_2) = 0$, daß $L \in B_2$ und

damit nach Voraussetzung $L = \partial\psi$ für ein $\psi \in \widetilde{C}_1$. D.h. $L \in \widetilde{B}_2$ und damit $L + \widetilde{B}_2 = 0$.
Ist umgekehrt ι injektiv und $L \in B_2 \cap \widetilde{C}_2$, so ist $0 = \iota^{-1}(L + B_2) = L + \widetilde{B}_2$, also $L \in \widetilde{B}_2$.
Es ist bisher nicht gelungen, diese Frage allgemein zu beantworten. Wir betrachten ein Beispiel.

Beispiel 3.2. Sei G eine endliche Gruppe, $\mathcal{F}(G)$ Bialgebra entsprechend Bsp. 2.12. Zunächst überlegen wir uns, daß $\varphi = 0$ der einzige 1-Kozyklus ist. Sei nämlich $\partial\varphi = 0$. Indem wir wieder $\mathcal{F}(G)'$ mit $\mathbb{C}G$ identifizieren, können wir für $\varphi = \sum_{x\in G} \lambda_x x$ schreiben:

$$\partial\varphi = \sum_{x\in G} (\lambda_x e \otimes x - \lambda_x x \otimes x + \lambda_x x \otimes e)$$

Da $\{x \otimes y : x, y \in G\}$ eine Basis von $\mathbb{C}G \otimes \mathbb{C}G$ ist, schließen wir, daß $\sum_{x\in G} \lambda_x e \otimes x = 0$, also $\lambda_x = 0$ für alle $x \in G$. Das heißt aber $\varphi = 0$.
Gelte nun $L = \partial\psi$, L ein hermitescher, normierter 2-Kozyklus. Wir wollen zeigen, daß aus $L \star \mu = \mu \star L$ folgt, daß ψ kommutiert, d.h. $(\psi \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \psi) \circ \Delta$, also $L_\psi = R_\psi$. Dazu betrachten wir die Terme von $\partial\psi$ zunächst einzeln. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
(\delta \otimes \psi) \star \mu &= (\delta \otimes \psi \otimes \mu) \circ \Lambda \\
&= \mu \circ (\delta \otimes \psi \otimes \mathrm{id}_2) \circ \Lambda \\
&= \mu \circ (\delta \otimes \mathrm{id} \otimes \psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta) \\
&= \mu \circ (\mathrm{id} \otimes L_\psi).
\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned}
(\psi \otimes \delta) \star \mu &= \mu \circ (L_\psi \otimes \mathrm{id}), \\
\mu \star (\delta \otimes \psi) &= \mu \circ (\mathrm{id} \otimes R_\psi), \\
\mu \star (\psi \otimes \delta) &= \mu \circ (R_\psi \otimes \mathrm{id}).
\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \mu) \star \mu &= ((\psi \circ \mu) \otimes \mu) \circ \Lambda \\
&= (\psi \otimes \mathrm{id}) \circ (\mu \otimes \mu) \circ \Lambda \\
&= (\psi \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \circ \mu \\
&= L_\psi \circ \mu
\end{aligned}$$

und analog

$$\mu \star (\psi \circ \mu) = R_\psi \circ \mu.$$

Setzen wir nun $\psi = \sum_{x \in G} \alpha_x x$ an, so folgt aus $\partial\psi \star \mu = \mu \star \partial\psi$

$$\begin{aligned} &\sum_{x \in G} \alpha_x \big(f(y)g(xy) - f(xy)g(xy) + f(xy)g(y) \big) \\ = &\sum_{x \in G} \alpha_x \big(f(y)g(yx) - f(yx)g(yx) + f(yx)g(y) \big) \end{aligned}$$

für alle $f, g \in \mathcal{F}(G), y \in G$. Setzen wir $f := \delta_{x_1}, g := \delta_{x_2}$ für $x_1 \neq x_2$, so erhalten wir $\alpha_{x_2 x_1^{-1}} = \alpha_{x_1^{-1} x_2}$. Also ist $\psi \in \mathbf{Z}(\mathbb{C}G)$ und damit $L_\psi = R_\psi$ nach Lemma 3.5.

Kapitel 4

Lévy-Prozesse

Zunächst wiederholen wir in 4.1 bekannte Resultate zu klassischen Lévy-Prozessen, wie den Zusammenhang zwischen Lévy-Prozessen und unbegrenzt teilbaren Verteilungen. In Abschnitt 4.2 folgen grundlegende Quantenstochastische Definitionen wie Quantenwahrscheinlichkeitsraum, Quantenzufallsgröße und Tensorunabhängigkeit. Anschließend stellen wir in 4.3 die wichtigsten Sätze aus der Theorie der Quantenstochastischen Differentialgleichungen auf Koalgebren nach [17] zusammen, die wir dann in 4.4 benutzen, um Lévy-Prozesse auf Deformationen von Bialgebren zu betrachten. Es wird bewiesen, daß jeder Lévy-Prozeß auf einer Deformation einer Bialgebra B eindeutige Lösung einer quantenstochastischen Differentialgleichung ist, eine Realisierung auf dem Bose-Fockraum besitzt und einem Tripel (ρ, η, ψ) entspricht, wobei ρ eine $*$-Darstellung von B auf einem Prähilbertraum D ist, η ein ρ-δ-1-Kozyklus und ψ ein L-bedingt-positives lineares Funktional. Wir zeigen in Abschnitt 4.5, daß die Lösungen von Differentialgleichungen, die sich nur im Driftterm ψ unterscheiden, im kokommutativen Fall eng zusammenhängen, und untersuchen danach, wann wir eine Lösung der Differentialgleichung mit geeignetem Driftterm auf einer nichtdeformierten Algebra erhalten. Wir beweisen, nachdem wir in Abschnitt 4.6 einige Beispiele betrachten, in 4.7, daß sich eine große Klasse von Lévy-Prozessen auf kommutativen und kokommutativen endlich erzeugten Bialgebren in einen Prozeß auf der nichtdeformierten Algebra und einen Gaußschen Prozeß auf der deformierten Algebra zerlegen läßt. Im letzten Abschnitt 4.8 betrachten wir die kommutative und nichtkommutative Koeffizientenalgebra der unitären Gruppe und zeigen in beiden Fällen, daß hier alle Lévy-Prozesse auf Deformationen durch Änderung des Driftermes als Prozesse auf den nichtdeformierten Algebren aufgefaßt werden können.

4.1 Klassische Lévy-Prozesse

Wir beginnen damit, Lévy-Prozesse auf $\mathbb{R}^d$ zu betrachten. Anschließend skizzieren wir, wie sich die Ergebnisse auf gruppenwertige Lévy-Prozesse übertragen lassen.*

Im folgenden bezeichne $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ einen Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}^d$ die Borel-σ-Algebra in $\mathbb{R}^d$.

Definition 4.1 (Zufallsgröße, Verteilung)**.** Eine meßbare Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ heißt *Zufallsgröße.*
Die *Verteilung* von X ist$_{def}$ das Bildmaß

$$\mathbb{P}_X := \mathbb{P} \circ X^{-1}.$$

Offenbar ist die Verteilung einer Zufallsgröße ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$, da

$$\mathbb{P}_X(G) = \mathbb{P}(X^{-1}(\mathbb{R}^d)) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Definition 4.2 (Faltung von Wahrscheinlichkeitsmaßen)**.** Seien ν_1, ν_2 zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}^d$. Dann definieren wir die Faltung $\nu_1 * \nu_2$ durch

$$(\nu_1 * \nu_2)(A) := \int \nu_1(A - x)\, \mathrm{d}\nu_2(x)$$

für alle $A \in \mathcal{B}^d$.

Die Faltung zweier Wahrscheinlichkeitsmaße ist wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß, da

$$(\nu_1 * \nu_2)(\Omega) = \int \nu_1(\Omega - x)\, \mathrm{d}\nu_2(x) = \int 1\, \mathrm{d}\nu_2(x) = 1.$$

Sind X_1, X_2 unabhängige Zufallgrößen, so ist die Verteilung von $X_1 + X_2$ durch

$$\mathbb{P}_{X_1+X_2} = \mathbb{P}_{X_1} * \mathbb{P}_{X_2}$$

gegeben. Es gilt

$$\int f(x)\, \mathrm{d}(\mathbb{P}_{X_1} * \mathbb{P}_{X_2})(x) = \iint f(x+y)\, \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_1}(x)\, \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_2}(y).$$

Definition 4.3 (Lévy-Prozeß)**.** Für einen stochastischen Prozeß (d.h. eine mit $\mathbb{R}_+$ indizierte Familie von Zufallsgrößen) $X = (X_t)_{t\geq 0}$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$ schreiben wir

$$X_{s,t} := X_t - X_s \tag{4.1}$$

*Die Darstellung orientiert sich an [2].

und nennen $(X_{s,t})_{s,t\geq 0}$ die Familie der *Zuwächse* von X.
Wir nennen X *Lévy-Prozeß*, falls gilt:

- $X_0 = 0$ fast sicher.
- Die Zuwächse von X sind unabhängig, d.h.

$$X_{s_1,t_1}, \dots, X_{s_n,t_n} \text{ sind unabhängig} \tag{4.2}$$

  für $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq \cdots \leq s_n \leq t_n$.
- Die Zuwächse von X sind stationär, d.h.

$$\mathbb{P}_{X_{s,s+t}} = \mathbb{P}_{X_t} \tag{4.3}$$

  für alle $s, t \geq 0$.
- X ist stochastisch stetig, d.h.

$$\mathbb{P}(|X_t - X_s| > \epsilon) \xrightarrow{t\to s+} 0 \quad \forall \epsilon > 0 \tag{4.4}$$

  für alle $s \geq 0$.

Aus der stochastischen Stetigkeit folgt die Stetigkeit in Verteilung, also $\mathbb{P}_{X_t} \xrightarrow{t\to s+} \mathbb{P}_{X_s}$für alle $s \geq 0$ und wegen der Stationarität der Zuwächse ist dies äquivalent zu $\mathbb{P}_{X_t} \xrightarrow{t\to 0+} \mathbb{P}_{X_0} = \delta_0$.

Wir untersuchen den Zusammenhang mit unbegrenzt teilbaren Verteilungen.

Definition 4.4 (Unbegrenzt teilbare Verteilung)**.** Ein ein Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ heißt *unbegrenzt teilbar*, falls es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ν_n auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ gibt, sodaß $\nu = \nu_n^{*n}$.

Offenbar ist die Verteilung von X_1 für einen Lévy Prozeß X unbegrenzt teilbar, da $X_1 = X_{\frac{1}{n}} + X_{\frac{1}{n},\frac{2}{n}} + \cdots + X_{\frac{n-1}{n},1}$ nach (4.2), (4.3) eine Summe unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen ist. Damit gilt $\mathbb{P}_{X_1} = \mathbb{P}^{*n}_{X_{\frac{1}{n}}}$.Es gilt auch die Umkehrung:

Satz 4.1. *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ ist genau dann unbegrenzt teilbar, wenn es einen Lévy-Prozeß X mit $\nu = \mathbb{P}_{X_1}$ gibt.*

Definition 4.5 (Fouriertransformation, charakteristische Funktion)**.** Sei ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}^d$. Dann ist$_{def}$ die *Fouriertransformierte* von ν die Funktion

$$\widehat{\nu}(u) := \int e^{\mathrm{i}\langle u,x\rangle} \, \mathrm{d}\nu(x).$$

Sei X eine Zufallsgröße. Dann ist$_{def}$ die *charakteristische Funktion* von X die Funktion

$$\chi_X = \widehat{\mathbb{P}_X} = \mathbb{E}(e^{\mathrm{i}tX}).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\widehat{\nu_1 * \nu_2}(u) &= \int e^{\mathrm{i}\langle u,(x+y)\rangle} \,\mathrm{d}\nu_1(x)\,\mathrm{d}\nu_2(y)\\ &= \left(\int e^{\mathrm{i}\langle u,x\rangle}\,\mathrm{d}\nu_1(x)\right)\left(\int e^{\mathrm{i}\langle u,y\rangle}\,\mathrm{d}\nu_2(y)\right)\\ &= \widehat{\nu_1}(u)\;\widehat{\nu_2}(u).\end{aligned}$$

für alle $u \in \mathbb{R}^d$.

Lévy-Prozesse auf $\mathbb{R}^d$ lassen sich mittels der Lévy-Khintchine-Formel klassifizieren.

Satz 4.2 (Lévy-Khintchine-Formel, entnommen [2], Theorem 2.5)**.** *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ ist genau dann unbegrenzt teilbar, wenn es einen Vektor $b \in \mathbb{R}^d$, eine positiv semi-definite $d \times d$-Matrix A und ein Lévy-Maß ν auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ gibt, sodaß für alle $u \in \mathbb{R}^d$*

$$\hat{\mu}(u) = \exp\left(\mathrm{i}\,\langle b,u\rangle - \frac{1}{2}\,\langle u, Au\rangle + \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} (e^{\mathrm{i}\langle u,y\rangle} - 1 - \mathrm{i}\,\langle u,y\rangle\,\chi_{\hat{B}}(y))\,\mathrm{d}\nu(y)\right)$$

wobei $\hat{B} = \left\{y \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; ||y|| < 1\right\}$.

Tatsächlich läßt sich einiges auf den Fall von allgemeineren Gruppen übertragen. Zunächst kann man die Definition der Faltung kopieren:

Definition 4.6 (Faltung für Funktionen auf Gruppen)**.** Seien ν_1, ν_2 zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(G, \mathcal{G})$, G eine meßbare Gruppe, $\mathcal{G}$ die zugehörige σ-Algebra. (Wir schreiben in Zukunft einfach G und gehen stets von meßbaren Gruppen aus). Dann definieren wir die Faltung $\nu_1 * \nu_2$ durch

$$(\nu_1 * \nu_2)(A) := \int \mathbb{1}_A(xy)\,\mathrm{d}\nu_1(x)\,\mathrm{d}\nu_2(y)$$

für alle $A \in \mathcal{G}$.

Wir wollen sehen, was das mit der Faltung aus Def. 2.9 zu tun hat. Sei G endlich. Dann ist $\mathcal{F}(G)$ eine Koalgebra gemäß Bsp. 2.9. Fassen wir Wahrscheinlichkeitsmaße auf G als lineare Funktionale auf $\mathcal{F}(G)$ auf vermöge

$\nu(f) := \int f \mathrm{d}\nu$, so stimmen die Faltungen überein:

$$\begin{aligned}(\nu_1 \star \nu_2)(f) &= (\nu_1 \otimes \nu_2)(\Delta f)\\ &= \int f_{(1)}(x)\,\mathrm{d}\nu_1(x) \int f_{(2)}(y)\,\mathrm{d}\nu_2(y)\\ &= \iint f_{(1)}(x) f_{(2)}(y)\,\mathrm{d}\nu_1(x)\,\mathrm{d}\nu_2(y)\\ &= \iint \Delta f(x,y)\,\mathrm{d}\nu_1(x)\,\mathrm{d}\nu_2(y)\\ &= \iint f(xy)\,\mathrm{d}\nu_1(x)\,\mathrm{d}\nu_2(y)\\ &= \int f(x)\,\mathrm{d}(\nu_1 * \nu_2)(x).\end{aligned}$$

Die gleiche Rechnung funktioniert, wenn G eine kompakte Gruppe oder eine lokalkompakte, abelsche Gruppe ist, allerdings müssen wir $\mathcal{F}(G)$ durch die Algebra der repräsentativen Funktionen $\mathcal{R}(G)$ ersetzen. Ist nämlich G unendlich, so ist $\mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G) \subset \mathcal{F}(G \times G)$. $\mathcal{R}(G)$ ist die Menge all jener Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$, für die $\Delta f \in \mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G)$. Man kann zeigen, daß dann sogar $\Delta f \in \mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(G)$ und daß dies auch genau die Koeffizientenfunktionen endlichdimensionaler Darstellungen von G sind. Zur Motivation reicht uns das Bespiel einer endlichen Gruppe aus und wir verweisen für mehr Details auf [1] Abschnitt 2.2.

Für beliebige toplogische Gruppen kann man nun wieder Lévy-Prozesse definieren. Im Falle von lokalkompakten abelschen Gruppen bzw. kompakten Gruppen, lassen sich Formeln für die Generatoren der Halbgruppen von Operatoren $T_t : C_0(G) \to C_0(G)$

$$(T_t f)(y) := \mathbb{E}(f(yX_t))$$

angeben, wobei X ein Lévy-Prozeß ist und $C_0(G)$ die Algebra der stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktionen auf G bezeichnet.

4.2 Quantenwahrscheinlichkeitsräume und Quantenzufallsgrößen

Definition 4.7 (Quantenwahrscheinlichkeitsraum)**.** Ein lineares Funktional Φ auf einer $*$-Algebra $\mathcal{A}$ heißt *Zustand*, falls es positiv und normiert ist, d.h.

$$\Phi(a^*a) \geq 0 \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad \text{und} \quad \Phi(\mathbb{1}) = 1.$$

Ein *Quantenwahrscheinlichkeitsraum* (QWR) ist$_{def}$ ein Paar $(\mathcal{A}, \Phi)$ bestehend aus einer $*$-Algebra $\mathcal{A}$ und einem Zustand Φ auf $\mathcal{A}$.

Ist $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{A} = \mathcal{L}^\infty(\Omega)$, $\Phi(f) = \int f \mathrm{d}\mathbb{P}$, so ist $(\mathcal{A}, \Phi)$ ein QWR.
Ist umgekehrt $(\mathcal{A}, \Phi)$ ein QWR und $\mathcal{A}$ eine kommutative von-Neumann-Algebra, so ist $\mathcal{A} \cong \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ für einen lokalkompakten topologischen Raum Ω. Setzen wir $\mathfrak{F} := \mathcal{B}(\Omega)$ und $\mathbb{P}(A) := \Phi(\mathbb{1}_A)$ für $A \in \mathfrak{F}$, so ist $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.
Manche Autoren verlangen von einem QWR von vornherein, daß $\mathcal{A}$ eine von-Neumann-Algebra ist.

Definition 4.8 (Quantenzufallsgröße, Verteilung)**.** Sei $\mathcal{B}$ eine $*$-Algebra und $(\mathcal{A}, \Phi)$ ein QWR. Eine Abbildung $j : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ heißt *Quantenzufallsgröße* (QZG), falls j ein $*$-Homomorphismus ist.
Der Zustand $\varphi := \Phi \circ j$ heißt *Verteilung* von j.

Ist $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(E, \mathcal{E})$ ein meßbarer Raum und $X : \Omega \to E$ eine Zufallsgröße, so können wir einen $*$-Homomorphismus $j_X : \mathcal{L}^\infty(E) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ definieren, indem wir für $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$

$$(j_X(f))(\omega) := f(X(\omega)) \quad \forall \omega \in \Omega$$

setzen, also $j_X(f) := f \circ X$.
Die Verteilung von X stimmt mit der Verteilung von j_X in dem Sinne überein, daß

$$\int f(e)\, \mathrm{d}\mathbb{P}_X(e) = \int f(X(\omega))\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \Phi(f \circ X) = (\Phi \circ j_X)(f)$$

für alle $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$.
Eine der wichtigsten Definitionen der Stochastik ist die der stochastischen Unabhängigkeit. Wir definieren:

Definition 4.9 ((Tensor-)Unabhängigkeit)**.** Sei $(\mathcal{A}, \Phi)$ ein QWR. Eine Familie $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ von $*$-Unteralgebren heißt *unabhängig*, falls die folgenden beiden Bedingunggen gelten:

- Für alle $a_k \in \mathcal{A}_k, a_l \in \mathcal{A}_l$ mit $l \neq k$ gilt

  $$[a_k, a_l] = 0,$$

  d.h. die Unteralgebren vertauschen.

- Sind $i_1, \ldots, i_n$ paarweise verschieden, $a_k \in \mathcal{A}_k$ für $k = i_1, \ldots, i_n$, so gilt

  $$\Phi(a_{i_1} \ldots a_{i_n}) = \Phi(a_{i_1}) \ldots \Phi(a_{i_n}),$$

  d.h. Φ faktorisiert.

Eine Familie $(j_i : \mathcal{B}_i \to \mathcal{A})_{i\in I}$ von QZV'en heißt *unabhängig*, falls die Algebren $j_i(\mathcal{B}_i)$ unabhängig sind.

Zunächst stellen wir fest, daß dies eine Verallgemeinerung des Unabhängigkeitsbegriffs für Wahrscheinlichkeitsräume ist. Sei $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_i : \Omega \to E_i$, $i \in I$ seien Zufallsvariablen. Wir setzen $j_i = j_{X_i}$. Da alle Algebren hier kommutativ sind, ist die erste Bedingung für die j_i trivialerweise erfüllt. Die zweite Bedingung übersetzt sich in

$$\int f_1(X_{i_1})(\omega)\dots f_n(X_{i_n})(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \int f_1(X_{i_1})(\omega)\,\mathrm{d}\omega \dots \int f_n(X_{i_n})(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

für alle $i_1, \dots, i_n \in I$ und alle $f_k \in \mathcal{L}^\infty(E_{i_k})$. Das ist aber äquivalent zur Unabhängigkeit der X_i.

4.3 Quantenstochastische Differentialgleichungen auf Koalgebren

In diesem Abschnitt wollen wir einen Lösungsbegriff für quantenstochastische Differentialgleichungen einführen und diese auf dem Bose-Fockraum realisieren. Die Darstellung ist eng angelehnt an [17], wo sich auch die entsprechenden Beweise finden lassen. Siehe auch [14].

Zunächst definieren wir den Bose-Fockraum. Eine ausführliche Darstellung findet man in [15], Kapitel II Abschnitt 19ff.

Definition 4.10 (Fock-Raum, Exponentialvektoren)**.** Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Dann definieren wir den *vollen Fockraum* über $\mathcal{H}$ als

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n}.$$

Dabei sind die direkte Summe und die Tensorprodukte als vervollständigt zu verstehen, sodaß $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ mit dem induzierten Skalarprodukt wieder ein Hilbertraum ist.
Der *Symmetrisierungsoperator*

$$P_s(f_1 \otimes \dots \otimes f_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\pi\in\mathcal{S}_n} f_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes f_{\pi(n)}$$

ist dann eine Projektion, wobei $\mathcal{S}_n$ ist die Menge aller Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ bezeichnet.

Wir definieren weiterhin das *symmetrische Tensorprodukt*

$$\mathcal{H}^{\otimes_s n} := P_s \mathcal{H}^{\otimes n}$$

und schreiben

$$f_1 \otimes_s \cdots \otimes_s f_n := P_s(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n).$$

Außerdem definieren wir den *symmetrischen Fockraum* oder*Bose-Fockraum*, hier im weiteren einfach *Fockraum* genannt, als

$$\Gamma(\mathcal{H}) := P_s \mathcal{F}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes_s n}.$$

Für einen Vektor $v \in \mathcal{H}$ definieren wir den zugehörigen *Exponentialvektor*

$$\mathcal{E}(v) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} v^{\otimes n}$$

Der Vektor $\mathcal{E}(0) = (1, 0, \dots) =: \Omega$ heißt *Vakuumvektor.*
Für die lineare Hülle der Exponentialvektoren schreiben wir

$$\mathcal{E} := \mathrm{Lin}\left\{\mathcal{E}(v) | v \in \mathcal{H}\right\}.$$

Behauptung. Es gelten die Gleichungen

$$\langle \mathcal{E}(v), \mathcal{E}(w) \rangle = e^{\langle v,w \rangle}$$

und

$$\langle v_1 \otimes_s \cdots \otimes_s v_n, w_1 \otimes_s \cdots \otimes_s w_n \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{i,j=1,\dots,n} \langle v_i, w_j \rangle$$

Beweis. Wir rechnen

$$\langle \mathcal{E}(v), \mathcal{E}(w) \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} v^{\otimes n}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} w^{\otimes n} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle v, w \rangle^n = e^{\langle v,w \rangle}$$

sowie

$$\left\langle \bigotimes_{i=1}^{n}{}_s\, v_i, \bigotimes_{j=1}^{n}{}_s\, w_j \right\rangle = \frac{1}{n!^2} \sum_{\pi,\sigma \in \mathcal{S}_n} \left\langle \bigotimes_{i=1}^{n} v_{\pi(i)}, \bigotimes_{j=1}^{n} v_{\sigma(j)} \right\rangle = \frac{1}{n!} \sum_{i,j=1}^{n} \langle v_i, w_j \rangle .$$

□

Die Menge der Exponentialvektoren ist eine totale (d.h. $\mathcal{E}$ ist dicht), linear unabhängige Teilmenge von $\Gamma(\mathcal{H})$ (einen Beweis findet man z.B. in

[15]). Wir können also Operatoren auf $\Gamma(\mathcal{H})$ durch ihre Wirkung auf den Exponentialvektoren oder durch ihre Wirkung auf den endlichen Tensorprodukten definieren.

Definition 4.11 (Erzeuger, Erhalter, Vernichter)**.** Wir definieren drei Familien von dicht definierten Operatoren auf dem Fockraum $\Gamma(\mathcal{H})$, indem wir für $v \in \mathcal{H}$ und $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$\begin{aligned} A(v)(v_1 \otimes_s \cdots \otimes_s v_n) &:= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \langle v, v_k \rangle \, v_1 \otimes_s \cdots \otimes_s \hat{v}_k \otimes_s \cdots \otimes_s v_n \\ A^*(v)(v_1 \otimes_s \cdots \otimes_s v_n) &:= \sqrt{n+1} \; v \otimes_s v_1 \otimes_s \cdots \otimes_s v_n \\ \Lambda(T)(v_1 \otimes_s \cdots \otimes_s v_n) &:= \sum_{k=1}^{n} v_1 \otimes_s \cdots \otimes_s T(v_k) \otimes_s \cdots \otimes_s v_n \end{aligned}$$

setzen, wobei der Hut die Auslassung des entsprechenden Faktors kennzeichnet. Insbesondere ist $A(v)\Omega = 0$. Die Operatoren $A(v)$ heißen *Vernichter* die $A^*(v)$ *Erzeuger* und die $\Lambda(T)$ *Erhalter*. Alle diese Operatoren sind sowohl auf den endlichen Tensoren als auch auf den Exponentialvektoren definiert.

Γ überführt die direkte Summe von Hilberträumen in das Tensorprodukt der entsprechenden Fockräume, d.h. es gilt

$$\Gamma(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) \cong \Gamma(\mathcal{H}_1) \otimes \Gamma(\mathcal{H}_2).$$

Der Isomorphismus wird durch

$$\mathcal{E}(v + w) \mapsto \mathcal{E}(v) \otimes \mathcal{E}(w)$$

hergestellt.
Wir betrachten vor allem den Fockraum $\Gamma(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}))$, wobei $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ der Hilbertraum der quadratintegrablen (Klassen von) Funktionen auf $\mathbb{R}_+$ mit Werten im Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist. Man stelle sich $\mathbb{R}_+$ als Zeit und $\mathcal{H}$ als Zustandsraum vor. Der folgende Satz gibt eine Interpretation dieses Fockraumes als „direktes Integral“.

Satz 4.3 (Direktes Integral, [17])**.** *Bezeichne S das System der endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}_+$, S_n das System der n-elementigen Teilmengen von $\mathbb{R}_+$. Identifizieren wir die Menge $\{t_1 < \cdots < t_n\} \in S_n$ mit dem aufsteigend geordneten n-Tupel $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$, so erhalten wir ein σ-endliches Maß μ auf S, indem wir setzen:*

- *$\mu|_{S_0}$ ist das Maß mit Masse 1 in $\emptyset$.*
- *$\mu|_{S_n}$ für $n \geq 1$ ist die Einschränkung des Lebesguemaßes auf $S_n \subseteq \mathbb{R}_+^n$.*

Wir erhalten einen unitären Operator

$$U : \Gamma(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})) \to \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^2(S_n, \mathcal{H}^{\otimes n}, \mu|_{S_n}) =: \int_S \mathcal{H}^{\otimes\omega} \mathrm{d}\omega$$

indem wir für $f \in \Gamma(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}))$

$$U(\mathcal{E}(f))(\omega) := \begin{cases} 1 & \textit{falls } \omega = \emptyset \\ f(t_1) \otimes \cdots \otimes f(t_n) & \textit{falls } \omega = \{t_1, \ldots, t_n\} \in S_n \end{cases}$$

setzen.
Unter $\mathcal{H}^{\otimes\omega}$ *verstehen wir dabei den Raum* $\mathcal{H}_{t_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{t_n}$*,* $\mathcal{H}_{t_k} \cong \mathcal{H}$*.*

Das quantenstochastische Integral soll zunächst für Kerne im Sinne von H.Maassen definiert werden (vgl. auch [12]). Wir definieren (teils wörtlich so in [17]):

Definition 4.12 (Kern, beschränkter Kern, adjungierbarer Kern)**.** Sei D ein dichter Untervektorraum des Hilbertraumes $\mathcal{H}$. Ein *Kern* ist eine Abbildung

$$k : S^3 \to \dot{\bigcup_{\omega_1,\omega_2 \in S}} \mathbf{L}(D^{\otimes\omega_1}, D^{\otimes\omega_2})$$

sodaß

1. $k(\sigma, \tau, \rho) \in \mathbf{L}(D^{\otimes(\tau\cup\rho)}, D^{\otimes(\sigma\cup\tau)})$,

2. $k(\sigma, \tau, \rho) = 0$ falls σ, τ, ρ nicht paarweise disjunkt sind.

Dabei bezeichnen wir mit $\mathbf{L}(D_1, D_2)$ die Menge der linearen Abbildungen von D_1 nach D_2.
Ein Kern k heißt *beschränkt*, falls gilt:

1. Zu jedem endlichdimensionalen Unterraum E_1 von D existiert ein endlichdimensionaler Unterraum E_2, sodaß $k(\sigma, \tau, \rho)E_1^{\otimes(\tau\cup\rho)} \subseteq E_2^{\otimes(\sigma\cup\tau)}$ für alle $\sigma, \tau, \rho \in S$.

2. Für alle solchen E_1, E_2 und alle $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ ist die eingeschränkte Abbildung

$$S_{n_1} \times S_{n_2} \times S_{n_3} \to \mathbf{L}\left(E_1^{\otimes(n_2+n_3)}, E_2^{\otimes(n_1+n_2)}\right)$$
$$(\sigma, \tau, \rho) \mapsto k(\sigma, \tau, \rho)|_{E_1^{\otimes(n_2+n_3)}}$$

meßbar.

3. Zu jedem endlichdimensionalen Unterraum E gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}_+$, sodaß $||k(\sigma,\tau,\rho)|_{E^{\otimes(\tau\cup\rho)}}|| \le c^{|\sigma\cup\tau\cup\rho|}$ für alle $\sigma,\tau,\rho \in S$.

4. Es gibt eine beschränkte Teilmenge C von $\mathbb{R}_+$, sodaß $k(\sigma,\tau,\rho) = 0$ falls nicht $\sigma\cup\tau\cup\rho \subset C$.

Ein beschränkter Kern k heißt *adjungierbar*, falls die lineare Abbildung $k(\sigma,\tau,\rho)$ für alle $\sigma,\tau,\rho \in S$ adjungierbar ist und der durch

$$\widetilde{k}(\sigma,\tau,\rho) := k(\sigma,\tau,\rho)^*$$

definierte Kern wieder beschränkt ist.

Beschränkten, adjungierbaren Kernen können adjungierbare Operatoren auf einem gemeinsamen dichten, invarianten Definitionsbereich zugeordnet werden.
Der gemeinsame Definitionsbereich $\mathcal{E}_D$ ist der Vektorraum, der aus allen $F \in \Gamma(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+,\mathcal{H}))$ besteht, für die die folgenden beiden Bedingungen gelten:

1. Es gibt einen endlichdimensionalen Unterraum E von D, sodaß $F(\omega) \in E^{\otimes\omega}$ für fast alle $\omega \in S$.

2. Das Integral $\int_S \alpha^{|\omega|}\,||F(\omega)||^2\,\mathrm{d}\omega$ ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$ endlich.

Satz 4.4. *Ist k ein berschränkter Kern, so definiert die Gleichung*

$$\underline{k}F(\omega) := \sum_{\sigma\dot\cup\tau\dot\cup\epsilon=\omega} \int_S k(\sigma,\tau,\rho)F(\epsilon\cup\tau\cup\rho)\mathrm{d}\rho \tag{4.5}$$

eine lineare Abbildung von $\mathcal{E}_D$ nach $\mathcal{E}_D$.
Ist k adjungierbar, so ist auch $\underline{k}$ adjungierbar und es gilt

$$\underline{k}^* = \underline{\widetilde{k}}$$

Sind k_1, k_2 beschränkte Kerne, so gilt

$$\underline{k_1} \circ \underline{k_2} = \underline{k_1 k_2},$$

wenn wir

$$k_1k_2(\sigma,\tau,\rho) := \sum_{\substack{\sigma_1\dot\cup\sigma_2\dot\cup\sigma_3=\sigma\\ \tau_1\dot\cup\tau_2\dot\cup\tau_3=\tau\\ \rho_1\dot\cup\rho_2\dot\cup\rho_3=\rho}} \int_S k_1\left(\sigma_1, \sigma_2\dot\cup\tau_1\dot\cup\tau_2, \rho_1\dot\cup\rho_2\dot\cup\epsilon\right) k_2\left(\epsilon\dot\cup\sigma_2\dot\cup\sigma_3, \tau_2\dot\cup\tau_3\dot\cup\rho_2, \rho_3\right) \mathrm{d}\epsilon$$

setzen, und k_1k_2 ist dann ebenfalls ein beschränkter Kern. Außerdem ist k_1k_2 adjungierbar, falls k_1 und k_2 dies sind.

Zur Motivation der Definition von $\underline{k}$ siehe [14], S. 89ff. Ein Beweis des vorangehenden Satzes findet sich in [17].

Definition 4.13 (Adaptierter, lokal gleichmäßig beschränkter kernwertiger Prozeß)**.** Unter einem *kernwertigen Prozeß* verstehen wir eine Familie $(k_{st})_{s,t\in\mathbb{R}_+}$ von Kernen. Ein Prozeß heißt *adaptiert*, falls

$$k_{st}(\sigma,\tau,\rho)=0,\ \text{außer wenn } \sigma\cup\tau\cup\rho\subset[s,t[\,,$$

fast überall und ein adaptierter Prozeß heißt *lokal gleichmäßig beschränkt* , falls gilt:

1. Zu jedem endlichdimensionalen Unterraum E_1 von D und jeder beschränkten Teilmenge $M\subset\mathbb{R}_+$ existiert ein endlichdimensionaler Unterraum E_2, sodaß

$$k_{st}(\sigma,\tau,\rho)E_1^{\otimes(\tau\cup\rho)}\subseteq E_2^{\otimes(\sigma\cup\tau)}$$

   für alle $\sigma,\tau,\rho\in S$.

2. Für alle solchen M, E_1, E_2 und alle $n_1,n_2,n_3\in\mathbb{N}$ ist die eingeschränkte Abbildung

$$\begin{aligned}S_{n_1}\times S_{n_2}\times S_{n_3}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+&\to\mathbf{L}\left(E_1^{\otimes(n_2+n_3)},E_2^{\otimes(n_1+n_2)}\right)\\(\sigma,\tau,\rho,s,t)&\mapsto k_{st}(\sigma,\tau,\rho)|_{E_1^{\otimes(n_2+n_3)}}\end{aligned}$$

   meßbar.

3. Zu jedem endlichdimensionalen Unterraum E und jeder beschränkten Teilmenge $M\subset\mathbb{R}_+$ gibt es eine Konstante $c\in\mathbb{R}_+$, sodaß für alle $\sigma,\tau,\rho\in S$

$$||k_{st}(\sigma,\tau,\rho)|_{E^{\otimes(\tau\cup\rho)}}||\leq c^{|\sigma\cup\tau\cup\rho|}.$$

Der Prozeß heißt *adjungierbar*, falls alle k_{st} adjungierbar sind.

Bemerkung. Die vierte Bedingung für einen beschränkten Kern folgt aus der Adaptiertheit, sodaß die k_{st} insbesondere beschränkte Kerne sind. Wir können also einen Operatorprozeß mit dem Kernprozeß assoziieren. Während die Beschränktheitsbedingungen technische Notwendigkeiten sind, um endliche Integrale zu erhalten, ist die Adaptiertheit eine wesentliche Eigenschaft stochastischer Prozesse, die aussagt, daß der Prozeß „nicht in die Zukunft schaut“. Die Adaptiertheit des Kernprozesses k_{st} läßt sich in die entsprechende Eigenschaft des operatorwertigen Prozesses $\underline{k_{st}}$ übersetzen. Wir schreiben $\Gamma_s^t := \Gamma\left(\mathcal{L}^2([s,t[\,,\mathcal{H})\right)$. Aus

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+) = \mathcal{L}^2([0,s[\,,\mathcal{H}) \oplus \mathcal{L}^2([s,t[\,,\mathcal{H}) \oplus \mathcal{L}^2([t,\infty[\,,\mathcal{H})$$

folgt

$$\Gamma\left(\mathcal{L}^2([s,t[\,,\mathcal{H})\right) = \Gamma\left(\mathcal{L}^2([0,s[\,,\mathcal{H})\right) \otimes \Gamma\left(\mathcal{L}^2([s,t[\,,\mathcal{H})\right) \otimes \Gamma\left(\mathcal{L}^2([t,\infty[\,,\mathcal{H})\right)$$

und damit auch eine Zerlegung

$$\mathcal{E}_D = (\mathcal{E}_D)_0^s \otimes (\mathcal{E}_D)_s^t \otimes (\mathcal{E}_D)_t^\infty.$$

Die Adaptiertheit von k_{st} ist nun gleichwertig dazu, daß es eine Familie $(K_{st})_{s,t\in\mathbb{R}_+}$ gibt, sodaß

- $K_{st} \in \mathbf{L}((\mathcal{E}_D)_s^t)$ für alle $s,t \in \mathbb{R}_+$,
- $\underline{k_{st}} = \mathrm{id} \otimes K_{st} \otimes \mathrm{id}$.

Für adaptierte Prozesse führen wir jetzt die Integrale ein:

Definition 4.14 (Erzeuger-, Vernichter-, Erhalterprozeß)**.** Wir definieren für $\xi \in D$, $T \in \mathbf{L}(D)$ zunächst die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} a(t)(\xi):&\quad \mathbb{C} &&\to D^{\otimes\{t\}}\\ a^*(t)(\xi):&\quad D^{\otimes\{t\}} &&\to \mathbb{C}\\ \lambda(t)(T):&\quad D^{\otimes\{t\}} &&\to D^{\otimes\{t\}} \end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned} a(t)(\xi)(z) &= z\xi_t\\ a^*(t)(\xi)(\zeta_t) &= \langle \xi, \zeta_t\rangle\\ \lambda(t)(T)(\zeta_t) &= T\zeta_t. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet ξ_t den Vektor ξ, aufgefaßt als Element von $D^{\otimes\{t\}}$. Die

Abbildungen lassen sich für $\omega \in S$, $t \notin \omega$ fortsetzen zu

$$\begin{aligned} a(t)(\xi): \quad & D^{\otimes\omega} && \to D^{\otimes\omega\cup\{t\}} \\ a^*(t)(\xi): \quad & D^{\otimes\omega\cup\{t\}} && \to D^{\otimes\omega} \\ \lambda(t)(T): \quad & D^{\otimes\omega\cup\{t\}} && \to D^{\otimes\omega\cup\{t\}}. \end{aligned}$$

Nun führen wir die folgenden Kerne ein, die zu den elementaren Erzeuger-, Vernichter- und Erhalterprozessen gehören:

$$a_t^*(\xi)(\sigma,\tau,\rho) = \begin{cases} a^*(t)(\xi) & \text{falls } \tau=\rho=\emptyset, \sigma=\{t\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$a_t(\xi)(\sigma,\tau,\rho) = \begin{cases} a(t)(\xi) & \text{falls } \sigma=\tau=\emptyset, \rho=\{t\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\lambda_t(T)(\sigma,\tau,\rho) = \begin{cases} \lambda(t)(T) & \text{falls } \sigma=\rho=\emptyset, \tau=\{t\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} \underline{a_t^*}(\xi) &= A^*(\chi_{[0,t[}\xi) =: A_t^*(\xi) \\ \underline{a_t}(\xi) &= A(\chi_{[0,t[}\xi) =: A_t(\xi) \\ \underline{\lambda_t}(T) &= \Lambda(\chi_{[0,t[}T) =: \Lambda_t(T), \end{aligned}$$

wobei $\chi_{[0,t[}$ die Indikatorfunktion des Intervalls bezeichnet und in der dritten Gleichung diese Indikatorfunktion mit dem entsprechenden Multiplikationsoperator auf $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+,\mathcal{H})$ identifiziert wird.

Definition 4.15 (Quantenstochastisches Integral)**.** Für einen lokal gleichmäßig beschränkten Prozeß k_{st} definieren wir

$$\left(\int_s^t k_{sr}\mathrm{d}a_r^*(\xi)\right)(\sigma,\tau,\rho) := \begin{cases} k_{s\hat\sigma}(\overline{\sigma},\tau,\rho)a^*(\hat\sigma)(\xi) & \text{falls } \sigma\neq\emptyset, s\leq\hat\sigma<t, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\left(\int_s^t k_{sr}\mathrm{d}a_r(\xi)\right)(\sigma,\tau,\rho) := \begin{cases} k_{s\hat\rho}(\sigma,\tau,\overline{\rho})a(\hat\rho)(\xi) & \text{falls } \rho\neq\emptyset, s\leq\hat\rho<t, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\left(\int_s^t k_{sr}\mathrm{d}\lambda_r^*(T)\right)(\sigma,\tau,\rho) := \begin{cases} k_{s\hat\tau}(\sigma,\overline{\tau},\rho)\lambda(\hat\tau)(T) & \text{falls } \tau\neq\emptyset, s\leq\hat\tau<t, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\hat{\omega}$ das größte Element von $\omega \in S$ und $\overline{\omega}$ die Restmenge $\omega \backslash \hat{\omega}$ bezeichnet.
Außerdem können wir wegen Beschränktheit und Meßbarkeit unserer Kerne das Zeitintegral durch Einschränkung auf endlichdimensionale Unterräume von D definieren. Sei E ein solcher Unterraum von D, dann definieren wir

$$\left(\int_s^t k_{sr} \mathrm{d}r\right)(\sigma, \tau, \rho)|_{E^{\otimes(\tau\cup\rho)}} := \int_s^t \left(k_{sr}(\sigma, \tau, \rho)|_{E^{\otimes(\tau\cup\rho)}}\right) \mathrm{d}r.$$

Für die zugehörigen operatorwertigen Prozesse setzen wir

$$\int_s^t \underline{k_{st}} \mathrm{d}\underline{\alpha_t} := \underline{\int_s^t k_{st} \mathrm{d}\alpha_t},$$

wobei α_t eine Linearkombination von a_t, a_t^*, λ_tund t ist.
Anstelle von $x_{st} = \int_s^t k_{st} \mathrm{d}\alpha_t$ schreiben wir auch kurz $\mathrm{d}x_{st} = k_{st} \mathrm{d}\alpha_t$ und entsprechend für die Operatoren $j_{st} := \underline{x_{st}}$

$$\mathrm{d}j_{st} = \underline{k_{st}} \mathrm{d}\underline{\alpha_t}$$

Wir beachten einige Rechenregeln für das quantenstochastische Integral. Wir wollen eine Quanten-Itô-Formel formulieren. Zunächst setzen wir

$$\mathcal{I} := \mathrm{Lin}\left\{\mathrm{d}a_t^*(\xi), \mathrm{d}a_t(\xi), \mathrm{d}\lambda_t(T), \mathrm{d}t \mid \xi \in D, T \in \mathbf{H}(D)\right\},$$

wobei $\mathbf{H}(D)$ den Raum der adjungierbaren linearen Abbildungen von D nach D bezeichnet, als Raum der formalen Linearkombinationen der Ausdrücke $\mathrm{d}a_t^*(\xi)$, $\mathrm{d}a_t(\xi)$, $\mathrm{d}\lambda_t(T)$ und $\mathrm{d}t$. Auf $\mathcal{I}$ definieren wir eine Multiplikation entsprechend der folgenden Tafel:

	$\mathrm{d}a_t^*(\xi_1)$	$\mathrm{d}a_t(\xi_1)$	$\mathrm{d}\lambda_t(T_1)$	$\mathrm{d}t$
$\mathrm{d}a_t^*(\xi_1)$	0	0	0	0
$\mathrm{d}a_t(\xi_1)$	$\langle\xi_1, \xi_2\rangle \mathrm{d}t$	0	$\mathrm{d}a_t(T_2^*\xi_1)$	0
$\mathrm{d}\lambda_t(T_1)$	$\mathrm{d}a_t^*(T_1\xi_2)$	0	$\mathrm{d}\lambda_t(T_1T_2)$	0
$\mathrm{d}t$	0	0	0	0

Satz 4.5 (Quanten-Itô-Formel,[17] Satz 2.4.5)**.** *Seien $k_{st}^{(1)}, k_{st}^{(2)}$ lokal gleichmäßig beschränkte, adaptierte kernwertige Prozesse, $\mathrm{d}\alpha^{(1)}, \mathrm{d}\alpha^{(2)} \in \mathcal{I}$. Setzen wir*

$$x_{st}^{(i)} := \int_s^t k_{st}^{(i)} \mathrm{d}\alpha^{(i)}$$

so gilt

$$\begin{aligned} x_{st}^{(1)}x_{st}^{(2)} = & \int_s^t (k_{st}^{(1)}x_{st}^{(2)})\mathrm{d}\alpha^{(1)} + \int_s^t (x_{st}^{(1)}k_{st}^{(2)})\mathrm{d}\alpha^{(2)} \\ & + \int_s^t (k_{st}^{(1)}k_{st}^{(2)})(\mathrm{d}\alpha^{(1)}\mathrm{d}\alpha^{(2)}) \end{aligned}$$

Wir schreiben auch hier (und meinen damit die obige Gleichung)

$$\mathrm{d}(x_{st}^{(1)}x_{st}^{(2)}) = \mathrm{d}x_{st}^{(1)}x_{st}^{(2)} + x_{st}^{(1)}\mathrm{d}x_{st}^{(2)} + \mathrm{d}x_{st}^{(1)}\mathrm{d}x_{st}^{(2)}$$

und entsprechend gelten diese Gleichungen für die zugehörigen Operatorwertigen Prozesse, wenn wir $j_{st}^{(i)} := \underline{x_{st}^{(i)}}$ *setzen und* j *statt* x *schreiben, sowie* α *durch* $\underline{\alpha}$ *ersetzen.*

Satz 4.6 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz, Schürmann [17] Satz 2.5.1)**.** *Sei* C *eine Koalgebra und seien*

- $\rho : C \to \mathbf{L}(D)$ *linear*
- $\eta : C \to D$ *linear*
- $\theta : C \to D$ *antilinear*
- $\psi : C \to \mathbb{C}$ *linear.*

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Familie lokal gleichmäßig beschränkter kernwertiger Prozesse $(k_{st}(b))_{b\in C}$*, sodaß*

$$\begin{aligned} k_{st}(b) = \delta(b)\Omega^{(3)} + \int_s^t k_{sr}(b_{(1)}) \Big(& \mathrm{d}a_r^*(\eta(b_{(2)})) + \mathrm{d}a_r(\theta(b_{(2)})) \\ & + \mathrm{d}\lambda_r \left(\rho(b_{(2)}) - \delta(b_{(2)})\,\mathrm{id}\right) + \psi(b_{(2)})\mathrm{d}r \Big). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen wir mit $\Omega^{(3)}$ *den Kern der Identitätsabbildung,*

$$\Omega^{(3)}(\sigma,\tau,\rho) = \begin{cases} \mathrm{id} & \textit{falls } \sigma = \tau = \rho = \emptyset, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Schreiben wir

$$I_t(b) = A_t^*(\eta(b)) + A_t^*(\theta(b)) + \Lambda_t((\rho - \delta)(b)) + \psi(b)t$$

so können wir den Satz auch für die Operatoren formulieren. Wir zählen auch noch wichtige Eigenschaften dieser Operatoren auf:

Satz 4.7. *Sei eine Koalgebra C mit Abbildungen η, θ, ρ, ψ wie in Satz 4.6 gegeben. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Familie $j_{st} : C \to \mathbf{L}(\mathcal{E}_D)$, sodaß gilt:*

- *Die $j_{st}(b)$ haben eine Integraldarstellung gemäß (4.5) bezüglich eines gleichmäßig integrierbaren kernwertigen Prozesses.*
- *Die j_{st} erfüllen die Integralgleichung*

$$j_{st}(b) = \delta(b)\,\mathrm{id} + \int_s^t (j_{st} \star \mathrm{d}I_t)(b).$$

Die Integralgleichung wird auch oft (ohne Bedeutungsunterschied) in differentieller Form geschrieben. Sie liest sich dann

$$\begin{aligned} \mathrm{d}j_{st}(b) &= (j_{st} \star \mathrm{d}I_t)(b) \\ j_{ss}(b) &= \delta(b)\,\mathrm{id} \end{aligned}$$

und wird als quantenstochastische Differerntialgleichung (QDGL) bezeichnet. Für diese j_{st} gilt:

1. *Für alle $0 \leq s \leq r \leq t, b \in C$ ist*

$$\begin{aligned} j_{sr} \star j_{rt} &= j_{st}, \\ j_{ss}(b) &= \delta(b)\,\mathrm{id}\,. \end{aligned}$$

Diese Eigenschaft wird wichtig sein, wenn wir die j_{st} als „Prozeß der Zuwächse“ ansehen wollen.

2. *Wann immer $[s,t[\cap [s',t'[= \emptyset$, gilt*

$$j_{st}(b) j_{s't'}(b') = j_{s't'}(b') j_{st}(b).$$

Dies besagt dann die Unabhängigkeit der Zuwächse.

3. *Für alle $s \leq t, b \in C$ gilt*

$$\langle \Omega, j_{st}(b)\Omega \rangle = \varphi_{t-s}(b),$$

wobei $\varphi_t := e_\star^{t\psi}$ und Ω der Vakuumvektor ist.

Ist C eine $*$-Koalgebra, sind alle $\rho(b)$ adjungierbar, ρ und ψ hermitesch und $\theta(b) = \eta(b^*)$ für alle $b \in C$, so sind auch die j_{st} hermitesch und $(\mathcal{A}, \Phi)$ mit

$\mathcal{A} = \mathbf{H}(\mathcal{E}_D)$ und $\Phi(T) = \langle \Omega, T\Omega \rangle$ ist ein Quantenwahrscheinlichkeitsraum. Φ heißt dann Vakuumzustand.

4.4 Allgemeine Theorie der Lévy-Prozesse auf Deformationen von Bialgebren

Es bezeichne in diesem Abschnitt $(\mathcal{A}, \Phi)$ stets einen QWR.

Definition 4.16 ((Quanten-)Lévy-Prozeß auf einer Deformation einer Bialgebra)**.** Sei B eine $*$-Bialgebra mit additiver Deformation $(\mu_t)_{t\geq 0}$. Wir schreiben B_t für die unitale $*$-Algebra mit Multiplikation μ_t. Eine Familie $(j_{st})_{0\leq s\leq t}$ von Quanten-Zufallsgrößen $j_{st} : B_{t-s} \to \mathcal{A}$ heißt *Lévy-Prozeß*, falls

1. $j_{rs} \star j_{st} = j_{rt}$ für $0 \leq r \leq s \leq t$ (Zuwachsbedingung),
2. $j_{t_1 t_2}, \ldots, j_{t_{n-1} t_n}$ sind unabhängig für $t_1 \leq \cdots \leq t_n$,
3. $\Phi \circ j_{st} = \Phi \circ j_{0,t-s}$ für $0 \leq s \leq t$ (Stationarität),
4. $\lim_{t\to 0+} \Phi \circ j_{0,t} = \delta$ punktweise (Stetigkeit).

Ist X ein (klassischer) Lévy-Prozeß mit Zuwächsen $X_{st} := X_t - X_s$, so ist $j_{st} := j_{X_{st}}$ ein (Quanten-)Lévy-Prozeß. Eine formale Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} j_1 \star j_2(f)(\omega) &= (M \circ (j_1 \otimes j_2) \circ \Delta)(f)(\omega) \\ &= M(j_1(f_{(1)}) \otimes j_2(f_{(2)}))(\omega) \\ &= j_1(f_{(1)})(\omega) j_2(f_{(2)})(\omega) \\ &= f_{(1)}(X_1(\omega)) f_{(2)}(X_2(\omega)) \\ &= f(X_1(\omega) + X_2(\omega)) \\ &= j_{X_1+X_2}(f)(\omega). \end{aligned}$$

Um dieser Rechnung einen strengen Sinn zu geben, müssen wir $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ zu einer Bialgebra machen. Das Problem ist, daß $\Delta(f)(x,y) := f(x+y)$ in unserem Sinne keine Komultiplikation definiert, da im allgemeinen $\Delta(f) \notin \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$. Das Problem läßt sich lösen, indem man für ein topologisches Tensorprodukt $\mathcal{V}\overline{\otimes}\mathcal{W}$ benutzt. Für von-Neumann-Algebren existiert ein entsprechendes Tensorprodukt, das wieder eine von-Neumann-Algebra ist. Dann läßt sich zeigen, daß $\Delta : \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})\overline{\otimes}\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ und man kann $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ als topologische Bialgebra auffassen.

Definition 4.17 (L-bedingt positives Funktional)**.** Sei B eine $*$-Bialgebra, $L : B \otimes B \to \mathbb{C}$ linear. Ein lineares Funktional $\psi : B \to \mathbb{C}$ heißt *L-bedingt* *positiv*, falls

$$\psi(b^*b) + L(b^* \otimes b) \geq 0$$

für alle $b \in \operatorname{kern} \delta$.

Es gilt die

Satz 4.8 (Schönberg-Korrespondenz, Wirth [20] Théorème 2.1.12). *Sei B eine $*$-Bialgebra mit additiver Deformation, L Generator dieser Deformation. Dann sind für ein lineares Funktional ψ auf B äquivalent:*

1. *ψ ist L-bedingt positiv, hermitesch und normiert.*

2. *$e_\star^{t\psi}$ ist ein Zustand auf B_t für alle $t \geq 0$.*

Wir wollen zeigen, daß die L-bedingt positiven linearen Funktionale Generatoren von Lévy-Prozessen sind, wenn L der Generator der Deformation ist.

Satz 4.9. *Sei B eine $*$-Bialgebra, $L : B \otimes B \to \mathbb{C}$ ein 2-Kozyklus und $\psi : B \to \mathbb{C}$ ein L-bedingt positives lineares Funktional. Dann definiert*

$$(a, b) := \psi(a^*b) + L(a^* \otimes b) \tag{4.6}$$

eine positive Sesquilinearform auf $\operatorname{kern} \delta$.
Bezeichne $N = \{a \in B \mid (a, a) = 0\}$ den Nullraum dieser Sesquilinearform, $D := \operatorname{kern} \delta / N$ den Quotientenraum und $\eta : \operatorname{kern} \delta \to D$ die kanonische Abbildung. Dann ist D ein Prähilbertraum, d.h. ein komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt, wenn man

$$\langle \eta(a), \eta(b) \rangle := (a, b) \tag{4.7}$$

definiert. Durch

$$\rho(a)\eta(b) := \eta(ab) \tag{4.8}$$

wird dann eine Darstellung der $*$-Algebra $\operatorname{kern} \delta$ *auf D definiert. Diese kann zu einer $*$-Darstellung von B auf D fortgesetzt werden, indem wir $\rho(\mathbb{1}) = \mathrm{id}$ setzen. Wir setzen auch η auf ganz B fort mit $\eta(\mathbb{1}) = 0$. Dann gilt*

$$\eta(ab) = \rho(a)\eta(b) + \eta(a)\delta(b), \tag{4.9}$$

d.h. η ist ρ-δ-Kozyklus.
Außerdem gilt

$$\langle \eta(a), \eta(b) \rangle = \psi(a^*b) - \overline{\delta(a)}\psi(b) - \overline{\psi(a)}\delta(b) + L(a^* \otimes b) \tag{4.10}$$

für alle $a, b \in B$.

Beweis. Offenbar ist die durch (4.6) definierte Abbildung antilinear im ersten und linear im zweiten Eingang, also eine Sesquilinearform. Positivität bedeutet, daß

$$(a, a) \geq 0 \quad \forall a \in \operatorname{kern} \delta,$$

ist also äquivalent dazu, daß ψ L-bedingt positiv ist.
Wegen der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung ist N tatsächlich ein Untervektorraum von $\operatorname{kern} \delta$. Seien nämlich $a, b \in N$, dann ist

$$(a+b, a+b) = (a, a)+(b, b)+(a, b)+(b, a) = 2\,|(a, b)| \leq 2((a, a)+(b, b)) = 0.$$

(4.7) ist auch wohldefiniert und legt somit eine positiv definite Sesquilinearform, also ein Skalarprodukt auf $D = \operatorname{kern} \delta / N$ fest.
Wohldefiniertheit: Seien $a, b, c \in \operatorname{kern} \delta$, $a - b \in N$, dann ist

$$|(a - b, c)| \leq (a - b, a - b)(c, c) = 0$$

also $(a, c) = (b, c)$.
Definitheit:

$$\langle \eta(a), \eta(a) \rangle = 0 \Rightarrow (a, a) = 0 \Rightarrow a \in N.$$

Bleibt noch zu zeigen, daß ρ aus (4.8) wohldefiniert und eine Darstellung auf D ist.
Wir müssen nachrechnen, daß mit $a \in \operatorname{kern} \delta, b \in N$ auch $ab \in N$:

$$\begin{aligned}(ab, ab) &= \psi(b^* a^* ab) + L(b^* a^* \otimes ab)\\ &= \psi(b^*(a^* ab)) + L(b^* \otimes a^* ab)\\ &= (b, a^* ab) = 0.\end{aligned}$$

Dabei haben wir die 2-Kozyklus Eigenschaft von L, sowie $a, b \in \operatorname{kern} \delta$ genutzt.
Daß ρ eine Darstellung ist, sehen wir wie folgt:

$$\rho(a)\rho(b)\eta(c) = \rho(a)\eta(bc) = \eta(abc) = \rho(ab)\eta(c)$$

für $a, b, c \in \operatorname{kern} \delta$.
Setzen wir nun η und ρ auf ganz B fort, indem wir $\eta(\mathbb{1}) = 0$ und $\rho(\mathbb{1}) = \mathrm{id}$

setzen, erhalten für beliebige $a, b \in B$

$$\begin{aligned}\rho(a)\eta(b) &= (\rho(a-\delta(a)\mathbb{1}) + \delta(a)\mathbb{1})(\eta(b-\delta(b)\mathbb{1}))\\ &= \eta((a-\delta(a)\mathbb{1})(b-\delta(b)\mathbb{1})) + \delta(a)\eta(b-\delta(b)\mathbb{1})\\ &= \eta(ab) - \eta(a)\delta(b)\end{aligned}$$

und damit (4.9).
Ähnlich erhalten wir (4.10) für das Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}\langle\eta(a),\eta(b)\rangle &= \langle\eta(a-\delta(a)\mathbb{1}),\eta(b-\delta(b)\mathbb{1})\rangle\\ &= \psi\big((a^*-\overline{\delta(a)}\mathbb{1})(b-\delta(b)\mathbb{1})\big) + L\big((a^*-\overline{\delta(a)}\mathbb{1})\otimes(b-\delta(b)\mathbb{1})\big)\\ &= \psi(a^*b) - \overline{\delta(a)}\psi(b) - \overline{\psi(a)}\delta(b) + L(a^*\otimes b),\end{aligned}$$

da ja $\psi(\mathbb{1}) = 0$ sowie $L(a\otimes\mathbb{1}) = L(\mathbb{1}\otimes b) = 0$ für alle $a, b \in B$. □

Wir führen noch die bilineare Abbildung $S : B\otimes B \to \mathbb{C}$, die durch

$$S(a\otimes b) := \langle\eta(a^*),\eta(b)\rangle$$

für $a, b \in B$ definiert ist, ein und rechnen nach, daß die Gleichung

$$S = L - \partial\psi$$

gilt:

$$\begin{aligned}S(a\otimes b) &= \langle\eta(a^*),\eta(b)\rangle\\ &= \langle\eta(a^*)-\delta(a^*),\eta(b)-\delta(b)\rangle\\ &= (a^*-\delta(a^*), b-\delta(b))\\ &= L\big((a-\delta(a))\otimes(b-\delta(b))\big) + \psi\big((a-\delta(a))(b-\delta(b))\big)\\ &= L(a\otimes b) + \psi(ab) - \delta(a)\psi(b) - \delta(b)\psi(a)\\ &= L(a\otimes b) - \partial\psi(a\otimes b).\end{aligned}$$

Dabei haben wir $L(\mathbb{1}\otimes b) = L(a\otimes\mathbb{1}) = 0$ sowie $\psi(\mathbb{1}) = 0$ benutzt. Insbesondere erhalten wir, daß S ein Kozyklus ist, wenn L ein Kozyklus ist.

Satz 4.10. *Sei B eine $*$-Bialgebra mit additiver Deformation $(\mu_t)_{t\geq 0}$, L Generator dieser Deformation, ψ ein hermitesches, L-bedingt positives lineares Funktional mit $\psi(\mathbb{1}) = 0$, D, ρ, η gemäß Satz 4.9. Außerdem sei $(\mathcal{A}, \Phi)$ der QWR $\mathcal{A} = \mathbf{H}(\mathcal{E}(D))$, Φ der Vakuumzustand. Für ein L-bedingt positives,* *hermitesches, normiertes lineares Funktional ψ besitzt dann die QDGL*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}j_{st}(b) &= (j_{st} \star \mathrm{d}I_t)(b) \\ j_{ss}(b) &= \delta(b)\,\mathrm{id} \end{aligned} \tag{4.11}$$

mit

$$I_t(b) = A_t^*(\eta(b)) + A_t(\eta(b^*)) + \Lambda_t(\rho(b) - \delta(b)\,\mathrm{id}) + \psi(b)t$$

eine eindeutige Lösung in der Klasse der Kernprozesse und j_{st} ist ein Lévy-Prozeß auf B. Es gilt

$$\psi(b) = \left.\frac{\mathrm{d}(\Phi \circ j_{0t})(b)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \tag{4.12}$$

für alle $b \in B$.

Beweis. Nach Satz 4.7 hat die Differentialgleichung jedenfalls eine eindeutige Lösung in der Klasse der Prozesse, die sich als Integraloperatoren bezüglich adaptierten, adjungierbaren, lokal gleichmäßig integrierbaren kernwertigen Prozessen schreiben lassen.
Bleibt zu zeigen, daß j_{st} ein Lévy-Prozeß ist, also die j_{st} Algebrahomomorphismen von B_{t-s} nach $\mathcal{A} = \mathbf{H}(\mathcal{E}_D)$ sind und die Bedingungen 1-4 aus Def. 4.16 erfüllt sind.
Die Zuwachsbedingung sowie die Unabhängigkeit und Stationarität der Zuwächse folgen aus Satz 4.7. Eigenschaft 1 ist die Zuwachsbedingung. Nach Eigenschaft 2 vertauschen $j_{st}(b)$ und $j_{s't'}(b')$, wenn $[s,t[$ und $[s',t'[$ disjunkt sind. Es gilt aber auch, wenn die Intervalle $[s_i t_i[$ disjunkt sind, wegen der Adaptiertheit der $j_{st}(b)$

$$j_{s_i t_i}(b) = \mathrm{id}_{0s} \otimes J_i \otimes \mathrm{id}_{t\infty}$$

gemäß der Zerlegung aus der Bemerkung nach Def. 4.13.
Sei oBdA $0 \le s_1 \le t_1 \le \cdots \le s_n \le t_n$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi(j_{s_1t_1}(b_1)\dots j_{s_nt_n}(b_n)) &= \langle \Omega, j_{s_1t_1}(b_1)\dots j_{s_nt_n}(b_n)\Omega\rangle \\ &= \langle \Omega_{0s_1} \otimes \Omega_{s_1t_1} \otimes \cdots \otimes \Omega_{s_nt_n} \otimes \Omega_{t_n\infty}, \\ &\qquad \Omega_{0s_1} \otimes J_1(\Omega_{s_1t_1}) \otimes \cdots \otimes J_n(\Omega_{s_nt_n}) \otimes \Omega_{t_n\infty}\rangle \\ &= \langle \Omega, j_{s_1t_1}(b_1)(\Omega_{s_1t_1})\rangle \dots \langle \Omega, j_{s_nt_n}(b_n)(\Omega_{s_nt_n})\rangle \\ &= \Phi(j_{s_1t_1}(b_1))\dots\Phi(j_{s_nt_n}(b_n)). \end{aligned}$$

Damit ist die Unabhängigkeit der Zuwächse gezeigt.
Stationarität der Zuwächse folgt unmittelbar aus Eigenschaft 3 und daraus ergibt sich auch die Stetigkeit, da $\varphi = e_*^{t\psi}$ sogar differenzierbar ist. Damit ist auch (4.12) gezeigt.
Also ist lediglich die Homomorphismuseigenschaft der j_{st} noch einzusehen. Wir müssen nachweisen, daß

$$j_{st} \circ \mu_{t-s} = \mu_{\mathcal{A}} \circ (j_{st} \otimes j_{st}),$$

bzw. wenn wir $a, b \in B$ einsetzen

$$j_{st}(a_{(1)}b_{(1)})e_\star^{(t-s)L}(a_{(2)} \otimes b_{(2)}) = j_{st}(a)j_{st}(b).$$

Da wir den Satz 4.7 über die Eindeutigkeit der Lösungen von quantenstochastischen Differentialgleichnungen zur Hand haben, reicht es aus, für beide Seiten die Differentiale auszurechnen.
Zunächst die linke Seite:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\left(j_{st}(a_{(1)}b_{(1)})e_\star^{(t-s)L}(a_{(2)} \otimes b_{(2)})\right)\\
=&\mathrm{d}j_{st}(a_{(1)}b_{(1)})e_\star^{(t-s)L}(a_{(2)} \otimes b_{(2)})\\
&+ j_{st}(a_{(1)}b_{(1)})L(a_{(2)} \otimes b_{(2)})e_\star^{(t-s)L}(a_{(3)} \otimes b_{(3)})\mathrm{d}t\\
=&j_{st}(a_{(1)}b_{(1)})e_\star^{(t-s)L}(a_{(2)} \otimes b_{(2)})\big(\mathrm{d}I_t(a_{(3)}b_{(3)}) + L(a_{(3)} \otimes b_{(3)})\mathrm{d}t\big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{(da } L \text{ kommutiert).}
\end{aligned}$$

Schreiben wir nun $X_{st} := (j_{st} \circ \mu) \star e_\star^{(t-s)L}$, erfüllt X die QDGL

$$\mathrm{d}X_{st} = X_{st} \star (\mathrm{d}I_t \circ \mu + L\mathrm{d}t).$$

Nun zur rechten Seite. Zur Verkürzung lassen wir die Zeit im Index weg, schreiben also j anstelle von j_{st}, I statt I_t usw.:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\big(j(a)j(b)\big) &= \mathrm{d}j(a)j(b) + j(a)\mathrm{d}j(b) + \mathrm{d}j(a)\mathrm{d}j(b)\\
&= j(a_{(1)})j(b)\mathrm{d}I(a_{(2)} + j(a)j(b_{(1)})\mathrm{d}I(b_{(2)})\\
&\quad + j(a_{(1)})j(b_{(1)})\mathrm{d}I(a_{(2)})\mathrm{d}I(b_{(2)})\\
&= j(a_{(1)})j(b_{(1)})\Big(\mathrm{d}I(a_{(2)})\delta(b_{(2)}) + \delta(a_{(2)})\mathrm{d}I(b_{(2)})\\
&\quad + \mathrm{d}I(a_{(2)})\mathrm{d}I(b_{(2)})\Big)
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun nur noch den Ausdruck in der Klammer, da wir mit

$j(a_{(1)})j(b_{(1)})$ schon den gewünschten Ausdruck haben, und lassen zugunsten der Übersichtlichkeit auch den Index (2) weg. Wir setzen

$$I(b) = A^*(\eta(b)) + A(\eta(b^*)) + \Lambda(\rho(b) - \delta(b)\,\mathrm{id}) + \psi(b)t$$

ein und erhalten, wobei wir die Quanten-Itô-Formel (Satz 4.5) benutzen und man beachte, daß $A^*(\xi)$ linear von ξ abhängt, $A(\xi)$ aber antilinear,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}I(a)\delta(b) + \delta(a)\mathrm{d}I(b) + \mathrm{d}I(a)\mathrm{d}I(b)\\
=&\big(\mathrm{d}A^*(\eta(a)) + \mathrm{d}A(\eta(a^*)) + \mathrm{d}\Lambda(\rho(a) - \delta(a)\,\mathrm{id}) + \psi(a)\mathrm{d}t\big)\delta(b)\\
&+ \delta(a)\big(\mathrm{d}A^*(\eta(b)) + \mathrm{d}A(\eta(b^*)) + \mathrm{d}\Lambda(\rho(b) - \delta(b)\,\mathrm{id}) + \psi(b)\mathrm{d}t\big)\\
&+ \mathrm{d}A^*(\rho(a)\eta(b) - \delta(a)\eta(b)) + \mathrm{d}A(\rho(b^*)\eta(a^*) - \delta(b^*)\eta(a^*))\\
&+ \mathrm{d}\Lambda(\rho(ab) - \delta(a)\rho(b) - \rho(a)\delta(b) + \delta(a)\delta(b))\\
&+ (\psi(ab - a\delta(b) - \delta(a)b + \delta(a)\delta(b)\mathbb{1}) + L(a\otimes b))\mathrm{d}t\\
=&\mathrm{d}A^*\big(\eta(a)\delta(b) + \underbrace{\delta(a)\eta(b) + \rho(a)\eta(b)}_{\eta(ab)} - \delta(a)\eta(b)\big)\\
&+ \mathrm{d}A\big(\delta(b^*)\eta(a^*) + \underbrace{\eta(b^*)\delta(a^*) + \rho(b^*)\eta(a^*)}_{\eta((ab)^*)} - \delta(b^*)\eta(a^*)\big)\\
&+ \mathrm{d}\Lambda\big(\rho(a)\delta(b) - \delta(a)\delta(b) + \delta(a)\rho(b) - \delta(a)\delta(b)\\
&\quad + \rho(ab) - \delta(a)\rho(b) - \rho(a)\delta(b) + \delta(a)\delta(b)\big)\\
&+ \mathrm{d}t\big(\psi(ab) + L(a\otimes b)\big)\\
=&\mathrm{d}A^*(\eta(ab)) + \mathrm{d}A(\eta((ab)^*)) + \mathrm{d}\Lambda((\rho-\delta)(ab)) + \psi(ab)\mathrm{d}t + L(a\otimes b)\mathrm{d}t\\
=&(\mathrm{d}I\circ\mu + L)(a\otimes b).
\end{aligned}$$

Damit ist die Homomorphismuseigenschaft der j_{st} bewiesen und damit der Satz. □

Der folgende Satz sagt aus, daß sich jeder Lévy-Prozeß als Lösung einer QSDG auf dem Fockraum realisieren läßt.

Satz 4.11. *Sei j_{st} ein Lévy-Prozeß auf der deformierten $*$-Bialgebra B mit Generator L. Dann existiert ein L-bedingt positives lineares Funktional ψ, sodaß die Verteilung bestimmt ist durch*

$$\varphi_t = \Phi\circ j_{0t} = e_\star^{t\psi}$$

und es gibt einen Prähilbertraum D, eine $*$-Darstellung ρ und einen ρ-δ-Kozyklus η, sodaß die Lösung $\widetilde{j_{st}} : B \to \mathbf{H}(\mathcal{E}_D)$ der QDGL (4.11) dieselbe

Verteilung hat wie j_{st}.

Beweis. Setze $\varphi_t = \Phi \circ j_{0t}$. Dann bilden die φ_t eine stetige Faltungshalbgruppe, da

$$\begin{aligned}
(\varphi_s \star \varphi_t)(b) &= ((\Phi \circ j_{0s}) \star (\Phi \circ j_{0t}))(b) \\
&= ((\Phi \circ j_{0s}) \star (\Phi \circ j_{s,s+t}))(b) \quad \text{wegen Stationarität (4.3)} \\
&= \Phi(j_{0s}(b_{(1)}))\Phi(j_{s,s+t}(b_{(2)})) \\
&= \Phi(j_{0s}(b_{(1)}) j_{s,s+t}(b_{(2)})) \quad \text{wegen Unabhängigkeit (4.2)} \\
&= \Phi((j_{0s} \star j_{s,s+t})(b)) \\
&= \Phi(j_{0,s+t}(b)) \quad \text{nach der Zuwachsbedingung (4.1)} \\
&= \varphi_{s+t}(b).
\end{aligned}$$

Die Stetigkeit ist in (4.4) explizit gefordert. Also existiert der Generator $\psi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t\big|_{t=0}$, d.h. es ist $\varphi_t = e_\star^{t\psi}$. Wegen der Staionarität und Unabhängigkeit der Zuwächse bestimmen die φ_t die gesamte Verteilung. Es bleibt nur zu zeigen, daß ψ auch L-bedingt positiv ist, dann erhalten wir D, ρ, η und schließlich $\widetilde{j_{st}}$ mit Konstruktionssatz Satz 4.9. Nach der Schönberg-Korrespondenz 4.8 genügt es, zu zeigen, daß die φ_t Zustände sind. Das ist aber klar, da Φ ein Zustand ist und die j_{st} Algebrahomomorphismen. $\square$

Schließlich beantworten wir noch die Frage, wann es überhaupt einen Lévy-Prozeß auf einer deformierten Bialgebra gibt.

Satz 4.12. *Sei B eine deformierte $*$-Bialgebra mit Generator L. Es gibt genau dann einen Lévy-Prozeß auf (B, L), wenn L einen Korand dominiert, d.h. ein lineares Funktional ψ auf B existiert, sodaß gilt:*

$$L(b^* \otimes b) \geq \partial\psi(b^* \otimes b) \qquad \textit{für alle } b \in B$$

Beweis. Sei $L \geq \partial\psi$. Dann ist ψ L-bedingt positiv, da für $b \in \ker\delta$

$$L(b^* \otimes b) + \psi(b^* b) = L(b^* \otimes b) - \partial\psi(b^* \otimes b) \geq 0$$

Nach dem Hauptsatz 4.10 erhalten wir einen Lévy-Prozeß zu ψ.
Ist umgekehrt ein Lévy-Prozeß j_{st} auf (B, L) gegeben, so definiert

$$\psi(b) := \frac{\mathrm{d}(\Phi \circ j_{0t})(b)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}$$

ein L-bedingt positives lineares Funktional, da

$$0 \leq \langle \eta(b), \eta(b) \rangle = S(b^* \otimes b) = (L - \partial\psi)(b^* \otimes b).$$

□

4.5 Lévy-Prozesse auf Deformationen kokommutativer Bialgebren

Satz 4.13. *Sei B eine kokommutative $*$-Bialgebra, ρ eine $*$-Darstellung von B auf einem Prähilbertraum D, η ein surjektiver ρ-δ-1-Kozyklus. Dann existiert zu jedem hermiteschen, linearen Funktional ψ auf B mit $\psi(\mathbb{1}) = 0$ ein hermitescher, normierter, kommutierender 2-Kozyklus L auf B, sodaß gilt:*

- *ψ ist L-bedingt positiv,*
- *$D \cong \operatorname{kern} \delta / N$, wobei N den Nullraum von $L + \psi \circ \mu$ bezeichnet,*
- *$\rho = \rho_{\psi,L}$,*
- *$\eta = \eta_{\psi,L}$,*

wobei $\rho_{\psi,L}$ und $\eta_{\psi,L}$ die Darstellung bzw. den Kozyklus bezeichnen, die aus ψ und L gemäß Satz 4.9 konstruiert werden.

Beweis. Wir definieren $S, L : B \otimes B \to \mathbb{C}$ durch

$$S(a \otimes b) := \langle \eta(a^*), \eta(b) \rangle,$$
$$L := S + \partial\psi.$$

Offenbar ist L Kozyklus genau dann, wenn S Kozyklus ist, da sich diese ja nur um einen Korand unterscheiden. Wir rechnen:

$$\begin{aligned}\partial S(a \otimes b \otimes c) =& \delta(a) S(b \otimes c) - S(ab \otimes c) + S(a \otimes bc) - S(a \otimes b)\delta(c) \\ =& \delta(a) \langle \eta(b^*), \eta(c) \rangle - \langle \eta(b^* a^*), \eta(c) \rangle \\ &+ \langle \eta(a^*), \eta(bc) \rangle - \langle \eta(a^*), \eta(b) \rangle \delta(c) \qquad (4.13)\end{aligned}$$

Da η ein ρ-δ-Kozyklus ist, gilt

$$\eta(ab) = \rho(a)\eta(b) - \eta(a)\delta(b),$$

also ist

$$\begin{aligned}\langle\eta(b^*a^*),\eta(c)\rangle &= \left\langle\rho(b)^*\eta(a^*)+\eta(b^*)\overline{\delta(a)},\eta(c)\right\rangle\\ &= \langle\eta(a^*),\rho(b)\eta(c)\rangle+\delta(a)\langle\eta(b^*),\eta(c)\rangle\end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned}\langle\eta(a^*),\eta(bc)\rangle &= \langle\eta(a^*),\rho(b)\eta(c)+\eta(b)\delta(c)\rangle\\ &= \langle\eta(a^*),\rho(b)\eta(c)\rangle+\langle\eta(a^*),\eta(b)\rangle\,\delta(c).\end{aligned}$$

Setzen wir dies in (4.13) ein, so erhalten wir schließlich $\partial S = 0$ und damit auch $\partial L = 0$.
L ist auch hermitesch und normiert, da ψ hermitesch und $\psi(\mathbb{1}) = 0$:

$$\begin{aligned}L(b^*\otimes a^*) &= S(b^*\otimes a^*)+\partial\psi(b^*\otimes a^*)\\ &= \langle\eta(b),\eta(a^*)\rangle+\delta(b^*)\psi(a^*)-\psi(b^*a^*)+\psi(b^*)\delta(a^*)\\ &= \overline{\langle\eta(a^*),\eta(b)\rangle}+\overline{\delta(b)\psi(a)}-\overline{\psi(ab)}+\overline{\psi(b)\delta(a)}\\ &= \overline{S(a\otimes b)+\partial\psi(a\otimes b)}\\ &= \overline{L(a\otimes b)}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}L(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}) &= S(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})+\partial\psi(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})\\ &= \langle\eta(\mathbb{1}),\eta(\mathbb{1})\rangle+\delta(\mathbb{1})\psi(\mathbb{1})-\psi(\mathbb{1})+\psi(\mathbb{1})\delta(\mathbb{1})\\ &= 0\end{aligned}$$

L kommutiert, da B kokommutativ ist.
ψ ist L-bedingt-positiv, da für $a \in \operatorname{kern}\delta$

$$\begin{aligned}L(a^*\otimes a)+\psi(a*a) &= L(a^*\otimes a)-\partial\psi(a^*\otimes a)\\ &= S(a^*\otimes a)\\ &= \langle\eta(a),\eta(a)\rangle\geq 0.\end{aligned}$$

Nun zur Isomorphie $D \cong B_0/N$:
Setze

$$\Phi(\eta(b)) := b+N \text{ für } b\in\operatorname{kern}\delta.$$

Φ ist wohldefiniert und injektiv, da für $a, b \in \operatorname{kern}\delta$ gilt

$$S(a \otimes b) = L(a \otimes b) + \psi(ab)$$

und damit

$$\begin{aligned}\eta(b) = 0 &\Leftrightarrow \langle \eta(b), \eta(b) \rangle = 0\\ &\Leftrightarrow S(b^* \otimes b) = 0\\ &\Leftrightarrow L(b^* \otimes b) + \psi(b^* b) = 0\\ &\Leftrightarrow b \in N\\ &\Leftrightarrow \Phi(\eta(b)) = 0.\end{aligned}$$

Offenbar ist dann

$$\Phi \circ \eta = \eta_{\psi,L}$$

und da η surjektiv ist ρ durch die Gleichung

$$\rho(a)\eta(b) = \eta(ab) - \eta(a)\delta(b)$$

eindeutig festgelegt. □

Wir können also im kokommutativen Fall beliebige lineare Funktionale als Generatoren nehmen. Der nächste Satz zeigt, wie die Lévy-Prozesse zusammenhängen, die sich nur im Driftterm ψ unterscheiden.

Satz 4.14. *Sei B eine $*$-Bialgebra und erfülle j_{st} die Differentialgleichung*

$$\begin{aligned}\mathrm{d}j_{st} &= j_{st} \star \mathrm{d}I_t\\ j_{ss} &= \delta \,\mathrm{id}\,.\end{aligned}$$

Ist dann ψ ein kommutierendes lineares Funktional, so erfüllt

$$\widetilde{j_{st}} = j_{st} \star e_\star^{(t-s)\psi}$$

die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\widetilde{j_{st}} &= \widetilde{j_{st}} \star (\mathrm{d}I_t + \psi \mathrm{d}t)\\ \widetilde{j_{ss}} &= \delta \,\mathrm{id}\,.\end{aligned}$$

Beweis. Zunächst sehen wir, daß

$$\mathrm{d}e_\star^{(t-s)\psi} = \psi \star e_\star^{(t-s)\psi}\mathrm{d}t.$$

Tatsächlich rechnen wir

$$\begin{aligned}\mathrm{d}e_\star^{(t-s)}\psi(b) &= \mathrm{d}\sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!}\psi^{\star k}(b)\\ &= (\psi \star \sum_{k=1}^\infty \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\psi^{\star k-1})(b)\mathrm{d}t\\ &= (\psi \star e_\star^{(t-s)\psi})(b)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(j_{st} \star e_\star^{(t-s)\psi})(b)\\ &= \mathrm{d}j_{st}(b_{(1)})e_\star^{(t-s)\psi}(b_{(2)}) + j_{st}(b_{(1)})\mathrm{d}e_\star^{(t-s)\psi}(b_{(2)})\\ &= j_{st}(b_{(1)})\mathrm{d}I_t(b_{(2)})e_\star^{(t-s)\psi}(b_{(3)}) + j_{st}(b_{(1)})\psi(b_{(2)})e_\star^{(t-s)\psi}(b_{(3)})\mathrm{d}t\\ &= (j_{st} \star e_\star^{(t-s)\psi})(b_{(1)})(\mathrm{d}I_t(b_{(2)}) + \psi(b_{(2)})\mathrm{d}t)\\ &= \big(j_{st} \star e_\star^{(t-s)\psi} \star (\mathrm{d}I_t + \psi\mathrm{d}t)\big)(b).\end{aligned}$$

□

Wir könne auch eine Konstruktion machen, die der Summe unabhängiger Zufallsvariablen entspricht:

Satz 4.15. *Seien B eine kokommutative $*$-Bialgebra, L_1 und L_2 Generatoren von Deformationen. Dann ist $L = L_1 + L_2$ ebenfalls Generator einer Deformation. Wir setzen*

$$\begin{aligned}\mu_t^{(1)} &= \mu \star e_\star^{tL_1} & B_t^{(1)} &= (B, \mu_t^{(1)})\\ \mu_t^{(2)} &= \mu \star e_\star^{tL_2} & B_t^{(2)} &= (B, \mu_t^{(2)})\\ \mu_t &= \mu \star e_\star^{tL} & B_t &= (B, \mu_t)\end{aligned}$$

Außerdem seien für $i = 1, 2$ QWR'e $(\mathcal{A}_i, \Phi_i)$ und Lévy-Prozesse

$$j_{st}^{(i)} : B_{t-s}^{(i)} \to \mathcal{A}_i$$

gegeben, d.h. $j_{st}^{(i)}$ ist Lévy-Prozeß bzgl. der zu L_i gehörenden Deformation und gelte

$$\Phi_i \circ j_{st}^{(i)} = e_\star^{(t-s)\psi_i}.$$

Dann ist durch

$$j_{st} : B_{t-s} \to \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$$
$$j_{st} := (j_{st}^{(1)} \otimes j_{st}^{(2)}) \circ \Delta$$

ein Lévy-Prozeß auf der zu L gehörenden Deformation definiert und es gilt

$$(\Phi_1 \otimes \Phi_2) \circ j_{st} = e_\star^{(t-s)(\psi_1+\psi_2)}$$

Beweis. Es ist klar, daß $L = L_1 + L_2$ ein hermitescher, normierter, kommutierender Kozyklus ist, wenn L_1 und L_2 dies sind.
Zu zeigen sind die Homomorphismus- und Zuwachseigenschaft der j_{st}. Wir beginnen mit der Hommorphismuseigenschaft und zeigen dafür, daß

$$\Delta : B_t \to B_t^{(1)} \otimes B_t^{(2)}$$

ein Homomorphismus ist. Dann folgt die Behauptung, da ja die $j_{st}^{(i)}$ entsprechende Homomorphismen sind. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
(\mu_t^{(1)} \otimes \mu_t^{(2)}) \circ \Lambda &= ((\mu \star e_\star^{tL_1}) \otimes (\mu \star e_\star^{tL_2})) \circ \Lambda \\
&= (\mu \otimes e_\star^{tL_1} \otimes \mu \otimes e_\star^{tL_2}) \circ (\Lambda \otimes \Lambda) \circ \Lambda \\
&= (\mu \otimes e_\star^{tL_1} \otimes \mu \otimes e_\star^{tL_2}) \circ \Lambda^{(4)} \\
&= (\mu \otimes e_\star^{tL_1} \otimes \mu \otimes e_\star^{tL_2}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Lambda \otimes \mathrm{id}) \circ \Lambda^{(3)} \\
&= (\mu \otimes \mu \otimes e_\star^{tL_1} \otimes e_\star^{tL_2}) \circ \Lambda^{(4)} \\
&= (\mu \otimes \mu \otimes e_\star^{tL_1} \otimes e_\star^{tL_2}) \circ (\Lambda \otimes \Lambda) \circ \Lambda \\
&= ((\Delta \circ \mu) \otimes e_\star^{t(L_1+L_2)}) \circ \Lambda \\
&= \Delta \circ (\mu \otimes e_\star^{tL}) \circ \Lambda \\
&= \Delta \circ \mu_t,
\end{aligned}$$

wobei wir mehrfach die Koassoziativität von Λ benutzt haben.
Es bleibt die Zuwachseigenschaft zu zeigen. In der folgenden Rechnung bezeichnen wir mit M_i die Multiplikation auf $\mathcal{A}_i$:

$$\begin{aligned}
j_{sr} \star j_{rt} &= (M_1 \widetilde{\otimes} M_2) \circ (j_{sr} \otimes j_{rt}) \circ \Delta \\
&= (M_1 \widetilde{\otimes} M_2) \circ (j_{sr}^{(1)} \otimes j_{sr}^{(2)} \otimes j_{rt}^{(1)} \otimes j_{rt}^{(2)}) \circ \Delta^{(4)} \\
&= (M_1 \otimes M_2) \circ (j_{sr}^{(1)} \otimes j_{rt}^{(1)} \otimes j_{sr}^{(2)} \otimes j_{rt}^{(2)}) \circ \underbrace{(\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta^{(4)}}_{=\Delta^{(4)} \text{ wegen Kokommutativität}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ((j_{sr}^{(1)} \star j_{rt}^{(1)}) \otimes (j_{sr}^{(2)} \star j_{rt}^{(2)})) \circ \Delta \\
&= (j_{st}^{(1)} \otimes j_{st}^{(2)}) \circ \Delta \\
&= j_{st}.
\end{aligned}
$$

Schließlich erhalten wir für die Verteilung von j_{st}

$$
\begin{aligned}
(\Phi_1 \otimes \Phi_2) \circ j_{st} &= (\Phi_1 \otimes \Phi_2) \circ (j_{st}^{(1)} \otimes j_{st}^{(2)}) \circ \Delta \\
&= (e_\star^{(t-s)\psi_1} \otimes e_\star^{(t-s)\psi_2}) \circ \Delta \\
&= e_\star^{(t-s)\psi_1} \star e_\star^{(t-s)\psi_2} \\
&= e_\star^{(t-s)(\psi_1+\psi_2)}.
\end{aligned}
$$

□

4.6 Beispiele kommutativer und kokommutativer $*$-Bialgebren

In Satz 4.13 und 4.14 haben wir gesehen, daß wir den Driftterm unabhängig von der $*$-Darstellung ρ und dem Kozyklus η aus der QSDG abändern können, und einen in dem Sinne, daß eben ρ und η gleich bleiben, ähnlichen Lévy-Prozeß auf der gleichen Bialgebra mit einer anderen Deformation erhalten. Es ist interessant zu fragen, wann wir ψ so wählen können, daß die Deformation verschwindet, wann also der ursprüngliche Prozeß in einfacher Weise aus einem Prozeß auf einer nichtdeformierten Algebra hervorgeht. Die Gleichung

$$L = S + \partial\psi$$

sagt uns, daß dies genau dann der Fall ist, wenn L bzw. S ein Korand ist. In den folgenden Beispielen gehen wir deshalb wie folgt vor: Wir berechnen zu gegebenem ρ und η die Abbildung S und untersuchen, unter welchen Bedingungen diese ein Korand ist.

Beispiel 4.1. Es bezeichne $l^2(\mathbb{Z})$ den Hilbertraum der zweiseitigen quadratsummierbaren Folgen, d.h.

$$l^2(\mathbb{Z}) = \left\{ a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a(k)|^2 < \infty \right\}$$

mit Standardskalarprodukt. Dann bilden die Vektoren e_i, $e_i(j) = \delta_{i,j}$ ein vollständiges Orthonormalsystem.

Außerdem definieren wir den Shiftoperator $l : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$ durch $l(e_i) := e_{i+1}$. Dann ist l offenbar unitär und damit $l^*(e_i) = e_{i-1}$. Wir bezeichnen

mit $l^0(\mathbb{Z}) := \operatorname{Lin}\{e_i : i \in \mathbb{Z}\}$ den Unterraum der abbrechenden zweiseitigen Folgen und mit $l^0(\mathbb{Z})_{symm} := \operatorname{Lin}\{e_i + e_{-i} : i \in \mathbb{Z}\}$ den Unterraum der symmetrischen, abbrechenden zweiseitigen Folgen.
Die Einschränkungen von l und l^* auf $l^0(\mathbb{Z})_{symm}$ bezeichnen wir wieder mit l bzw. l^*.
Wir betrachten nun die Polynom-$*$-Bialgebra $B = \mathbb{C}[x]$ in einer selbstadjungierten Veränderlichen x. Komultiplikation und Koeins sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\Delta x &= x \otimes 1 + 1 \otimes x,\\ \delta x &= 0.\end{aligned}$$

Wir setzen

- $D := l^0(\mathbb{Z})_{symm}$ als Prähilbertraum,
- $\rho(x) := l + l^*$, $\rho(\mathbb{1}) = \mathrm{id}$ und setzen zu einer $*$-Darstellung von B auf D fort,
- $\eta(x) := e_0$, $\eta(\mathbb{1}) := 0$ und setzen zu einem ρ-δ-Kozyklus fort.

Behauptung. Es gilt:

$$\eta(x^{1+n}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e_{2k-1} = \sum_{k \in \{-n,-n+2,\dots,n-2,n\}} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} e_k$$

Beweis. Wir zeigen dies induktiv. Offenbar gilt die Aussage nach Definition von η für $n = 0$.
Gelte die Aussage nun für $n-1$. Dann ist

$$\begin{aligned}\eta(x^{1+n}) =&(l + l^*)\eta(x^n)\\ =&(l + l^*)\left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} e_{2k-n+1}\right)\\ =&\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (l^* + l) e_{2k-n+1}\\ =&\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} e_{2k-n} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} e_{2k-n+2}\\ =&e_{-n} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} e_{2k-n} + \sum_{k'=1}^{n-1} \binom{n-1}{k'-1} e_{2k-n} + e_n\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e_{-n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right) e_{2k-n} + e_n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e_{2k-n}.
\end{aligned}
$$

Die zweite Gleichung ist offensichtlich. □

Behauptung. Es gilt:

$$
S(x^{1+m} \otimes x^{1+n}) = \begin{cases} \binom{m+n}{\frac{m+n}{2}} & \text{für } m+n \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } m+n \text{ ungerade} \end{cases}
$$

Beweis. Im Falle $m+n$ ungerade, d.h. m gerade und n ungerade oder umgekehrt ist offenbar $\eta(x^{1+m}) \perp \eta(x^{1+n})$.
Sei also $m+n$ gerade und oBdA $m \geq n$. Dann erhalten wir

$$
\begin{aligned}
S(x^{1+m} \otimes x^{1+n}) &= \left\langle \eta(x^{1+m}), \eta(x^{1+n}) \right\rangle \\
&= \sum_{k \in \{-n, -n+2, \ldots, n\}} \binom{m}{\frac{k+m}{2}} \binom{n}{\frac{k+n}{2}} \\
&= \binom{m+n}{\frac{m+n}{2}}.
\end{aligned}
$$

Dabei folgt die letzte Gleichung durch wiederholtes Anwenden der Beziehung $\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$. □

Abschließend stellen wir noch fest, daß dieses S ein Korand ist. Wir setzen

$$
\psi(x^n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \text{ oder } n \text{ ungerade} \\ -\binom{n-2}{\frac{n-2}{2}} & \text{für } n > 0 \text{ gerade} \end{cases}
$$

und erhalten wir für $m+n$ gerade

$$
\begin{aligned}
\partial\psi(x^{1+m} \otimes x^{1+n}) &= -\psi(x^{2+m+n}) \\
&= \binom{n+m}{\frac{n+m}{2}} \\
&= S(x^{1+m} \otimes x^{1+n})
\end{aligned}
$$

und damit insgesamt $S = \partial\psi$.

Beispiel 4.2. Sei $B = \mathbb{C}[x]$ wie im vorhergehenden Beispiel, aber diesmal $D = l^0(\mathbb{N})$, l der (einseitige) Shiftoperator.

Wir setzen wieder $\rho(x) = l + l^*$, $\eta(x) = e_0 = (1, 0, \dots)$.

Behauptung. Unter diesen Voraussetzungen gilt

$$\eta(x^{1+n}) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \left(\binom{n}{\frac{n}{2}-k} - \binom{n}{\frac{n}{2}-k-1} \right) e_{2k} & \text{für } n \text{ gerade,} \\ \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \left(\binom{n}{\frac{n-1}{2}-k} - \binom{n}{\frac{n-1}{2}-k-1} \right) e_{2k+1} & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

wobei $\binom{n}{-1} := 0$

Beweis. Wir definieren:

$$\binom{n}{k}' := \begin{cases} \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} & \text{für } 0 < k \leq \frac{n}{2} \\ 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man betrachte das folgende Schema, in dem links die Binomialkoeffizienten, rechts die Zahlen $\binom{n}{k}'$ dargestellt sind:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 0 \\ 1 \quad 1 \quad 0 \\ 1 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \\ 1 \quad 3 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \\ 1 \quad 4 \quad 5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 1 \quad 5 \quad 9 \quad 5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Dann gilt

$$\binom{n}{k}' + \binom{n}{k+1}' = \binom{n+1}{k+1}'$$

für $k + 1 \leq \frac{n+1}{2}$.

Für $k + 1 < \frac{n+1}{2}$ folgt dies direkt aus der entsprechenden Eigenschaft für die Binomialkoeffizienten. Für $n + 1$ gerade und $k + 1 = \frac{n+1}{2}$ ist zu zeigen, daß

$$\binom{n}{\frac{n-1}{2}}' = \binom{n+1}{\frac{n+1}{2}}'$$

Dazu rechnen wir:

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{\frac{n+1}{2}}' &= \binom{n+1}{\frac{n+1}{2}} - \binom{n+1}{\frac{n-1}{2}} \\ &= \binom{n}{\frac{n-1}{2}} + \binom{n}{\frac{n+1}{2}} - \binom{n}{\frac{n-1}{2}} - \binom{n}{\frac{n-3}{2}} \\ &= \binom{n}{\frac{n+1}{2}} - \binom{n}{\frac{n-3}{2}} \end{aligned}$$

$$= \binom{n}{\frac{n-1}{2}} - \binom{n}{\frac{n-3}{2}}$$
$$= \binom{n}{\frac{n-1}{2}}'$$

Zu zeigen ist nun

$$\eta(x^{1+n}) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{\frac{n}{2}-k}' e_{2k} & \text{für } n \text{ gerade} \\ \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{\frac{n-1}{2}-k}' e_{2k+1} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und der Beweis erfolgt wie im vorherigen Beispiel. □

Wir erhalten außerdem

$$S(x^{1+m} \otimes x^{1+n}) = \begin{cases} \binom{m+n}{\frac{m+n}{2}}' = C_{\frac{n+m}{2}} & \text{für } m+n \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } m+n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

wobei C_k die k-te Catalan-Zahl bezeichnet.
Ebenfalls analog zum vorherigen Beispiel finden wir $S = \partial\psi$ mit

$$\psi(x^n) \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \text{ oder } n \text{ ungerade,} \\ -\binom{n-2}{\frac{n-2}{2}}' = -C_{\frac{n-2}{2}} & \text{für } n > 0 \text{ gerade.} \end{cases}$$

Beispiel 4.3. Als nächstes betrachten wir die Polynomalgebra in zwei kommutierenden Veränderlichen $\mathbb{C}[x, y]$. Eine $*$-Darstellung auf einem Prähilbertraum D ist dann durch $\rho(x)$ und $\rho(y)$ vollständig festgelegt. Die Operatoren $\rho(x), \rho(y)$ müssen offenbar selbstadjungiert sein und kommutieren. Ein Kozyklus η ist dann wegen der Kozykluseigenschaft durch $\eta(x)$ und $\eta(y)$ bestimmt. Wir betrachten zwei Spezialfälle.
1.Fall: $\rho(x)$ ist invertierbar
Schreiben wir $v := \rho(x)^{-1}\eta(x)$, so erhalten wir für $m + n > 0$

$$\eta(x^n y^m) = \rho(x)^n \rho(y)^m v$$

Zunächst gilt dies nach der Kozykluseigenschaft von η für $n > 0$, aber für $n = 0$ rechnen wir

$$\rho(y)^m v = \rho(y)^m \rho(x)^{-1}\eta(x) = \rho(x)^{-1}\eta(xy^m) = \eta(y^m).$$

Das zugehörige S ist nun ein Korand, da

$$\begin{aligned} S\left(x^{n_1}y^{m_1} \otimes x^{n_2}y^{m_2}\right) &= \left\langle \eta\left(x^{n_1}y^{m_1}\right), \eta\left(x^{n_2}y^{m_2}\right)\right\rangle \\ &= \left\langle \rho(x)^{n_1+n_2}\rho(y)^{m_1+m_2}v, v\right\rangle \ = \partial\psi\left(x^{n_1}y^{m_1} \otimes x^{n_2}y^{m_2}\right), \end{aligned}$$

wobei

$$\psi(x^n y^m) := \begin{cases} \langle \rho(x)^n \rho(y)^m v, v\rangle & \text{für } m+n>0, \\ 0 & \text{für } m=n=0. \end{cases}$$

2.Fall: $\rho = \delta$

In diesem Fall setzen wir $\eta(x) := \eta_1$ und $\eta(y) := \eta_2$ und erhalten wegen der Kozykluseigenschaft

$$\eta(x^m y^n) = 0 \text{ für } m+n \neq 1.$$

Wenn wir $S = \partial\psi$ erreichen wollen, dann muß gelten

$$\begin{gathered} S(x \otimes x) = \langle \eta_1, \eta_1\rangle = -\psi(x^2), \\ S(x \otimes y) = \langle \eta_1, \eta_2\rangle = -\psi(xy) = -\psi(yx) = \langle \eta_2, \eta_1\rangle = S(y \otimes x), \\ S(y \otimes y) = \langle \eta_2, \eta_2\rangle = -\psi(y^2). \end{gathered}$$

Das ist offenbar genau dann zu erfüllen, wenn $\langle \eta_1, \eta_2\rangle \in \mathbb{R}$, und dann erhalten wir, indem wir die obigen Gleichungen zusammen mit $\psi(x^n y^m) := 0$ für $m+n \neq 2$ als Definition verwenden, tatsächlich $S = \partial\psi$.

Setzen wir also $D = \mathbb{C}$, $\rho = \delta$, $\eta_1 = 1$ und $\eta_2 = \mathrm{i}$, so erhalten wir für ein beliebiges hermitesches, normiertes lineares Funktional ein Beispiel eines Prozesses auf einer deformierten Algebra, der nicht durch Änderung des Drifttermes auf einer undeformierten Algebra realisiert werden kann. Eine gute Wahl für ψ ist:

$$\psi(M) = \begin{cases} 1 & \text{falls } M = x^2 \text{ oder } M = y^2 \\ 0 & \text{für alle anderen Monome} \end{cases}$$

Wir berechnen zunächst die Deformation:

$$\begin{aligned} L(x^k y^m \otimes x^n y^r) &= S(x^k y^m \otimes x^n y^r) + \partial\psi(x^k y^m \otimes x^n y^r) \\ &= \left\langle \eta(x^k y^m), \eta(x^n y^r)\right\rangle + \delta(x^k y^m)\psi(x^n y^r) \\ &\quad - \psi(x^{k+n} y^{m+r}) + \psi(x^k y^m)\delta(x^n y^r) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$L(x \otimes x) = 1 - 1 = 0 \qquad L(x \otimes y) = i$$
$$L(y \otimes x) = -i \qquad L(y \otimes y) = 1 - 1 = 0$$

und $L(x^k y^m \otimes x^n y^r) = 0$ in allen anderen Fällen. Unsere Wahl von ψ hat also den symmetrischen Anteil von L zum Verschwinden gebracht.
Um nun die Multiplikation zu untersuchen, müssen wir uns die Koalgebrastruktur von $\mathbb{C}[x, y]$ ins Gedächtnis rufen. Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= x \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes x, \\ \Delta(y) &= y \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes y, \\ \delta(x) &= \delta(y) = 0. \end{aligned}$$

Wir machen folgende Beobachtung:

Behauptung. Sei $x^k y^l$ ein Monom. Dann läßt sich das n-te Koprodukt für $n \geq 1$ schreiben als

$$\Delta^{(n)}(x^k y^l) = \sum x^{k_1^i} y^{l_1^i} \otimes \cdots \otimes x^{k_n^i} y^{l_n^i},$$

sodaß für alle i gilt

$$\begin{aligned} k_1^i + \cdots + k_n^i &= k \\ l_1^i + \cdots + l_n^i &= l. \end{aligned}$$

Das heißt, die Anzahl der x bzw. y wird durch das Koprodukt nicht verändert.

Beweis. Wir betrachten zunächst $\Delta^{(n)}(x)$ und zeigen, daß dies eine Summe ist, in der in jedem Summanden genau ein x auftaucht. Wir zeigen dies induktiv. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei nun also

$$\Delta^{(n)}(x) = \sum \mathbb{1}^{\otimes r_i} \otimes x \otimes \mathbb{1}^{\otimes(n-r_i-1)}.$$

Wenn wir nun daraus $\Delta^{(n+1)}$ bilden, indem wir an irgendeiner Stelle Δ anwenden, können in jedem Summanden zwei Dinge passieren:

1. Δ trifft auf eine $\mathbb{1}$. Da $\Delta\mathbb{1} = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$ ist in dem Summanden immer noch genau ein x.

2. Δ trifft auf das x. Da $\Delta(x) = \mathbb{1}\otimes x + x\otimes\mathbb{1}$ entstehen zwei Summanden, von denen jeder genau ein x enthält.

In jedem Fall können wir $\Delta^{(n+1)}(x)$ als Summe schreiben, sodaß in jedem Summanden n Faktoren $\mathbb{1}$ sind und genau ein Faktor x ist.
Für $\Delta^{(n)}(y)$ erhalten wir die Behauptung genauso. Da aber $\Delta^{(n)}$ ein Algebrahomomorphismus ist, folgt die Behauptung allgemein. Es ist dann

$$\Delta^{(n)}(x^k y^l) = \Delta^{(n)}(x)^k \Delta^{(n)}(y)^l$$

und wir erhalten eine Summendarstellung entsprechend der Behauptung durch Ausmultiplizieren. □

Entsprechendes gilt natürlich auch für $\Lambda = \Delta\widetilde{\otimes}\Delta$, d.h. $\Lambda^{(n)}(x^k y^l \otimes x^n y^r)$ läßt sich als Summe schreiben, sodaß in jedem Summanden genau k Symbole x und l Symbole y auf die ungeraden Positionen, n Symbole x und r Symbole y auf die geraden Positionen verteilt sind.
Diese Bemerkung ist wichtig um $e_\star^{tL}$ zu berechnen, da wir damit die Exponentialreihe abbrechen können. Da ja $L(b\otimes\mathbb{1}) = L(\mathbb{1}\otimes b) = 0$ für alle $b \in B$ ist sicher $L^{\otimes n}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{2n}) = 0$, wenn nur eines der $a_i = \mathbb{1}$ ist.

Behauptung. Wenn $k + l < n$ oder $m + r < n$, so ist

$$L^{\star n}(x^k y^l \otimes x^m y^r) = 0.$$

Beweis. Sei $k+l < n$. Dann läßt sich $\Lambda^{(n)}(x^k y^l \otimes x^m y^r)$ als Summe schreiben, sodaß in jedem Summanden mindestens ein Faktor gleich $\mathbb{1}$ ist, da nur $k+n$ Symbole x, y auf die n geraden Stellen zu verteilen sind. Also folgt

$$L^{\star n}(x^k y^l \otimes x^m y^r) = L^{\otimes n}(\Lambda^{(n)}(x^k y^l \otimes x^m y^r) = 0.$$

□

Wir nutzen dies, um μ_t genauer zu untersuchen. Da die $\mathbb{1}$ Neutralelement für alle μ_t ist, sind die ersten nichttrivialen Produkte:

$$\begin{aligned}
\mu_t(x\otimes x) &= x^2 & \mu_t(x\otimes y) &= xy + \mathrm{i}t \\
\mu_t(y\otimes x) &= xy - \mathrm{i}t & \mu_t(y\otimes y) &= y^2 \\
\mu_t(x^2\otimes x) &= x^3 & \mu_t(xy\otimes x) &= x^2 y - \mathrm{i}tx
\end{aligned}$$

Wir rechnen beispielhaft $\mu_t(x \otimes y) = xy + it$ nach. Zunächst berechnen wir $\Lambda(x \otimes y)$:

$$\begin{aligned}
&\Lambda(x \otimes y)\\
=&(\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})\Big((x \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes x) \otimes (y \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes y)\Big)\\
=&x \otimes y \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + x \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes y + \mathbb{1} \otimes y \otimes x \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes x \otimes y
\end{aligned}$$

Als nächstes wenden wir $e_\star^{tL}$ auf die hinteren beiden Faktoren der vier Summanden an:

$$e_\star^{tL}(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) = (\delta \otimes \delta)(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) + tL(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) + \frac{t^2(L \star L)}{2}(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) + \dots = 1.$$

Wir haben hier überhaupt kein x oder y, also ist $L^{\star n}(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) = 0$ für $n > 0$.

$$e_\star^{tL}(\mathbb{1} \otimes y) = (\delta \otimes \delta)(\mathbb{1} \otimes y) + tL(\mathbb{1} \otimes y) + \frac{t^2(L \star L)}{2}(\mathbb{1} \otimes y) + \dots = 0.$$

Da auf den ungeraden Plätzen keine x, y vorkommen, ist wieder $L^{\star n}(\mathbb{1} \otimes y) = 0$ für $n > 0$. Diesmal ist aber auch der erste Summand Null, da ja $\delta(y) = 0$. Die Berechnung des dritten Summanden ist analog und wir erhalten

$$e_\star^{tL}(x \otimes \mathbb{1}) = 0.$$

Bleibt noch der vierte Summand:

$$\begin{aligned}
e_\star^{tL}(x \otimes y) &= (\delta \otimes \delta)(x \otimes y) + tL(x \otimes y) + \frac{t^2(L \star L)}{2}(x \otimes y) + \dots\\
&= tL(x \otimes y) = \mathrm{i}t.
\end{aligned}$$

Da wir auf den ungeraden Plätzen ein x, auf den geraden ein y haben, ist $L^{\star n}(x \otimes y) = 0$ für $n > 1$. Insgesamt erhalten wir

$$\mu_t(x \otimes y) = (\mu \star e_\star^{tL})(x \otimes y) = (\mu \otimes e_\star^{tL})(\Lambda(x \otimes y)) = xy + \mathrm{i}t\mathbb{1}.$$

Das einzige andere Produkt, das wir im Weiteren benötigen, ist $\mu_t(y \otimes x) = xy - it$. Die Rechnung läuft völlig analog, mit dem einzigen Unterschied, daß $L(y \otimes x) = -\mathrm{i}$ ist.

Nun wollen wir den zu D, ρ, η und ψ gehörigen Lévy-Prozeß betrachten, also die Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \mathrm{d}j_{st}(b) &= j_{st} \star \mathrm{d}I_t \\ j_{ss} &= 0 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} I_t(x) &= A_t + A_t^* \\ I_t(y) &= \mathrm{i}A_t - \mathrm{i}A_t^*. \end{aligned}$$

Behauptung. Schreiben wir $X_t := j_{0t}(x)$ und $Y_t := j_{0t}(y)$, so gilt

$$\begin{aligned} X_s X_t &= X_t X_s, \\ Y_s Y_r &= Y_t Y_s, \\ X_s Y_t &= Y_t X_s + 2\mathrm{i}\min(s,t). \end{aligned}$$

Beweis. Sei oBdA $s \leq t$. Wir erhalten unter Beachtung der Zuwachseigenschaft der j_{st}, sowie der Unabhängigkeit von j_{0s} und j_{st}

$$\begin{aligned} X_s X_t &= j_{0s}(x) j_{0t}(x) \\ &= j_{0s}(x)(j_{0s} \star j_{st})(x) \\ &= j_{0s}(x)(j_{0s}(x) + j_{st}(x)) \\ &= (j_{0s}(x) + j_{st}(x)) j_{0s}(x) \\ &= X_t X_s \end{aligned}$$

Die Gleichung für die Y_t folgt analog. Zur letzten Gleichung (hier benutzen wir, daß j_{0s} ein Algebrahomomorphismus bzgl. μ_s ist):

$$\begin{aligned} X_s Y_t &= j_{0s}(x) j_{0t}(y) \\ &= j_{0s}(x)(j_{0s} \star j_{st})(y) \\ &= j_{0s}(x)(j_{0s}(y) + j_{st}(y)) \\ &= j_{0s}(x) j_{0s}(y) + j_{0s}(x) j_{st}(y) \\ &= j_{0s}(\mu_s(x \otimes y)) + j_{st}(y) j_{0s}(x) \\ &= j_{0s}(xy + \mathrm{i}s) + j_{st}(y) j_{0s}(x) \\ &= j_{0s}(\mu_s(y \otimes x) + 2\mathrm{i}s) + j_{st}(y) j_{0s}(x) \\ &= j_{0s}(y) j_{0s}(x) + 2\mathrm{i}s + j_{st}(y) j_{0s}(x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (j_{0s}(y) + j_{st}(y))j_{0s}(x) + 2\mathrm{i}s \\
&= Y_t X_s + 2\mathrm{i}s
\end{aligned}
$$

□

Das Beispiel läßt sich leicht auf die Polynomalgebra in n Veränderlichen $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_d]$ verallgemeinern. Wir wählen $\eta_i = \eta(x_i)$, sodaß $\mathrm{Lin}\{\eta_1, \ldots, \eta_d\} = \mathbb{C}^n$, setzen $D = \mathbb{C}^n$, $\rho = \delta$ und $\psi = 0$. Wir schreiben $Q_{ij} = \langle \eta_i, \eta_j \rangle$. Dann ist Q eine positiv semidefinite Matrix. Für die Deformation erhalten wir offenbar

$$L(x_i \otimes x_j) = Q_{ij}$$

und L ist Null auf allen anderen Monomen. Wir können dies auch anders schreiben. Bezeichne ∂_i die partielle Ableitung eines Polynoms nach x_i in 0. Dann gilt für Polynome $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_d]$

$$L(f, g) = \sum_{i,j=1}^{d} Q_{ij} \partial_i(f) \partial_j(g).$$

Wir können wieder den zugehörigen Lévy-Prozeß j_{st} betrachten. Mit $X_t^{(i)} := j_{0t}(x_i)$ erhalten wir genau wie im Falle zweier Veränderlicher

$$\left[X_s^{(i)}, X_t^{(j)}\right] = \min(s,t)(Q_{ij} - Q_{ji}).$$

Behauptung. L ist Korand genau dann, wenn Q eine reelle Matrix ist.

Beweis. Ist $L = S = -\partial\psi$ Korand, so gilt offenbar

$$
\begin{aligned}
Q_{ij} = \langle \eta_i, \eta_j \rangle &= L(x_i \otimes x_j) \\
&= -\partial\psi(x_i \otimes x_j) \\
&= \psi(x_i x_j) \quad \text{da } \delta(x_k) = 0 \\
&= \psi(x_j x_i) \quad \text{(da die } x_k \text{ vertauschen)} \\
&= Q_{ji} \quad \text{(die Rechnung rückwärts)} \\
&= \overline{Q_{ij}} \quad \text{(da } Q \text{ hermitesch).}
\end{aligned}
$$

Bleibt die Umkehrung zu zeigen. Ist Q reell, so gilt $Q_{ij} = Q_{ji}$. Setzen wir nun einfach $\psi(x_i x_j) := Q_{ij}$, und Null auf allen anderen Monomen, so erhalten wir für beliebige Monome M, N

$$-\partial\psi(M \otimes N) = \begin{cases} 0 & \text{falls } M = \mathbb{1} \text{ oder } N = \mathbb{1}, \\ \psi(x_i x_j) = Q_{ij} & \text{falls } M = x_i, N = x_j, \\ \psi(MN) = 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

insgesamt also $-\partial\psi(x_i \otimes x_j) = Q_{ij}$ und Null auf allen anderen Monomen, d.h. $-\partial\psi = L$. □

Wir können also immer durch Änderung von ψ dafür sorgen, daß Q eine rein imaginäre Matrix ist.

Beispiel 4.4. Sei $\mathfrak{L}$ eine $*$-Lie-Algebra, $U(\mathfrak{L})$ die universelle Einhüllende. In Bsp. 2.14 haben wir gesehen, daß $U(\mathfrak{L})$ eine Bialgebra ist, wobei für $x \in \mathfrak{L}$

$$\Delta(x) = x \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes x \quad \text{und} \quad \delta(x) = 0$$

$U(\mathfrak{L})$ ist kokommutativ, also gibt jeder 2-Kozyklus L eine Deformation von $U(\mathfrak{L})$. Ist $\mathfrak{L}$ abelsch und endlichdimensional, so ist $U(\mathfrak{L})$ gerade eine Polynomalgebra, und wir sind in der Situation des vorherigen Beispiels. Ist $\mathfrak{L}$ zwar abelsch, aber nicht notwendig endlichdimensional, so ist die natürliche Verallgemeinerung der Kozyklen des vorigen Beispiels

$$L(f \otimes g) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_i(f)\overline{\mathrm{d}_j(g^*)}$$

für $f, g \in U(\mathfrak{L})$, wobei d_i beliebige Derivationen sind, d.h. $\mathrm{d}_i : U(\mathfrak{L}) \to \mathbb{C}$ mit

$$\mathrm{d}_i(fg) = \delta(f)\mathrm{d}_i(g) + \mathrm{d}_i(f)\delta(g)$$

(offenbar sind partielle Ableitungen bei 0 von Polynomen Derivationen in diesem Sinne). Daß hier tatsächlich ein positiver 2-Kozyklus vorliegt, rechnen wir nach:

$$\partial L(f \otimes g \otimes h) = \sum_{i,j=1}^{n} \delta(f)\mathrm{d}_i(g)\overline{\mathrm{d}_j(h^*)} - \mathrm{d}_i(fg)\overline{\mathrm{d}_j(h^*)} \\ + \mathrm{d}_i(f)\overline{\mathrm{d}_j(h^* g^*)} - \mathrm{d}_i(f)\overline{\mathrm{d}_j(g^*)}\delta(h)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{n} \delta(f)\mathrm{d}_i(g)\overline{\mathrm{d}_j(h^*)} - \mathrm{d}_i(f)\delta(g)\overline{\mathrm{d}_j(h^*)} - \delta(f)\mathrm{d}_i(g)\overline{\mathrm{d}_j(h^*)} \\
&\quad + \mathrm{d}_i(f)\overline{\mathrm{d}_j(h^*)}\delta(g) + \mathrm{d}_i(f)\delta(h)\overline{\mathrm{d}_j(g)} - \mathrm{d}_i(f)\overline{\mathrm{d}_j(g)}\delta(h) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Die Positivität ist ebenfalls leicht zu sehen. Schreiben wir

$$
\mathrm{d}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_1(f) \\ \vdots \\ \mathrm{d}_n(f) \end{pmatrix},
$$

so ist $L(f^* \otimes f)$ gerade das Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}^n$ von $\mathrm{d}(f^*)$ mit sich selbst, also insbesondere $L(f^* \otimes f) \geq 0$.

Beispiel 4.5. Diesmal betrachten wir $B = \mathbb{C}\mathbb{Z}$. Wir schreiben dabei $\mathbb{C}$ als freie von a erzeugte Gruppe, d.h. $\mathbb{Z} = \left\{a^k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Sei D ein Prähilbertraum. Dann ist eine $*$-Darstellung von B auf D durch einen unitären Operator U auf D durch $\rho(a) = U$ festgelegt.
η sei ein surjektiver ρ-δ-Kozyklus und wir nehmen weiterhin an, daß $\eta(a) = (U - \mathrm{id})v$ für ein $v \in D$, also $\eta(a) \in \mathrm{bild}(U - \mathrm{id})$.

Behauptung. Unter diesen Voraussetzungen gilt

$$
\eta(a^k) = (U^k - \mathrm{id})v. \tag{4.14}
$$

Beweis. Offenbar ist $\eta(a^0) = \eta(\mathbb{1}) = 0 = (U^0 - \mathrm{id})v$.
Sei die Aussage für $k \in \mathbb{Z}$ gültig. Dann rechnen wir nach

$$
\begin{aligned}
\eta(a^{k+1}) &= \rho(a^k)\eta(a) + \eta(a^k)\delta(a) \\
&= U^k\eta(a) + (U^k - \mathrm{id})v \\
&= U^k(U - \mathrm{id})v + (U^k - \mathrm{id})v \\
&= (U^{k+1} - U^k + U^k - \mathrm{id})V \\
&= (U^{k+1} - \mathrm{id})v.
\end{aligned}
$$

Damit haben wir die (4.14) für alle $k \in \mathbb{Z}^+$. Wir rechnen weiter:

$$
\begin{aligned}
0 = \eta(a^0) &= \eta(a^k a^{-k}) = U^k\eta(a^{-k}) + \eta(a^k) \\
\Rightarrow \eta(a^{-k}) &= -U^{-k}\eta(a^k) = (U^{-k} - \mathrm{id})v
\end{aligned}
$$

□

Wir setzen nun

$$\psi(a^k) := \left\langle U^{-k}v, v\right\rangle - \langle v, v\rangle = \left\langle v, (U^k - \mathrm{id})v\right\rangle$$

und erhalten

$$\begin{aligned} S(a^k \otimes a^l) &= \left\langle \eta(a^{-k}), \eta(a^l)\right\rangle \\ &= \left\langle (U^{-k} - \mathrm{id})v, (U^l - \mathrm{id})v\right\rangle \\ &= \left\langle U^{-(k+l)}v, v\right\rangle - \left\langle U^{-k}v, v\right\rangle - \left\langle U^{-l}v, v\right\rangle + \langle v, v\rangle \\ &= \psi(a^k a^l) - \psi(a^k) - \psi(a^l) \\ &= -\partial\psi(a^k \otimes a^l), \end{aligned}$$

also ist S ein Korand.

Beispiel 4.6. Als letztes Beispiel betrachten wir nun noch $\mathbb{Z}^2 = \left\{a^k b^l : k, l \in \mathbb{Z}\right\}$. Eine $*$-Darstellung auf einem Prähilbertraum D erhalten wir hier, indem wir unitäre Operatoren U und V vorgeben, sodaß $UV = VU$ und dann

$$\rho(a) := U, \quad \rho(b) = V$$

fortsetzen. Wir fordern außerdem, daß $U - \mathrm{id}$ invertierbar ist.
Sei nun wieder η ein surjektiver ρ-δ-Kozyklus. Wir setzen $v := (U - \mathrm{id})^{-1}\eta(a)$.

Behauptung. Es ist $\eta(a^k b^l) = (U^k V^l - \mathrm{id})v$.

Beweis. Wie im vorherigen Beispiel erhalten wir $\eta(a^k) = (U^k - \mathrm{id})v$ und

$$\begin{aligned} & U\eta(b) + \eta(a) = \eta(ab) = \eta(ba) = V\eta(a) + \eta(b) \\ \Rightarrow & (U - \mathrm{id})\eta(b) = (V - \mathrm{id})\eta(a) \\ \Rightarrow & \eta(b) = (V - \mathrm{id})(U - \mathrm{id})^{-1}\eta(a) = (V - \mathrm{id})v. \end{aligned}$$

Wieder gilt wie im vorherigen Beispiel $\eta(b^l) = (V^l - \mathrm{id})v$ und schließlich

$$\begin{aligned} \eta(a^k b^l) &= U^k\eta(b^l) + \eta(a^k) \\ &= U^k(V^l - \mathrm{id})v + (U^k - \mathrm{id})v \\ &= (U^k V^l - U^k + U^k - \mathrm{id})v \\ &= (U^k V^l - \mathrm{id})v. \end{aligned}$$

□

Setzen wir hier $\psi(a^k b^l) := \big\langle v, (U^k V^l - \mathrm{id})v \big\rangle$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} S(a^{k_1} b^{l_1} \otimes a^{a_2} b^{l_2}) &= \big\langle (U^{-k_1} V^{-l_1} - \mathrm{id})v, (U^{k_2} V^{l_2} - \mathrm{id})v \big\rangle \\ &= \big\langle v, U^{k_1+k_2} V^{l_1+l_2} v \big\rangle - \big\langle v, U^{k_1} V^{l_1} v \big\rangle - \big\langle v, U^{k_2} V^{l_2} v \big\rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \psi(a^{k_1} b^{l_1} a^{k_2} b^{l_2}) - \psi(a^{k_1} b^{l_1}) - \psi(a^{k_2} b^{l_2}) \\ &= -\partial\psi(a^{k_1} b^{l_1} \otimes a^{a_2} b^{l_2}), \end{aligned}$$

also ist S Korand.
Mit

$$\begin{aligned} D &= \mathbb{C} & \rho &= \delta \\ \eta(a) &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \eta(b) &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ \psi &= 0 \end{aligned}$$

erhalten wir ein Beispiel, bei dem die Deformation eine tragende Rolle spielt.

Behauptung. Es gilt $\eta(a^k b^l) = \dfrac{k + \mathrm{i}l}{\sqrt{2}}$.

Beweis. Wir rechnen allgemein mit $\eta(a) = \eta_1, \eta(b) = \eta_2$:

$$\begin{aligned} \eta(a^{k_1+k_2} b^{l_1+l_2}) &= \eta(a^{k_1} b^{l_1})\delta(a^{k_2} b^{l_2}) + \delta(a^{k_1} b^{l_1})\eta(a^{k_2} b^{l_2}) \\ &= \eta(a^{k_1} b^{l_1}) + \eta(a^{k_2} b^{l_2}). \end{aligned}$$

Induktiv folgt nun $\eta(a^k b^l) = k\eta_1 + l\eta_2$. □

Wir erhalten für die Deformation:

$$\begin{aligned} L(a^k b^l \otimes a^n b^r) &= S(a^k b^l \otimes a^n b^r) \\ &= \frac{1}{2}\overline{(-k - \mathrm{i}l)}(n + \mathrm{i}r) \\ &= \frac{1}{2}(-kn - lr) + \frac{\mathrm{i}}{2}(ln - kr). \end{aligned}$$

Der Realteil ist ein Korand und wir können ihn wegtransformieren: Setze $\widetilde{\psi}(k, l) := -\frac{k^2+l^2}{4}$. Dann erhalten wir

$$\widetilde{L}(a^k b^l \otimes a^n b^r) = \frac{\mathrm{i}}{2}(ln - kr).$$

Damit ergibt sich für die Multiplikation

$$\mu_t(a^k b^l \otimes a^n b^r) = a^{k+n} b^{l+r}\ e^{\frac{\mathrm{i}}{2}t(ln-kr)}.$$

Nun wollen wir den zugehörigen Lévy-Prozeß betrachten, also die nach Satz 4.10 eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \mathrm{d}j_{st}(a^k b^l) &= j_{st}(a^k b^l)\mathrm{d}I_t(a^k b^l) \\ j_{ss}(a^k b^l) &= \mathrm{id}, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} I_t(a) &= \frac{1}{\sqrt{2}}A_t^* - \frac{1}{\sqrt{2}}A_t - \frac{t}{4} \\ I_t(b) &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}A_t^* - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}A_t - \frac{t}{4}. \end{aligned}$$

Behauptung. Wir schreiben $U_t := j_{0t}(a)$ und $V_t := j_{0t}(b)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} U_s U_t &= U_t U_s \\ V_s V_t &= V_t V_s \\ U_s V_t &= V_t U_s\ e^{-\mathrm{i}\min(s,t)}. \end{aligned}$$

Beweis. Sei oBdA $s \leq t$. Dann gilt wegen der Zuwachseigenschaft

$$j_{0t} = j_{0s} \star j_{st}$$

und insbesondere

$$\begin{aligned} U_t &= j_{0t}(a) = j_{0s}(a) j_{st}(a) \\ V_t &= j_{0t}(b) = j_{0s}(a) j_{st}(b). \end{aligned}$$

Wir erhalten damit wegen der Unabhängigkeit von j_{0s} und j_{st}

$$\begin{aligned} U_s U_t = j_{0s}(a) j_{st}(a) &= j_{0s}(a) j_{0s}(a) j_{st}(a) \\ &= j_{0s}(a) j_{st}(a) j_{0s}(a) \\ &= j_{0t}(a) j_{0s}(a) \\ &= U_t U_s. \end{aligned}$$

Die Gleichung $V_s V_t = V_t V_s$ folgt analog. Für die letzte Gleichung benutzen wir, daß j_{0s} Algebrahomomorphismus von B_s nach $\mathcal{A}$ ist, wodurch die deformierte Multiplikation ins Spiel kommt:

$$\begin{aligned}
U_sV_t = j_{0s}(a)j_{0t}(b) &= j_{0s}(a)j_{0s}(b)j_{st}(b)\\
&= j_{0s}(\mu_s(a\otimes b))j_{st}(b)\\
&= j_{0s}(ab\ e^{-\frac{\mathrm{i}}{2}s})j_{st}(b)\\
&= j_{0s}(ab\ e^{\frac{\mathrm{i}}{2}s})e^{-\mathrm{i}s}j_{st}(b)\\
&= j_{0s}(\mu_s(b\otimes a))e^{-\mathrm{i}s}j_{st}(b)\\
&= j_{0s}(b)j_{0s}(a)j_{st}(b)\ e^{-\mathrm{i}s}\\
&= j_{0s}(b)j_{st}(b)j_{0s}(a)\ e^{-\mathrm{i}s}\\
&= V_tU_s\ e^{-\mathrm{i}s}
\end{aligned}$$

□

Wir können auch hier auf $Z^d = \left\{a_1^{k_1}\dots a_d^{k_d} : k_1,\dots,d_d\in\mathbb{Z}\right\}$ verallgemeinern. Seien $\eta_i = \eta(a_i)$ so gewählt, daß sie $\mathbb{C}^n$ aufspannen. Wir setzen dann $D=\mathbb{C}^n$, $\rho=\delta$ und η läßt sich eindeutig als Kozyklus fortsetzen. Es gilt dann

$$\eta(a_1^{k_1}\dots a_d^{k_d}) = k_1\eta_1+\dots+k_d\eta_d.$$

Definieren wir die Matrix Q durch

$$Q_{ij} = \langle \eta_i,\eta_j\rangle\,,$$

so erhalten wir eine komplexe, positiv definite Matrix. Für S erhalten wir

$$\begin{aligned}
S(a^{k_1}\dots a^{k_d}\otimes a^{l_1}\dots a^{l_d}) &= \left\langle \eta(a^{-k_1}\dots a^{-k_d}),\eta(a^{l_1}\dots a^{l_d})\right\rangle\\
&= -\left\langle k_1\eta_1+\dots+k_d\eta_d, l_1\eta_1+\dots+l_d\eta_d\right\rangle\\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} k_il_j\left\langle\eta_i,\eta_j\right\rangle\\
&= -\left\langle (k_1,\dots,k_d),Q(l_1,\dots,l_d)\right\rangle,
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile das Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}^d$ gemeint ist. Es gilt:

Behauptung. S ist Korand genau dann, wenn Q reell ist.

Beweis. Ist $S=-\partial\psi$ Korand, so gilt

$$Q_{ij} = \langle\eta_i,\eta_j\rangle = -\left\langle \eta(a_i^{-1}),\eta(a_j)\right\rangle = -S(a_i\otimes a_j)$$

$$\begin{aligned}
&= \partial\psi(a_i \otimes a_j) \\
&= \psi(a_i) + \psi(a_j) - \psi(a_i a_j) \\
&= \psi(a_j) + \psi(a_i) - \psi(a_j a_i) \\
&= Q_{ji} = \overline{Q_{ij}}.
\end{aligned}$$

Um die Umkehrung zu zeigen, setzen wir

$$\psi(a^{k_1} \dots a^{k_d}) := -\frac{1}{2} \langle (k_1, \dots, k_d), Q(k_1, \dots, k_d) \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} k_i k_j Q_{ij}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&- \partial\psi(a^{k_1} \dots a^{k_d} \otimes a^{l_1} \dots a^{l_d}) \\
&= -\psi(a^{k_1} \dots a^{k_d}) - \psi(a^{l_1} \dots a^{l_d}) + \psi(a^{k_1+l_1} \dots a^{k_d+l_d}) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle (k_1, \dots, k_d), Q(k_1, \dots, k_d) \rangle + \langle (l_1, \dots, l_d), Q(l_1, \dots, l_d) \rangle \\
&\quad - \langle (k_1 + l_1, \dots, k_d + l_d), Q(k_1 + l_1, \dots, k_d + l_d) \rangle \Big) \\
&= -\frac{1}{2}\Big(\langle (k_1, \dots, k_d), Q(l_1, \dots, l_d) \rangle + \langle (l_1, \dots, l_d), Q(k_1, \dots, k_d) \rangle \Big) \\
&= - \langle (k_1, \dots, k_d), Q(l_1, \dots, l_d) \rangle \quad \text{da } Q \text{ reell} \\
&= S(a^{k_1} \dots a^{k_d} \otimes a^{l_1} \dots a^{l_d}).
\end{aligned}$$

□

4.7 Der maximale Korandanteil von S

Wir verallgemeinern die Erfahrungen der letzten Beispiele.

Satz 4.16. *Sei B eine $*$-Bialgebra. Sei weiterhin D ein Prähilbertraum, ρ eine $*$-Darstellung von B auf D und η ein surjektiver ρ-δ-Kozyklus. Wenn es ein Element b_0 im Zentrum von B gibt, sodaß $(\rho - \delta)(b_0)$ invertierbar ist, dann ist S ein Korand.*

Beweis. Setze $v := \rho(b_0)^{-1}\eta(b_0)$. Wir wollen zeigen, daß dann

$$\eta(b) = (\rho(b) - \delta(b))v. \tag{4.15}$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned}(\rho-\delta)(b_0)\eta(b) &= \eta(b_0 b) - \delta(b)\eta(b_0) - \delta(b_0)\eta(b)\\ &= \eta(bb_0) - \delta(b)\eta(b_0) - \delta(b_0)\eta(b) \quad \text{(da } b_0 \text{ im Zentrum)}\\ &= \rho(b)\eta(b_0) + \eta(b)\delta(b_0) - \delta(b)\eta(b_0) - \delta(b_0)\eta(b)\\ &= (\rho-\delta)(b)\eta(b_0).\end{aligned}$$

Da $(\rho-\delta)(b_0)$ invertierbar ist folgt (4.15).
Setzen wir nun $\psi(a) := -\langle v, (\rho-\delta)(a)v\rangle$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}S(a\otimes b) &= \langle \eta(a^*), \eta(b)\rangle\\ &= \langle (\rho-\delta)(a^*)v, (\rho-\delta)(b)v\rangle\\ &= \langle v, \rho(ab)v\rangle - \delta(a)\langle v, \rho(b)v\rangle - \delta(b)\langle v,\rho(a)v\rangle + \delta(a)\delta(b)\langle v, v\rangle\\ &= -\psi(ab) + \delta(a)\psi(b) + \delta(b)\psi(a)\\ &= \partial\psi(a\otimes b).\end{aligned}$$

S ist also Korand. □

Wir benötigen das folgende Lemma.

Lemma 4.17. *Sei $\mathcal{A}$ eine endlich erzeugte $*$-Algebra, d.h. es gibt $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ mit*

$$\mathcal{A} = \langle a_1, \dots, a_n\rangle := \bigcap \{\mathcal{B} : a_1, \dots, a_n \in \mathcal{B} \text{ und } \mathcal{B}\ *\text{-Unteralgebra von } \mathcal{A}\}.$$

Dann existieren $m \in \mathbb{N}$ und selbstadjungierte Elemente $b_1, \dots, b_m \in \ker\delta$ mit

$$\mathcal{A} = \langle \mathbb{1}, b_1, \dots, b_n\rangle.$$

Beweis. Setze $\widetilde{b_i} := \frac{a_i + a_i^*}{2}$ und $\widetilde{c_i} := \frac{a_i - a_i^*}{2\mathrm{i}}$. Dann sind die b_i, c_i offenbar selbstadjungiert und es ist $a_i = \widetilde{b_i} + \mathrm{i}\widetilde{c_i}$, also

$$\langle a_1, \dots, a_n\rangle = \left\langle \widetilde{b_1}, \dots, \widetilde{b_n}, \widetilde{c_1}, \dots, \widetilde{c_n}\right\rangle.$$

Setzen wir nun $b_i := \widetilde{b_i} - \delta(b_i)$ und $c_i := \widetilde{c_i} - \delta(c_i)$, so gilt offenbar $\widetilde{b_i}, \widetilde{c_i} \in \ker\delta$ und

$$\mathcal{A} = \langle \mathbb{1}, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n\rangle.$$

□

Satz 4.18. *Sei B eine endlich erzeugte, kommutative $*$-Bialgebra, $B = \langle \mathbb{1}, b_1, \ldots, b_n \rangle$ mit $b_1, \ldots, b_n \in \operatorname{kern} \delta$ selbstadjungiert, D ein endlichdimensionaler Hilbertraum, ρ eine $*$-Darstellung von B auf D, η ein surjektiver ρ-δ-Kozyklus. Dann gibt es ρ-invariante Unterräume D_1, D_2 von D mit:*

- $D = D_1 \oplus D_2$.
- $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$, *wobei* $\rho_i := \rho|_{D_i}$.
- $\eta_i := \pi_i \circ \eta$ *ist* ρ_i-δ-*Kozyklus*
(π_i *Projektion auf* D_i).
- $\rho_1 = \delta$, *d.h.* $\rho_1(b) = \delta(b) \operatorname{id}_{D_1}$.
- S_2 *ist Korand, wobei* $S_2(a,b) := \langle \eta_2(a^*), \eta_2(b) \rangle$.

Beweis. Betrachte $b_0 := \sum_{k=1}^n b_k^2$. Dann ist $\rho(b_0)$ positiv, da

$$\begin{aligned}\langle v, \rho(b_0) v \rangle = \left\langle v, \rho\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) v \right\rangle &= \sum_{k=1}^n \langle v, \rho(b_k)^2 v \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \langle \rho(b_k) v, \rho(b_k) v \rangle \geq 0.\end{aligned}$$

Wir erhalten also, da $\rho(b_0)$ insbesondere normal, die Zerlegung

$$D = \underbrace{\operatorname{kern} \rho(b_0)}_{=:D_1} \oplus \underbrace{\operatorname{bild} \rho(b_0)}_{=:D_2}.$$

D_1 und D_2 sind ρ-invariante Unterräume von D, da

$$\begin{aligned} v \in D_1 &\Rightarrow \rho(b_0)\rho(b)v = \rho(b_0 b)v = \rho(b b_0)v = \rho(b)\rho(b_0)v = 0 \\ &\Rightarrow \rho(b)v \in D_1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v \in D_2 &\Rightarrow \exists w \in D : v = \rho(b_0)w \\ &\Rightarrow \exists w \in D : \rho(b)v = \rho(b b_0)w = \rho(b_0)\rho(b)w \\ &\Rightarrow \rho(b)v \in D_2. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit die Zerlegung $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$.

Wir zeigen die Kozykluseigenschaft von η_i:

$$\begin{aligned}\eta_i(ab) = \pi_i(\eta(ab) &= \pi_i(\rho(a)\eta(b) + \eta(a)\delta(b)) \\ &= \pi_i(\rho_1(a)\eta_1(b) + \rho_2(a)\eta_2(b)) + \eta_i(a)\delta(b) \\ &= \rho_i(a)\eta_i(b) + \eta_i(a)\delta(b).\end{aligned}$$

Nun zu $\rho_1 = \delta$:

$$\langle \rho_1(b_k)v, \rho_1(b_k)v\rangle = \left\langle v, \rho_1(b_k^2)v\right\rangle \leq \langle v, \rho(b_0)v\rangle = 0$$

für alle $k = 1, \ldots, n$ und $v \in D_1$. Damit ist $\rho_1(b_k) = 0$, also $\rho_1(b) = \delta(b)\,\mathrm{id}_{D_1}$ oder kurz $\rho_1 = \delta$.
Wegen $\operatorname{kern} \rho_2(b_0) = \{0\}$ ist $\rho_2(b_0)$ invertierbar und damit S_2 nach Satz 4.16 Korand. □

Der letzte Satz zeigt, daß wir, wenn wir in den Beispielen $\rho = \delta$ gesetzt haben, um nichttriviale Beispiele von Deformationen zu erhalten, uns damit nicht wirklich eingeschränkt haben. In einer endlich erzeugten kommutativen und kokommutativen $*$-Bialgebra sind dies eben im Sinne des obigen Satzes, die einzigen Beispiele nichttrivialer Deformationen. Genauer:

Satz 4.19. *Sei B eine endlich erzeugte, kommutative und kokommutative $*$-Bialgebra, L Generator einer additiven Deformation auf B, $(\mathcal{A}, \Phi)$ ein QWR. Wir bezeichnen mit (B, L) die Bialgebra mit additiver Deformation und mit $(B, 0)$ die Bialgebra ohne Deformation. Ist $j_{st} : B \to \mathcal{A}$ ein Lévy-Prozeß auf (B, L), sodaß der gemäß Satz 4.11 zugehörige Prähilbertaum D endlichdimensional ist, so gibt es QWR'e $(\mathcal{A}_1, \Phi_1), (\mathcal{A}_2, \Phi_2)$ und Lévy-Prozesse $j_{st}^{(1)} : B \to \mathcal{A}_1$ auf (B, L) und $j_{st}^{(2)} : B \to \mathcal{A}_2$ auf dem nichtdeformierten $(B, 0)$, sodaß gilt:*

- $\mathrm{d}j_{st}^{(1)} = j_{st}^{(1)} \star \mathrm{d}I_t^{(1)}$, *wobei* $I_t^{(1)}(b) = A_t(\eta_1(b^*)) + A_t^*(\eta_1(b)) + \psi(b)t$. *D.h. für die zu $j_{st}^{(1)}$ gehörige $*$-Darstellung gilt $\rho_1 = \delta$.*
- $\widetilde{j_{st}} = (j_{st}^{(1)} \otimes j_{st}^{(2)}) \circ \Delta$ *ist Lévy-Prozeß auf (B, L) mit gleicher Verteilung wie j_{st}.*

Beweis. Nach Satz 4.11 erhalten wir ein hemitesches lineares Funktional ψ, einen (nach Voraussetzung) endlichdimensionalen Prähilbertraum D, eine $*$-Darstellung ρ auf D und einen ρ-δ-Kozyklus η, sodaß die Lösung der QDGL (4.11) die gleiche Verteilung hat wie j_{st}, nämlich

$$\Phi \circ j_{st} = e_\star^{(t-s)\psi}.$$

Wir bezeichnen diese Lösung wieder mit j_{st}. Satz 4.18 liefert uns eine Zerlegung $D = D_1 \oplus D_2, \rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ und $\eta = \eta_1 \oplus \eta_2$, sodaß $\rho_1 = \delta$ und $S_2 = -\partial\psi_2$ für ein hermitesches lineares Funktional ψ_2 (Dabei ist $S_2(a \otimes b) = \langle \eta_2(a^*), \eta_2(b) \rangle$). Wir setzen noch $\psi_1 = \psi - \psi_2$.
Die Differentialgleichunngen

$$\begin{aligned} \mathrm{d}j_{st}^{(k)} &= j_{st}^{(k)} \star \mathrm{d}I_t^{(k)} \\ j_{ss} &= \delta\,\mathrm{id}, \end{aligned}$$

mit

$$I_t^{(k)}(b) = A_t(\eta_k(b^*) + A_t^*(\eta_k(b)) + \Lambda_t((\rho_k - \delta)(b)) + \psi_k t$$

haben für $k = 1, 2$ eindeutig bestimmte Lévy-Prozesse als Lösungen und die Generatoren der zugehörigen Deformationen sind $L_k = S_k + \partial\psi_k$, also $L_2 = 0$ und

$$L = S + \partial\psi = S_1 + S_2 + \partial\psi_1 + \partial\psi_2 = S_1 + \partial\psi_1 = L_1.$$

Wegen Satz 4.15 ist

$$\widetilde{j_{st}} = (j_{st}^{(1)} \otimes j_{st}^{(2)}) \circ \Delta$$

ein Lévy-Prozeß auf (B, L) mit Verteilung

$$(\Phi_1 \otimes \Phi_2) \circ \widetilde{j_{st}} = e_\star^{(t-s)(\psi_1+\psi_2)} = e_\star^{(t-s)\psi} = \Phi \circ j_{st}.$$

□

In ähnlicher Weise, wie in den Beispielen, können wir nun auch in der allgemeineren Situation zeigen:

Satz 4.20. *Sei B eine $*$-Bialgebra, D ein Prähilbertraum, $\rho = \delta$, η ein δ-δ-Kozyklus. Dann ist $S + \partial\psi$ antisymmetrisch, wobei $\psi = \frac{1}{2} S \circ \Delta$. Insbesondere ist S Korand, falls S symmetrisch ist, d.h. $S = \frac{S + S\circ\tau}{2}$. Ist B kommutativ, so gilt auch die Umkehrung, d.h. S ist Korand genau dann, wenn S symmetrisch ist.*

Beweis. S ist eine Bilinearform und hat eine eindeutige Zerlegung in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil. Diese ist gegeben durch

$$S = \frac{S + S \circ \tau}{2} + \frac{S - S \circ \tau}{2}.$$

Wir zeigen, daß $\partial\psi = -\frac{S+S\circ\tau}{2}$. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}\partial\psi(a\otimes b) &= \frac{1}{2}\partial(S\circ\Delta)(a\otimes b)\\ &= \frac{1}{2}\big(\delta(a)S(b_{(1)}\otimes b_{(2)}) - S(a_{(1)}b_{(1)}\otimes a_{(2)}b_{(2)}) + S(a_{(1)}\otimes a_{(2)})\delta(b)\big).\end{aligned}$$

Wir rechnen den mittleren Summanden weiter aus:

$$\begin{aligned}&S(a_{(1)}b_{(1)}\otimes a_{(2)}b_{(2)})\\ &= \left\langle \eta(b^*_{(1)}a^*_{(1)}), \eta(a_{(2)}b_{(2)})\right\rangle\\ &= \left\langle \delta(b^*_{(1)})\eta(a^*_{(1)}) + \eta(b^*_{(1)})\delta(a^*_{(1)}), \delta(a_{(2)})\eta(b_{(2)}) + \eta(a_{(2)})\delta(b_{(2)})\right\rangle\\ &= \delta(b_{(1)})\delta(a_{(2)})\left\langle \eta(a^*_{(1)}), \eta(b_{(2)})\right\rangle + \delta(b_{(1)})\delta(b_{(2)})\left\langle \eta(a^*_{(1)}), \eta(a_{(2)})\right\rangle\\ &\quad + \delta(a_{(1)})\delta(a_{(2)})\left\langle \eta(b^*_{(1)}), \eta(b_{(2)})\right\rangle + \delta(a_{(1)})\delta(b_{(2)})\left\langle \eta(b^*_{(1)}), \eta(a_{(2)})\right\rangle\\ &= S(a\otimes b) + \delta(b)S(a_{(1)}\otimes a_{(2)}) + S(b_{(1)}\otimes b_{(2)})\delta(a) + S(b\otimes a).\end{aligned}$$

Setzen wir dies in unserer Rechnung ein, so erhalten wir schließlich

$$\partial\psi(a\otimes b) = \frac{1}{2}(-S(a\otimes b) - S(b\otimes a)) = -\frac{S+S\circ\tau}{2}(a\otimes b)$$

für alle $a, b\in B$. Ist S also symmetrisch, so gilt $S = \frac{S+S\circ\tau}{2} = -\partial\psi$ und S ist somit Korand.
Ist nun B kommutativ, so sind alle Koränder symmetrisch, da in diesem Falle

$$\partial\psi(a\otimes b) = \delta(a)\psi(b) - \psi(ab) + \psi(a)\delta(b) = \partial\psi(b\otimes a)$$

für alle $a, b\in B$. □

4.8 Lévy-Prozesse auf $\mathcal{U}_d$ und $\mathcal{U}_d^f$

Zum Abschluß untersuchen wir noch ein Beispiel einer weder kommutativen noch kokommutativen Bialgebra. In einer nicht kokommutativen Bialgebra ist die Bedingung, unter der Faltung zu kommutieren, nicht mehr automatisch für einen 2-Kozyklus erfüllt. Um die Situation zu beherrschen hilft das folgende

Lemma 4.21 (Schürmann, [18] Proposition 2)**.** *Seien B und C Bialgebren, außerdem $\theta : B\to C$ ein Bialgebrahomomorphismus, für den*

$$(\theta\otimes \mathrm{id})\circ\Delta = (\theta\otimes \mathrm{id})\circ\tau\circ\Delta. \tag{4.16}$$

Ist dann l ein 2-Kozyklus auf C, so ist $L = l \circ (\theta \otimes \theta)$ ein kommutierender 2-Kozyklus auf B.

Beweis. Sei l ein 2-Kozyklus auf C und $L = l \circ (\theta \otimes \theta)$. Dann ist

$$\partial L(a \otimes b \otimes c) = \partial l(\theta(a) \otimes \theta(b) \otimes \theta(c)) = 0,$$

da θ ein Bialgebrahomomorphismus ist.
Die Bedingung (4.16) schreibt sich in Sweedler Notation

$$\theta(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} = \theta(a_{(2)}) \otimes a_{(1)}.$$

Damit rechnen wir

$$\begin{aligned}
(L \star \mu)(a \otimes b) &= ((L \otimes \mu) \circ \Lambda)(a \otimes b) \\
&= (l \otimes \mu)(\theta(a_{(1)}) \otimes \theta(b_{(1)}) \otimes a_{(2)} \otimes b_{(2)}) \\
&= (l \otimes \mu)(\theta(a_{(2)}) \otimes \theta(b_{(2)}) \otimes a_{(1)} \otimes b_{(1)}) \quad \text{wegen (4.16)} \\
&= (\mu \star L)(a \otimes b)
\end{aligned}$$

für alle $a, b \in B$. □

Beispiel 4.7. Wir untersuchen nun die in Bsp. 2.17 und Bsp. 2.18 eingeführten Bialgebren $\mathcal{M}_d, \mathcal{M}_d^f, \mathcal{U}_d$ und $\mathcal{U}_d^f$. Wir wiederholen noch einmal Komultiplikation und Koeins, die in allen Fällen auf den Generatoren gegeben sind durch

$$\Delta(x_{kl}) = \sum_{j=1}^{d} x_{kj} \otimes x_{jl} \quad \text{und} \quad \delta(x_{kl}) = \delta_{kl}.$$

Wir wollen Schwierigkeiten im Falle $d > 1$ auf den Fall $d = 1$ zurückführen. Es steht B_d für eine der genannten Bialgebren und x ist der einzelne Erzeuger von B_1. Dann definieren wir die eine Abbildung $\theta : B_d \to B_1$, indem wir sie auf den Generatoren festsetzen durch

$$\theta(x_{kl}) = \delta_{kl} x \tag{4.17}$$

und als Algebrahomomorphismen fortsetzen. Damit θ im Falle $B_d = \mathcal{U}_d^{(f)}, \mathcal{U}_d$ wohldefiniert ist, müssen wir prüfen, daß die Relationen respektiert werden. Tatsächlich ist

$$\theta\left(\sum_{j=1}^{d} x_{kj} x_{lj}^* - \delta_{kl}\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq l \\ x x^* - 1 & \text{falls } k = l \end{cases}$$

und für die andere Relation erhalten wir Entsprechendes.
θ ist sogar ein Bialgebrahomorphismus: Ein Algebrahomomorphismus nach Definition und ein Koalgebrahomomorphismus, da

$$\Delta(\theta(x_{kl})) = \Delta(\delta_{kl}x) = \delta_{kl}x \otimes x = (\theta \otimes \theta)(\sum_{j=1}^{d} x_{kj} \otimes x_{jl}) = (\theta \otimes \theta)(\Delta(x_{kl}))$$

sowie

$$\delta(\theta(x_{kl})) = \delta(\delta_{kl}x) = \delta_{kl} = \theta(\delta(x_{kl})).$$

Außerdem erfüllt θ die Bedingung (4.16):

$$\begin{aligned} ((\theta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(x_{kl}) = \sum_{n=1}^{d} \theta(x_{kn}) \otimes x_{nl} = x \otimes x_{kl} &= \sum_{n=1}^{d} \theta(x_{nl}) x_{kn} \\ &= (\theta \otimes \mathrm{id}) \circ \tau \circ \Delta(x_{kl}) \end{aligned}$$

Wir charakterisieren nun alle Generatoren auf Deformationen von B_d:

Behauptung. Die kommutierenden, hermiteschen, normierten 2-Kozyklen auf B_d sind genau die Abbildungen der Form

$$L = l \circ (\theta \otimes \theta), \tag{4.18}$$

wobei l ein hermitescher, normierter 2-Kozyklus auf B_1 ist.

Beweis. Schürmann, [18] Theorem 3 besagt eben dies für $B_d = \mathcal{M}_d^f$. Die anderen Bialgebren ergeben sich aber aus dieser durch Faktorisierung bezüglich geeigneter $*$-Biideale. Es ist $B_d \cong \mathcal{M}_d^f / I$, wobei I

- für $B_d = \mathcal{U}_d^f$ das von Elementen der Form

$$\sum_{n=1}^{d} x_{kn} x_{ln}^* - \delta_{kl} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{d} x_{nk}^* x_{nl}^* - \delta_{kl}$$

  erzeugte Ideal bezeichnet.

- für $B_d = \mathcal{M}_d$ das von Elementen der Form

$$x_{ij}^{\epsilon} x_{kl}^{\delta} - x_{kl}^{\delta} x_{ij}^{\epsilon}$$

  erzeugte Ideal bezeichnet. Hierbei sind $\delta, \epsilon \in \{-1, 1\}$ und wir setzen $x^1 = x, x^{-1} = x^*$.

- für $B_d = \mathcal{U}_d$ die Summe der vorherigen beiden Ideale bezeichnet.

Wir müssen zeigen, daß I in jedem Fall ein $*$-Biideal ist. Für den Fall $B_d = \mathcal{U}_d^f$ haben wir dies bereits in Bsp. 2.17 bzw. Bsp. 2.18 gezeigt. Für $B_d = \mathcal{M}_d$ rechnen wir

$$\begin{aligned}
\Delta(x^\epsilon_{ij}x^\delta_{kl} - x^\delta_{kl}x^\epsilon_{ij}) &= (\sum_\nu x^\epsilon_{i\nu}\otimes x^\epsilon_{\nu j})(\sum_\mu x^\delta_{k\mu}\otimes x^\delta_{\mu l}) \\
&\quad - (\sum_\mu x^\delta_{k\mu}\otimes x^\delta_{\mu l})(\sum_\nu x^\epsilon_{i\nu}\otimes x^\epsilon_{\nu j}) \\
&= \sum_{\nu,\mu} x^\epsilon_{i\nu}x^\delta_{k\mu}\otimes x^\epsilon_{\nu j}x^\delta_{\mu l} - x^\delta_{k\mu}x^\epsilon_{i\nu}\otimes x^\delta_{\mu l}x^\epsilon_{\nu j} \\
&= \sum_{\nu,\mu} x^\epsilon_{i\nu}x^\delta_{k\mu}\otimes x^\epsilon_{\nu j}x^\delta_{\mu l} - x^\epsilon_{i\nu}x^\delta_{k\mu}\otimes x^\delta_{\mu l}x^\epsilon_{\nu j} \qquad \in \mathcal{M}^f_d\otimes I \\
&\quad + x^\epsilon_{i\nu}x^\delta_{k\mu}\otimes x^\delta_{\mu l}x^\epsilon_{\nu j} - x^\delta_{k\mu}x^\epsilon_{i\nu}\otimes x^\delta_{\mu l}x^\epsilon_{\nu j} \qquad \in I\otimes\mathcal{M}^f_d.
\end{aligned}$$

Außerdem ist offenbar $I \subseteq \ker\delta$, also I ein $*$-Biideal.
Natürlich ist die Summe von $*$-Biidealen wieder ein $*$-Biideal und damit ist der Fall $B_d = \mathcal{U}_d$.
Der restliche Beweis entspricht dem Beweis von [18] Theorem 4, wo die Behauptung für $B_d = \mathcal{U}_d^f$ gezeigt wird. Wir haben schon gesehen, daß θ in jedem Fall die entsprechenden Relationen respektiert, wir also stets θ auf B_d gemäß (4.17) definieren können. Nach Lemma 4.21 sind Abbildungen der Form (4.18) hermitesche, kommutierende, normierte 2-Kozyklen.
Ist umgekehrt L ein hermitescher, normierter, kommutierender 2-Kozyklus auf B_d, so erhalten wir, wenn wir mit $\eta : \mathcal{M}_d^f \to B_d = \mathcal{M}_d^f/I$ die kanonische Abbildung bezeichnen, einen hermiteschen, normierten, kommutierenden 2-Kozyklus $\widetilde{L}$ auf $\mathcal{M}_d^f$. Dieser ist nach [18] Theorem 3 von der Form $\widetilde{L} = \widetilde{l}\circ(\theta\otimes\theta)$, wobei $\widetilde{l}$ ein hermitescher, normierter, kommutierender 2-Kozyklus auf $\mathcal{M}_1^f$ ist. Da $\widetilde{L}(I) = 0$, gilt auch $\widetilde{l}(\theta(I)) = 0$ und wir können l repräsentantenweise auf B_1 definieren, d.h. $l(\eta(a)) := \widetilde{l}(a)$. □

Man beachte noch, daß $\mathcal{U}_1^f \cong \mathcal{U}_1 \cong \mathbb{CZ}$. Da die erste Kohomologie von $\mathbb{CZ}$ trivial ist (Satz 3.3), ist l sogar Korand, also $l = \partial\lambda$ für ein hermitesches, normiertes lineares Funktional λ auf $\mathbb{CZ}$. Da θ ein Bialgebrahomomorphismus ist, erhalten wir auch $L = \partial(\psi)$ mit $\psi = \lambda\circ\theta$. Tatsächlich ist $L \in \widetilde{B}_2$. Zu zeigen ist nur noch, daß ψ kommutiert:

$$\begin{aligned}
(\psi\otimes\mathrm{id})\circ\Delta &= (\lambda\otimes\mathrm{id})\circ(\theta\otimes\mathrm{id})\circ\Delta \\
&= (\lambda\otimes\mathrm{id})\circ(\theta\otimes\mathrm{id})\circ\tau\circ\Delta \quad \text{wegen (4.16)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\lambda \otimes \mathrm{id}) \circ \tau \circ (\mathrm{id} \otimes \theta) \circ \Delta \\
&= (\mathrm{id} \otimes \lambda) \circ (\mathrm{id} \otimes \theta) \circ \Delta \\
&= (\mathrm{id} \otimes \psi) \circ \Delta
\end{aligned}
$$

Also sind alle Deformationen auf $\mathcal{U}_d$ bzw. $\mathcal{U}_d^f$ im Sinne von Satz 3.8 trivial und die Lévy-Prozesse entsprechen gemäß Satz 4.14 gewöhnlichen Lévy-Prozessen auf den entsprechenden Bialgebren.

Literaturverzeichnis

[1] Abe, E.: *Hopf Algebras.* Cambridge University Press, 1980.

[2] Applebaum, D.: *Lévy Processes in Euclidean Spaces and Groups.* In: *Quantum Independent Increment Processes I*, Seiten 1–98. Berlin Heidelberg : Springer, 2005.

[3] Bourbaki, N.: *Algebra I.* Berlin Heidelberg New Yourk : Springer, 1989.

[4] Bratteli, O. und D.W. Robinson: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, Band 2. New York Heidelberg Berlin : Springer, 1981.

[5] Franz, U.: *Lévy Processes on Quantum Groups and Dual Groups.* In: *Quantum Independent Increment Processes II*, Seiten 161–257. Berlin Heidelberg : Springer, 2006.

[6] Franz, U. und R. Schott: *Stochastic Processes and Operator Calculus on Quantum Groups.* Kluwer Academic Publishers, 1999.

[7] Gerstenhaber, M.: *The cohomology structure of an associative ring.* The Annals of Mathematics, 78(2):267–288, 1963.

[8] Gerstenhaber, M.: *On the Deformation of Rings and Algebras.* The Annals of Mathematics, 79(1):59–103, 1964.

[9] Glockner, P. und W. Waldenfels: *The Relations of the Non-Commutative Coefficient Algebra of the Unitary Group.* In: *Quantum Probability and Applications IV*, Seiten 182–220. Berlin Heidelberg : Springer, 1989.

[10] Hochschild, G.: *On the Cohomology Groups of an Associative Algebra.* The Annals of Mathematics, Second Series, 46(1):58–67, 1945.

[11] Kowalski, H.-J.: *Lineare Algebra.* deGruyter, 1963.

[12] Maassen, H.: *Quantum Markov Processes on Fock Space Described by Integral Kernels.* In: *Quantum Probability and Applications II*, Seiten 361–374. Berlin Heidelberg New York Tokyo : Springer, 1984.

[13] Majid, S.: *Foundations of Quantum Group Theory.* Cambridge : Cambridge University Press, 1995.

[14] Meyer, P.A.: *Quantum Probability for Probabilists*. Berlin Heidelberg : Springer, 1995.

[15] Parthasarathy, K.R.: *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*. Basel Boston Berlin : Birkhäuser, 1992.

[16] Reed, M. und B. Simon: *Functional Analysis*, Band 1 der Reihe *Methods of Modern Mathematical Physics*. Academic Press, 1980.

[17] Schürmann, M.: *White Noise on Bialgebras*. Berlin Heidelberg : Springer, 1993.

[18] Schürmann, M.: *Lévy Processes on Deformations of Hopf Algebras*. In: *Infinite Dimensional Harmonic Analysis III*, Seiten 277–287. World Scientific Publishing Co., 2003.

[19] Shnider, S. und S. Sternberg: *Quantum Groups: From Coalgebras to Drinfel'd Algebras. A Guided Tour.* Cambridge, MA: International Press., 1993.

[20] Wirth, J.: *Formule de Levy Khintchine et Deformations d'Algebres*. Doktorarbeit, Universite Paris VI, 2002.

Index

Erklärung

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, daß alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und daß die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Greifswald, den 17. November 2009

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Herrn Prof. Michael Schürmann, der sich viel Zeit für mich und meine Arbeit genommen und mich stets freundlich unterstützt hat.

Ich danke meinem Zweitgutachter Herrn Prof. Volkmar Liebscher für das Begutachten meiner Arbeit und dafür, daß er bereit war ein Seminar mit nur zwei Teilnehmern über stochastischen Kalkül zu betreuen, bei dem ich viel wertvolles gelernt habe.

Ich danke meinen Eltern und meinem Großvater dafür, daß sie mir dieses Studium ermöglicht haben. Ich danke meinen Kommilitonen Alexander Leymann und Katrin Wagels und nocheinmal meiner lieben Mutter für das aufmerksame Korrekturlesen und die vielen hilfreichen Kommentare und Verbesserungsvorschläge.