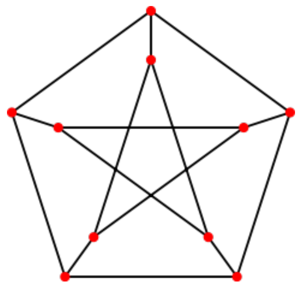
Universität Greifswald
Institute für Mathematatik and Informatik
Lehrender: Marc Hellmuth
Korrektor: Carsten Seemann

5. Übung "Graphentheorie", WS 17/18

Aufgabe 1: (5 Punkte)
Konstruieren Sie einen ein 4-zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit $|V| > 5$ so dass für alle $e \in E$ gilt G/e ist nicht 4-zusammenhängend. Erläutern Sie warum $G = (V, E)$ nicht 4-zusammenhängend ist.

Aufgabe 2: (2+3=5 Punkte)



Gezeigt ist der Petersen-Graph G.

(a) Geben Sie eine Ohrenzerlegung für G an.

(b) Geben Sie eine Folge von Graphen $G_0 = K_4, G_1, \dots, G_n = G$ an, welche die Eigenschaften des Satzes von Tutte (Satz 3.2.2.) erfüllen.

Aufgabe 3: (2.5+2.5=5 Punkte)

(a) Verallgemeinern Sie die Eulerformel für die Anzahl der Gebiete zusammenhängender planarer Graphen für nicht-zusammenhängende planare Graphen. Beweisen Sie Ihre Formel.

(b) Zeigen Sie dass für 2-zusammenhängende, bipartite, planare Graphen $G = (V, E)$ gilt: $|E| \leq 2|V| - 4$.

Aufgabe 4: (3+12 = 15 Punkte)
Wir konstruieren einen planaren Graphen $G_k, k \geq 3$ in drei Schritten wie folgt:

Schritt 1: Sei V_k eine Menge von k Knoten und $\psi : V_k \to \mathbb{R}^2$ eine injektive Abbildung welche die k Knoten so im $\mathbb{R}^2$ platziert, dass alle Knoten den gleichen euklidischen Abstand zum Ursprung haben. In anderen Worten, die Knoten aus V_k liegen auf einem Kreis (gestrichelter Kreis in Abb. 1 und 2). Die Knoten aus V_k seien von 1 bis k nummeriert wie sie in zyklischer Ordnung auf dem Kreis liegen (beginnend mit beliebigem Knoten).

Sei $C_k = (V_k, E_k)$ der Graph mit Kanten $(i, i+1)$, $1 \leq i < k$ und der Kante $(k, 1)$. Desweiteren sei $\phi = (\psi, (J_e)_{e \in E_k})$ die planare Einbettung von C_k, so dass J_e ein *Strecke* im $\mathbb{R}^2$ für alle Kanten $e \in E_k$ ist.

Schritt 2: Wir fügen jetzt alle Kanten zwischen je zwei Knoten in V_k hinzu die nicht schon in C_k erhalten sind. Sei E' die Menge dieser Kanten. Den so entstandenen Graphen nennen wir $H_k = (V_k, E_k \cup E')$. Wir wählen jetzt für jede Kante $e \in E'$ eine Polygonzug J_e so dass alle J_e in dem inneren Gebiet liegen welches von C_k umschlossenen wird und für beliebige drei verschiedene Kanten $e = (x, y), f = (a, b), g = (u, v) \in E'$ gilt

$$(J_e \setminus \{\psi(x), \psi(y)\}) \cap (J_f \setminus \{\psi(a), \psi(a)\}) \cap (J_g \setminus \{\psi(u), \psi(v)\}) \cap \{\psi(w) \mid w \in V_k\} = \emptyset.$$

Letztere Bedingung insbesondere sagt, dass sich drei verschiedene Kanten (bzgl. der Einbettung) nie in einem gemeinsamen inneren Knoten schneiden.

Schritt 3: Per Konstruktion von H_k und dessen Einbettung $(\psi, (J_e)_{e \in E_k \cup E'})$ schneiden sich zwei Kanten in höchstens einem inneren Knoten. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^2$ die Menge dieser Schnittpunkte. Wir setzen jetzt auf jeden dieser Schnittpunkte $s \in S$ einen neuen Knoten v_s. Sei V_S die Menge dieser Knoten und E_S die Menge der so neu entstandenen Kanten. Dies ergibt den planaren Graphen $G_k = (V_k \cup V_S, E_k \cup E_S)$, siehe Abbildung 1 und 2.

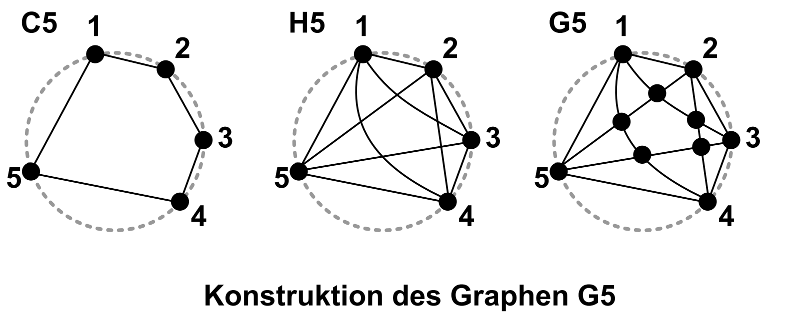


Abbildung 1: Die einzelnen Schritte der Konstruktion am Beispiel $k = 5$. Gezeigt sind die Graphen C_5 (Schritt 1), H_5 (Schritt 2) und G_5 (Schritt 3).

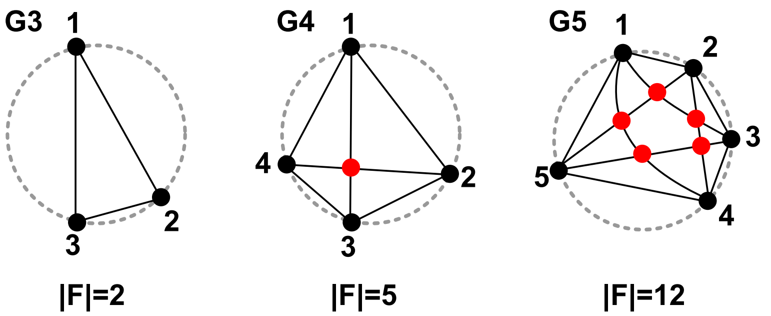


Abbildung 2: Gezeigt sind die ersten drei planaren Graphen G_3, G_4 und G_5 und die Anzahl ihrer Gebiete $|F|$. Die rot-markierten Knoten sind die Knoten aus V_S. Entfernen der rot-markierten Knoten in G_4 und G_5 resultiert in den entsprechend Graphen H_4 und H_5. Klar H_3 hat keine Extrakanten und entspricht dem Kreis C_3.

(a) Zeichnen Sie den Graphen G_6.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Gebiete $|F|$ der Graphen G_k, $k \geq 2$.

Aufgabe 5: Non-Graphtheory Xmas-Bonus-Special (5 Punkte)
110101 hoffnungsvolle Kinder einer Stadt warten auf ihre Weihnachtsgeschenke. Allerdings ist der Weihnachtsmann hinreichend genervt von den immer-gleichen Gedichten welche die Kinder aufsagen, um danach ihr Geschenk zu bekommen. Deswegen überlegt sich der Weihnachtsmann folgendes Rätsel für die Kinder:
Alle 110101 Kinder werden in einer Reihe von Nord nach Süd so hintereinander aufgestellt dass Sie alle in Richtung Norden schauen, d.h. jedes Kind sieht nur die Kinder, die vor ihm stehen. Alle Kinder bekommen jetzt zufällig eine schwarze oder eine rote Pudelmütze aufgesetzt. Sie sehen dabei nicht welche Mützen ihnen aufgesetzt wurde. Sie sollen aber sagen welche Farbe ihre Mütze hat. Dabei dürfen sie nur die Farbe "rot" oder "schwarz" sagen. Es ist ihnen nicht erlaubt, die Mützen abzusetzen und nach der Farbe zu schauen. Sie dürfen nicht untereinander reden oder sich bewegen nachdem sie in der Reihe stehen. Wenn mehr als ein Kind nicht seine Mützenfarbe richtig benennt, bekommen alle Kinder keine Geschenke.
O weh! Die Kinder sind verzweifelt! Was sollen Sie tun? DU kannst ihnen helfen. Denn bevor die Kinder aufgereiht werden, dürfen sie nocheinmal mit dir reden. Kannst du den Kindern eine Strategie verraten? Nebenbei, die Kinder sind sehr schlau und können deiner Strategie sicher folgen!

Frohe Weihnachten und einen Guten Rutsch!

Abgabe: Donnerstag - 04. Januar 2018 - 12.15Uhr