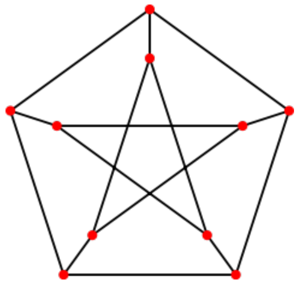
Universität Greifswald
Institute für Mathematik and Informatik
Lehrender: Marc Hellmuth

5. Übung "Graphentheorie", WS 19/20

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Gezeigt ist der Petersen-Graph G.



Zeigen Sie, dass G nicht planar ist in dem Sie zeigen, dass G sowohl den K_5 als auch den $K_{3,3}$ als Minor enthält. Enthält G den K_5 oder den $K_{3,3}$ auch als topologischen Minor?

Aufgabe 2: (2.5+2.5=5 Punkte)

(a) Verallgemeinern Sie die Eulerformel für die Anzahl der Gebiete zusammenhängender planarer Graphen für nicht-zusammenhängende planare Graphen. Beweisen Sie Ihre Formel.

(b) Zeigen Sie dass für 2-zusammenhängende, bipartite, planare Graphen $G = (V, E)$ gilt: $|E| \leq 2|V| - 4$.

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Anzahl der Gebiete $|F|$ des planaren Graphen G_k, $k \geq 3$, der in drei Schritten wie folgt konstruiert wird:

Schritt 1: Sei V_k eine Menge von k Knoten und $\psi : V_k \to \mathbb{R}^2$ eine injektive Abbildung welche die k Knoten so im $\mathbb{R}^2$ platziert, dass alle Knoten den gleichen euklidischen Abstand zum Ursprung haben. In anderen Worten, die Knoten aus V_k liegen auf einem Kreis (gestrichelter Kreis in Abb. 1 und 2). Die Knoten aus V_k seien von 1 bis k nummeriert wie sie in zyklischer Ordnung auf dem Kreis liegen (beginnend mit beliebigem Knoten). Sei $C_k = (V_k, E_k)$ der Graph mit Kanten $(i, i+1)$, $1 \leq i < k$ und der Kante $(k, 1)$. Desweiteren sei $\phi = (\psi, (J_e)_{e \in E_k})$ die planare Einbettung von C_k. so dass J_e ein *Strecke* im $\mathbb{R}^2$ für alle Kanten $e \in E_k$ ist.

Schritt 2: Wir fügen jetzt alle Kanten zwischen je zwei Knoten in V_k hinzu die nicht schon in C_k erhalten sind. Sei E' die Menge dieser Kanten. Den so entstandenen Graphen nennen wir $H_k = (V_k, E_k \cup E')$. Wir wählen jetzt für jede Kante $e \in E'$ einen Polygonzug J_e so dass alle J_e in dem inneren Gebiet liegen welches von C_k umschlossenen wird. Folgende Eigenschaften sollen erfüllt sein:

- *"Drei verschiedene Kanten schneiden sich nie in einem gemeinsamen inneren Punkt."*

  Formal: Es gelte für beliebige drei verschiedene Kanten $e = (x, y), f = (a, b), g = (u, v) \in E'$ gilt

  $$(J_e \setminus \{\psi(x), \psi(y)\}) \cap (J_f \setminus \{\psi(a), \psi(a)\}) \cap (J_g \setminus \{\psi(u), \psi(v)\}) \cap \{\psi(w) \mid w \in V_k\} = \emptyset.$$

- *"Zwei verschiedene Kanten schneiden sich höchstens in einem gemeinsamen inneren Punkt."*

  Formal: Es gelte für beliebige zwei verschiedene Kanten $e = (x, y), f = (a, b) \in E'$

  $$|(J_e \setminus \{\psi(x), \psi(y)\}) \cap (J_f \setminus \{\psi(a), \psi(a)\})| \leq 1.$$

- *"Zwei verschiedene Kanten mit gemeinsame Knoten x schneiden sich nur in $\psi(x)$."*

  Formal: Es gelte für beliebige zwei verschiedene Kanten $e = (x, y), f = (x, b) \in E'$ die einen gemeinsamen Knoten x haben, dass

  $$(J_e \setminus \{\psi(y)\}) \cap (J_f \setminus \{\psi(b)\}) = \{\psi(x)\}.$$

Schritt 3: Per Konstruktion von H_k und dessen Einbettung $(\psi, (J_e)_{e \in E_k \cup E'})$ schneiden sich zwei Kanten in höchstens einem inneren Knoten. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^2$ die Menge dieser Schnittpunkte. Wir setzen jetzt auf jeden dieser Schnittpunkte $s \in S$ einen neuen Knoten v_s. Sei V_S die Menge dieser Knoten und E_S die Menge der so neu entstandenen Kanten. Dies ergibt den planaren Graphen $G_k = (V_k \cup V_S, E_k \cup E_S)$, siehe Abbildung 1 und 2.

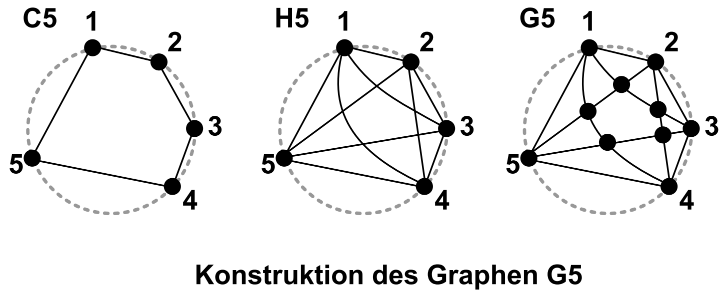


Abbildung 1: Die einzelnen Schritte der Konstruktion am Beispiel $k = 5$. Gezeigt sind die Graphen C_5 (Schritt 1), H_5 (Schritt 2) und G_5 (Schritt 3).

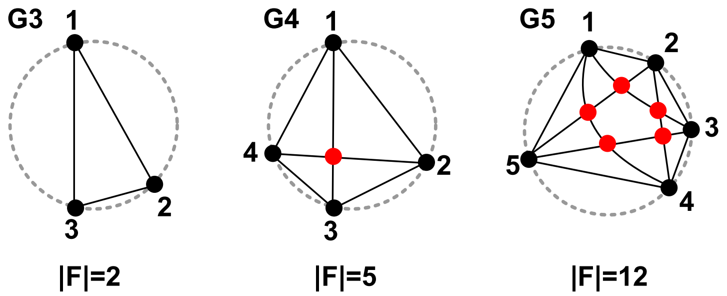


Abbildung 2: Gezeigt sind die ersten drei planaren Graphen G_3, G_4 und G_5 und die Anzahl ihrer Gebiete $|F|$. Die rot-markierten Knoten sind die Knoten aus V_S. Entfernen der rot-markierten Knoten in G_4 und G_5 resultiert in den entsprechend Graphen H_4 und H_5. Klar H_3 hat keine Extrakanten und entspricht dem Kreis C_3.

Abgabe: Donnerstag - 19. Dezember 2019 - 14.15 Uhr