

## 6. ÜBUNG "GRAPHENTHEORIE", WS 19/20

### Aufgabe 1: (4 Punkte)

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit  $m = |E|$  Kanten. Zeige dass

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

### Aufgabe 2: (4+4=8 Punkte)

Beweise oder widerlege. Für beliebige (nicht-leere) Graphen  $G_1$  und  $G_2$  mit  $V(G_1) \cap V(G_2) \neq \emptyset$  und  $G = G_1 \cup G_2$  gilt:

- (a)  $\chi(G) \leq \chi(G_1) + \chi(G_2)$ .
- (b)  $\chi(G) \leq \chi(G_1) \cdot \chi(G_2)$ .

### Aufgabe 3: (4 Punkte)

Bestimmen sie einen Graphen  $G$  so dass es einen Knoten  $v \in V(G)$  gibt für den gilt:  $\chi(G - v) < \chi(G)$  und  $\chi(\overline{G} - v) < \chi(\overline{G})$ , wobei  $\overline{G}$  das Komplement von  $G$  bezeichne.

### Aufgabe 4: (4 Punkte)

Es liegen 1900 Ein-Euro Münzen auf einem großen Tisch. Einige von ihnen berühren sich am Rand, aber keine der Münzen liegen übereinander d.h. sie überlappen sich nicht. Zeigen Sie, dass sie immer 475 Münzen wählen können, so dass sich keine der gewählten Münzen berühren.

$\chi(G)$  bezeichne die (Knoten-)chromatische Zahl des Graphen  $G$ .

## Xmas-Bonus-Special

Die folgenden Aufgabe ist optional und kann benutzt werden um zusätzliche Punkte zu sammeln. Hinweis: die Aufgaben benötigen nur gesunden Menschenverstand und keine Methoden der Graphentheorie.

*Frohe Weihnachten und guten Rutsch!*

**Aufgabe :** (20+10=30 Punkte)

Die Kinder einer Stadt warten auf ihre Weihnachtsgeschenke. Allerdings ist der Weihnachtsmann hinreichend genervt von den immer-gleichen Gedichten welche die Kinder aufsagen, um danach ihr Geschenk zu bekommen. Deswegen überlegt sich der Weihnachtsmann folgende zwei Rätsel für die Kinder:

**Rätsel 1:** Alle  $n$  Kinder werden in einer Reihe von Nord nach Süd so hintereinander aufgestellt dass Sie alle in Richtung Norden schauen, d.h. jedes Kind sieht ausschliesslich die Kinder, die vor ihm stehen. Nachdem sie aufgereiht sind, dürfen sich die Kinder nicht mehr bewegen und in keiner Form mehr untereinander kommunizieren. Alle Kinder bekommen jetzt zufällig eine Pudelmütze aufgesetzt. Jede Pudelmütze hat eine der Farben  $0, \dots, k, k \leq n - 1$ . Die Kinder sehen nicht welche Farbe ihre Mütze hat, die ihnen aufgesetzt wurde. Es ist ihnen nicht erlaubt, die Mützen abzusetzen und nach der Farbe zu schauen.

Nachdem alle Kinder ihre Pudelmützen aufgesetzt bekommen haben, sollen sie sagen welche Farbe ihre Mütze hat. Dabei dürfen sie nur sagen "*Farbe i*". Wenn mehr als ein Kind seine Mützenfarbe nicht richtig benennt, bekommen alle Kinder keine Geschenke.

### **Rette Weihnachten!**

O weh! Die Kinder sind verzweifelt! Was sollen Sie tun? DU kannst ihnen helfen. Denn bevor die Kinder aufgereiht werden, dürfen sie noch einmal mit dir reden. Kannst du den Kindern eine Strategie verraten? Nebenbei, die Kinder sind sehr schlau und können deiner Strategie sicher folgen!

**Rätsel 2:** Der Weihnachtsmann hat zehn Wichtel. Er hat insgesamt ein Kilogramm Schokolade und gibt jedem Wichtel 100 Gramm. Jeder Wichtel soll hieraus je zehn Schokoladen-Kugeln a 10 Gramm fertigen. Einer der Wichtel liebt aber Schokolade so sehr, dass er bei jeder Schokoladen-Kugel genau ein Gramm Schokolade unterschlägt und selbst isst.

Nun stehen die Wichtel mit ihren Schokokugeln vor den Kindern. Die Kinder bekommen eine digitale Präzisionswaage. Wenn sie es schaffen mit einmaligen Wiegen herauszufinden, welcher Wichtel die Schokolade gegessen hat, dann bekommen sie ihre Geschenke.

### **Rette Weihnachten!**

O weh! Die Kinder sind verzweifelt! Was sollen Sie tun? DU kannst ihnen helfen. Kannst du den Kindern eine Strategie verraten? Nebenbei, die Kinder sind sehr schlau und können deiner Strategie sicher folgen!

**Abgabe: Donnerstag - 9. Januar 2020 - 14.15 Uhr**