Verzögerte Differentialgleichungen: Theorie, Numerik und Anwendungen

Roland Pulch

Skript zur Vorlesung im Sommersemester 2024

Universität Greifswald

Institut für Mathematik und Informatik

26. April 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Typen und Beispiele **3**

2 Existenz, Eindeutigkeit und Eigenschaften **9**

2.1 Einfache Differentialgleichung 9

2.2 Existenz und Eindeutigkeit 11

2.3 Positivität 13

2.4 Halbfluss 15

2.5 Lineare Differentialgleichungen 17

3 Stabilität **22**

3.1 Stationäre Lösungen 22

3.2 Lineare Differentialgleichungen 24

1 Typen und Beispiele

Ein autonomes System aus gewöhnlichen Dgln. besitzt die Form

$$y'(t) = f(y(t)) \tag{1.1}$$

mit der Lösung $y : I \to \mathbb{R}^n$ (Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$) und einer rechten Seite $f : D \to \mathbb{R}^n$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$). Ein Anfangswertproblem (AWP) entsteht durch die Vorgabe

$$y(t_0) = y_0 \tag{1.2}$$

mit $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Ist f lokal Lipschitz-stetig, dann ist die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des AWPs (1.1),(1.2) garantiert.

Bei einer *verzögerten Dgl.* (auch: *retardierte Dgl.*, engl.: *delay differential equation*) hängt die rechte Seite auch von der Lösung an einem oder mehreren früheren Zeitpunkten ab.

Definition 1.1 *Eine verzögerte Dgl. oder ein System aus verzögerten Dgln. mit einer Verzögerung ist eine Dgl. der Form*

$$y'(t) = f(y(t), y(t-\tau)). \tag{1.3}$$

Dabei ist die Verzögerung $\tau > 0$ eine Konstante oder eine Funktion.

Es sind folgende Fälle möglich:

i) τ ist eine Konstante,

ii) $\tau(t)$ ist eine Funktion der Zeit,

iii) $\tau(y(t))$ hängt von der Lösung ab,

iv) $\tau(t, y(t))$ hängt explizit von der Zeit und der Lösung ab.

O.E.d.A. seien im folgenden AWPe stets bei $t_0 = 0$ vorgegeben. AWPe einer verzögerten Dgl. (1.3) mit konstantem τ erfordern eine Vorgabe

$$y(t) = y_0(t) \qquad \text{für } t \in [-\tau, 0] \tag{1.4}$$

mit einer stetigen Funktion y_0. Wird ein AWP einer verzögerten Dgl. (1.3) nur durch $y(0) = y_0$ mit $y_0 \in \mathbb{R}^n$ beschrieben, dann ist gemeint, dass der Wert y_0 konstant nach $t < 0$ fortgesetzt wird.

Beispiel 1.1 Sei $N : I \to \mathbb{R}$ eine Populationsdichte. Die Dynamik der Population werde beschrieben durch

$$N'(t) = \underbrace{b\,N(t-\tau)}_{\text{Geburtenanteil}} - \underbrace{d\,N(t)}_{\text{Sterbeanteil}}$$

mit der Geburtenrate $b > 0$ und der Sterberate $d > 0$. Die Verzögerung $\tau > 0$ stellt z.B. eine Schwangerschaftszeit dar. Es liegt eine lineare verzögerte Dgl. vor.

Beispiel 1.2 Sei $N : I \to \mathbb{R}$ eine Populationsdichte. Die Dynamik der Population mit logistischem Wachstum wird modelliert über, siehe [3],

$$N'(t) = r\,N(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right)$$

mit einer Wachstumsrate $r > 0$, einer Kapazität $K > 0$ und einer Verzögerung $\tau > 0$. Hier liegt eine nichtlineare verzögerte Dgl. vor.

Betrachtet wird die Parameterwahl $r = K = 1$ und der Anfangswert $N(0) = 0.01$. Abbildung 1 zeigt die Lösungen im Zeitbereich für drei verschiedene Verzögerungen τ. In Abhängigkeit von τ ergibt sich ein qualitativ unterschiedliches Lösungsverhalten. Es gibt einen Wert τ_0, so dass für $\tau \leq \tau_0$ Lösungen von AWPen gegen die Kapazität K konvergieren, während für $\tau > \tau_0$ periodische Lösungen um K entstehen. In diesem Zusammenhang nennt man τ_0 einen *Bifurkationspunkt*.

Pseudo-Phasenraum: Zu Lösungen eines autonomen Systems aus Dgln. (1.1) können die Trajektorien $\{y(t) : t \geq 0\}$ im Phasenraum $\mathbb{R}^n$ dargestellt werden. Diese Darstellung ist im eindimensionalen Fall nicht sinnvoll. Bei eindimensionalen verzögerten Dgln. kann bereits komplexes Lösungsverhalten entstehen. Daher verwendet man eine Darstellung im sogenannten *Pseudo-Phasenraum* mit Trajektorien $\{(y(t), y(t-\tau)) : t \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Statt $t - \tau$ könnte auch $t - c$ mit anderem $c > 0$ gesetzt werden und die Darstellung bleibt qualitativ gleich. Im Pseudo-Phasenraum kann die Konvergenz gegen stationäre Punkte beobachtet werden. Periodische Lösungen führen wieder auf geschlossene Kurven. Zu Beispiel 1.2 zeigt Abbildung 2 die Lösungen aus Abbildung 1 mit den verschiedenen Verzögerungen im Pseudo-Phasenraum.

Epidemiologische Modelle bestehen häufig aus gewöhnlichen Dgln. oder verzögerten Dgln., siehe [2]. Einfache Modelle beinhalten drei Populationen: Suszeptible (S), Infektiöse (I) und Resistente (R). Ein einfaches *SIR-Modell* besteht aus dem System gew. Dgln.

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t)I(t) \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ R'(t) &= \gamma I(t) \end{aligned} \tag{1.5}$$

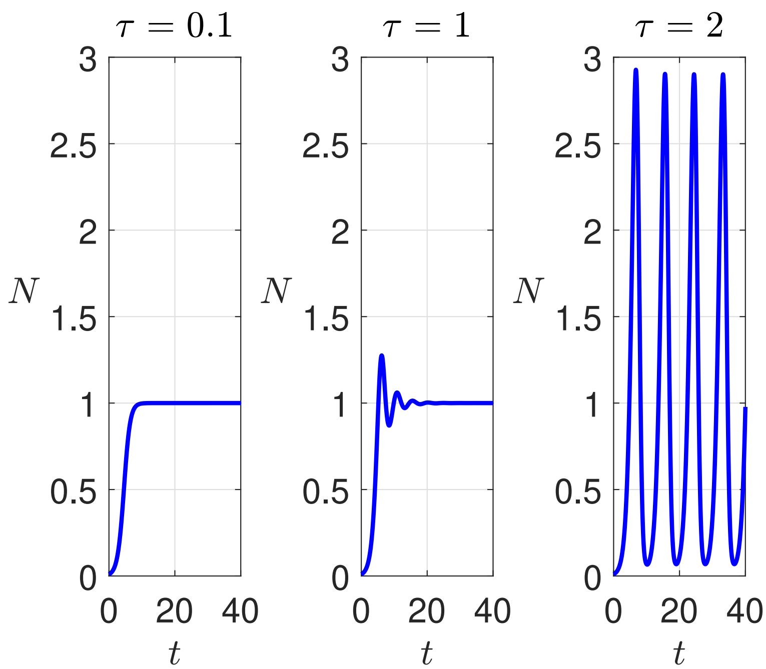

Abbildung 1: Lösungen der Populationsdynamik mit logistischem Wachstum im Zeitbereich für verschiedene Verzögerungen.

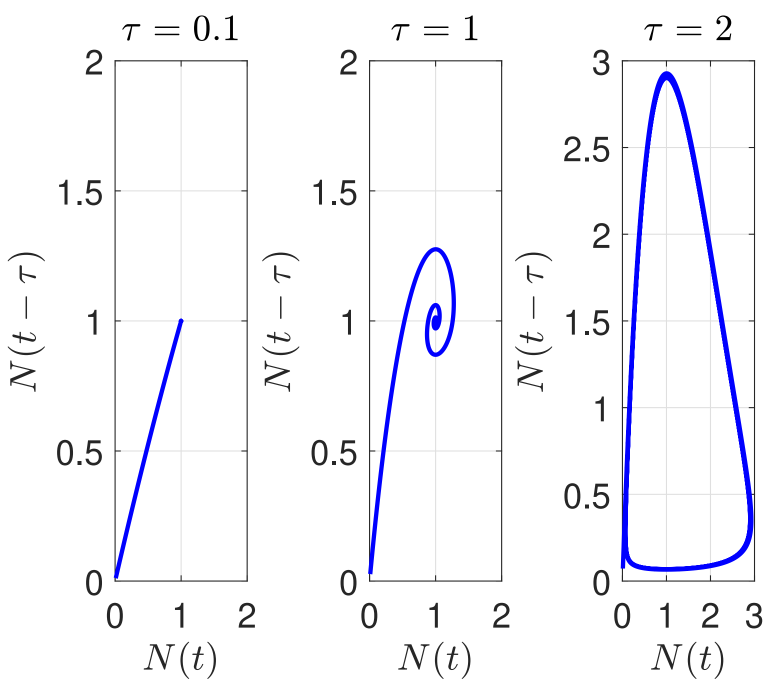

Abbildung 2: Trajektorien der Lösungen zur Populationsdynamik mit logistischem Wachstum im Pseudo-Phasenraum für verschiedene Verzögerungen.

mit Ansteckungsrate $\beta > 0$ und Genesungsrate $\gamma > 0$. Es ist hier $S(t)+I(t)+R(t)$ konstant für alle $t \geq 0$. Die Gesamtpopulation bleibt also gleich. O.E.d.A. kann $S(0) + I(0) + R(0) = 1$ gesetzt werden, d.h. es wird von Populationsdichten ausgegangen. Diese Eigenschaft wird sich auch in den folgenden SIR-Modellen finden.

Beispiel 1.3 Ein SIR-Modell mit einer verzögerter Ansteckung ist gegeben durch das System verzögerter Dgln.

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t-\tau)I(t-\tau) \\ I'(t) &= \beta S(t-\tau)I(t-\tau) - \gamma I(t) \\ R'(t) &= \gamma I(t) \end{aligned} \tag{1.6}$$

mit Konstanten $\beta, \gamma > 0$ und einer Verzögerung $\tau > 0$.

Ein SIR-Modell mit temporärer Immunität ist gegeben durch das System gew. Dgln.

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t)I(t) + \theta R(t) \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ R'(t) &= \gamma I(t) - \theta R(t) \end{aligned} \tag{1.7}$$

mit Konstanten $\beta, \gamma, \theta > 0$. Lösungen von AWPen des Systems (1.7) konvergieren gegen stationäre Punkte.

Beispiel 1.4 Ein SIR-Modell mit temporärer Immunität bei einem verzögerten Verlust der Immunität lautet

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t)I(t) + \gamma I(t-\tau) \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ R'(t) &= \gamma I(t) - \gamma I(t-\tau) \end{aligned} \tag{1.8}$$

mit Konstanten $\beta, \gamma > 0$ und Verzögerung $\tau > 0$. Für kleine Verzögerungen konvergieren die Lösungen von AWPen gegen stationäre Punkte. Für große Verzögerungen nähern sich die Lösungen von AWPen periodischen Lösungen an.

Definition 1.2 *Eine verzögerte Dgl. oder ein System aus verzögerten Dgln. mit mehreren (paarweise verschiedenen) Verzögerungen besitzt die Form*

$$y'(t) = f(y(t), y(t-\tau_1), y(t-\tau_2), \ldots, y(t-\tau_m)) \tag{1.9}$$

mit $\tau_1, \ldots, \tau_m > 0$. *O.E.d.A. kann* $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_m$ *vorausgesetzt werden.*

AWPe zur Dgl. (1.9) erfordern eine Vorgabe (1.4) mit $\tau = \max\{\tau_1, \ldots, \tau_m\} = \tau_m$.

Beispiel 1.5 Ein Kombination der Effekte aus Beispiel 1.3 und Beispiel 1.4 ergibt ein SIR-Modell der Gestalt

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t-\tau_1)I(t-\tau_1) + \gamma I(t-\tau_2) \\ I'(t) &= \beta S(t-\tau_1)I(t-\tau_1) - \gamma I(t) \\ R'(t) &= \gamma I(t) - \gamma I(t-\tau_2) \end{aligned} \tag{1.10}$$

mit Konstanten $\beta, \gamma > 0$ und Verzögerungen $\tau_1, \tau_2 > 0$.

Definition 1.3 *Eine Dgl. oder ein System aus Dgln. mit verteilter Verzögerung besitzt die Form*

$$y'(t) = f\left(y(t), \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} y(t-\tau)g(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right) \tag{1.11}$$

mit einer Dichtefunktion g und $0 \leq \tau_{\min} < \tau_{\max} \leq \infty$.

Bei einem System ist das Integral in (1.11) komponentenweise für $y = (y_1, \ldots, y_n)^\top$ mit der Dichtefunktion g zu bilden. Der Integrationsbereich ist entweder ein kompaktes Intervall $\mathcal{T} = [\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ oder der unbeschränkte Bereich $\mathcal{T} = [\tau_{\min}, \infty)$. Die integrable Funktion $g : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ muss die Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsdichte besitzen:

i) Nichtnegativität: $g(\tau) \geq 0$ für alle $\tau \in \mathcal{T}$,

ii) Normierung: $\displaystyle\int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} g(\tau)\, \mathrm{d}\tau = 1$.

Als Kennzahl einer Wahrscheinlichkeitsverteilung wird der Erwartungswert (Mittelwert) betrachtet

$$\bar{\tau} = \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \tau g(\tau)\, \mathrm{d}\tau. \tag{1.12}$$

Beispiele sind die Gleichverteilung oder Beta-Verteilung auf einem kompakten Intervall $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ und die Exponentialverteilung oder Gamma-Verteilung auf $[0, \infty)$. AWPe zu einer Dgl. (1.11) erfordern die Vorgabe von $y(t)$ für $-t \in \mathcal{T}$.

Beispiel 1.6 Ein SIR-Modell mit temporärer Immunität und einer verteilten Verzögerung ist

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t)I(t) + \gamma \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} I(t-\tau)g(\tau)\, \mathrm{d}\tau \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ R'(t) &= \gamma I(t) - \gamma \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} I(t-\tau)g(\tau)\, \mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{1.13}$$

mit Konstanten $\beta, \gamma > 0$ und Dichtefunktion g.

In [5] wurde Beispiel 1.4 mit einer Verzögerung $\bar{\tau}$ gemäß (1.12) und Beispiel 1.6 mit verteilter Verzögerung verglichen. Das Lösungsverhalten ist qualitativ identisch und quantitativ ähnlich.

Definition 1.4 *Eine neutrale verzögerte Dgl. oder ein System aus neutralen verzögerten Dgln. ist eine Dgl., bei der die rechte Seite auch von Ableitungen der Lösung an früheren Zeitpunkten abhängt.*

Eine einfache Form von neutralen verzögerten Dgln. mit einer Verzögerung lautet

$$y'(t) = f(y(t), y(t-\tau), y'(t-\tau)). \tag{1.14}$$

Ein Anwendungsbeispiel der Gestalt (1.14) findet sich in [6]. Neutrale verzögerte Dgln. werden in dieser Veranstaltung nicht betrachtet.

2 Existenz, Eindeutigkeit und Eigenschaften

In diesem Kapitel befassen wir uns mit der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu verzögerten Dgln. sowie deren Eigenschaften.

2.1 Einfache Differentialgleichung

Wir diskutieren die lineare verzögerte Dgl.

$$y'(t) = \mu\, y(t-\tau) \tag{2.1}$$

mit Parameter $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und Verzögerung $\tau > 0$. Im Fall $\tau = 0$ erhalten wir die lineare gewöhnliche Dgl. $y' = \mu y$ mit den Lösungen $y(t) = C\mathrm{e}^{\mu t}$ für Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Dies sind steigende oder fallende Exponentialfunktionen je nach Vorzeichen von μ.

Demgegenüber untersuchen wir die mögliche Existenz von periodischen Lösungen der Dgl. (2.1). Wir machen als Ansatz eine harmonische Schwingung

$$y(t) = A\sin(\omega t)$$

mit $A \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $\omega > 0$. Einsetzen in (2.1) liefert mit einem Additionstheorem

$$\begin{aligned} A\omega\cos(\omega t) &= \mu A \sin(\omega(t-\tau)) \\ &= \mu A\left[\sin(\omega t)\cos(\omega\tau) - \cos(\omega t)\sin(\omega\tau)\right]. \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Terme zeigt als Bedingungen

$$\cos(\omega\tau) = 0 \qquad \text{und} \qquad \omega = -\mu\sin(\omega\tau).$$

Die erste Bedingung erfordert $\omega\tau = \frac{\pi}{2}$ oder $\omega\tau = \frac{3\pi}{2}$. Mit der zweiten Bedingung folgt dann

$$\begin{aligned} &i) \quad \omega\tau = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \mu\tau = -\frac{\pi}{2}, \\ &ii) \quad \omega\tau = \frac{3\pi}{2} \quad \text{und} \quad \mu\tau = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Notwendigerweise ist damit $\omega, \mu, \tau \neq 0$. Es ist A beliebig. Jedoch muss τ in Abhängigkeit von μ gewählt werden oder umgekehrt. Sei τ vorgegeben.

Im Fall (i) folgt $\mu = -\frac{\pi}{2\tau} < 0$ und $\omega = \frac{\pi}{2\tau}$. Die Periode $T = 4\tau$ der Lösung hängt somit von der Verzögerung ab.

Im Fall (ii) folgt $\mu = \frac{3\pi}{2\tau} > 0$ und $\omega = \frac{3\pi}{2\tau}$. Die Periode ergibt sich zu $T = \frac{4}{3}\tau$.

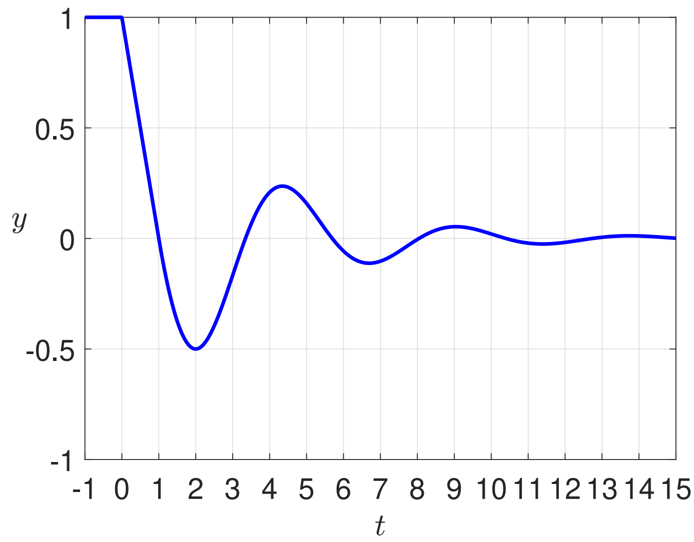

Abbildung 3: Lösung des AWPs zur verzögerten Dgl. (2.1).

Nun betrachten wir die Dgl. (2.1) mit $\mu = -1$ und $\tau = 1$ sowie den Anfangswerten $y(t) = 1$ für $t \in [-1, 0]$. Wir lösen dieses AWP mit der *Schritte-Methode*. Im Intervall $[0, 1]$ erhalten wir

$$y'(t) = -y(t-1) = -1.$$

Dies ist eine gewöhnliche Dgl. Mit der Anfangsbedingung folgt als Lösung

$$y(t) = y(0) + \int_0^t -1 \, \mathrm{d}s = 1 - t \qquad \text{für } t \in [0, 1].$$

Im Intervall $[1, 2]$ ergibt sich die gewöhnliche Dgl.

$$y'(t) = -y(t-1) = -(1 - (t-1)) = t - 2.$$

Mit dem Anfangswert $y(1) = 0$ folgt

$$y(t) = y(1) + \int_1^t -(s-2) \, \mathrm{d}s = \tfrac{3}{2} - 2t + \tfrac{1}{2}t^2 \qquad \text{für } t \in [1, 2].$$

Das Verfahen wird auf den Intervallen $[n-1, n]$ für $n = 3, 4, \ldots$ fortgesetzt. Induktiv folgt

$$y(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{(t-(k-1))^k}{k!} \qquad \text{für } \ t \in [n-1, n)$$

und $n \geq 1$. Im n-ten Intervall liegt ein Polynom vom Grad n vor. Abbildung 3 zeigt diese Lösung.

Die Lösung ist insgesamt stetig, jedoch nicht stetig differenzierbar bei $t = 0$. Eine genauere Untersuchung zeigt eine Unstetigkeit in der n-ten Ableitung

$$\lim_{t \to (n-1)-} y^{(n)}(t) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{t \to (n-1)+} y^{(n)}(t) = (-1)^n.$$

Die Lösung y ist n-mal stetig differenzierbar auf $(n-1, \infty)$ für $n \geq 0$. Die Glattheit nimmt daher mit der Zeit zu.

2.2 Existenz und Eindeutigkeit

Wir betrachten ein autonomes System aus verzögerten Dgln. (1.3) mit einer Verzögerung. Die rechte Seite besitzt die Form $f : D \times E \to \mathbb{R}^n$ mit $D, E \subseteq \mathbb{R}^n$. Es sei f stetig differenzierbar auf D und stetig auf E. Ein AWP wird vorgegeben durch (1.4).

Definition 2.1 *Eine Funktion $y : [-\tau, T) \to \mathbb{R}^n$ mit $0 < T \leq \infty$ heißt Lösung eines AWPs* (1.3),(1.4) *bei einem System mit einer konstanten Verzögerung $\tau > 0$ und stetigen Anfangswerten, wenn*

i) y erfüllt die Dgl. für $t > 0$,

ii) $y(t) = y_0(t)$ für $t \in [-\tau, 0]$,

iii) y ist stetig auf $[-\tau, T)$,

iv) y ist stetig differenzierbar auf $(0, T)$ und der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{t \to 0+} y'(t)$ existiert.

Wir lösen das AWP (1.3),(1.4) mit der *Schritte-Methode*. Dieses Verfahren wird üblicherweise mit der Folge von Intervallen $[j\tau, (j+1)\tau]$ für $j = 0, 1, 2, \ldots$ durchgeführt. Bei gewöhnlichen Dgln. wird die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen auf offenen maximalen Intervallen erhalten, siehe Satz 3.6 in [4]. Daher verwenden wir die Folge $[j\frac{\tau}{2}, (j+1)\frac{\tau}{2}]$ für $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Sei ein $\varepsilon \in (0, \frac{\tau}{4})$ gegeben. Die Anfangswerte (1.4) beschreiben wir durch eine stetige Funktion $\phi : [-\tau - \varepsilon, 0] \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\phi(t) = \begin{cases} y_0(t) & \text{für } -\tau \leq t \leq 0, \\ y_0(-\tau) & \text{für } t < -\tau. \end{cases} \tag{2.2}$$

Hier liegt eine stetige Fortsetzung auf $t < -\tau$ vor. Es entsteht ein nichtautonomes System aus gewöhnlichen Dgln.

$$y'(t) = \tilde{f}(t, y(t)) = f(y(t), \phi(t - \tau)) \tag{2.3}$$

Tabelle 1: Vorgehen in Schritte-Methode.

Intervall	Def.bereich $\tilde{f}$	verwendete frühere Werte
$[0, \frac{\tau}{2}]$	$(-\varepsilon, \tau)$	ϕ auf $(-\tau - \varepsilon, 0)$
$[\frac{\tau}{2}, \tau]$	$(\frac{\tau}{2} - \varepsilon, \frac{3}{2}\tau)$	ϕ auf $(-\frac{\tau}{2} - \varepsilon, 0]$, y auf $(0, \frac{\tau}{2})$
$[\tau, \frac{3}{2}\tau]$	$(\tau - \varepsilon, 2\tau)$	ϕ auf $(-\varepsilon, 0]$, y auf $(0, \tau)$
$[\frac{3}{2}\tau, 2\tau]$	$(\frac{3}{2}\tau - \varepsilon, \frac{5}{2}\tau)$	y auf $(\frac{\tau}{2} - \varepsilon, \frac{3}{2}\tau)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

mit $\tilde{f} : (-\varepsilon, \tau) \times D \to \mathbb{R}^n$. Es ist $\tilde{f}$ stetig in t und stetig differenzierbar in y. Als Anfangsbedingung folgt $y(0) = \phi(0)$. Die Theorie über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu gewöhnlichen Dgln. ergibt eine eindeutige Lösung von (2.3) mit maximalem Existenzintervall, d.h. von der Form $y : (-\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ mit $0 < \alpha \leq \varepsilon$ und $0 < \beta \leq \tau$.

Gilt $\beta \leq \frac{\tau}{2}$, dann ist eine eindeutige Lösung y des AWPs (1.3),(1.4) auf dem (kleinen) Intervall $[0, \beta)$ gefunden, welche nicht für $t > \beta$ fortgesetzt werden kann. Gilt $\beta > \frac{\tau}{2}$, dann wird die Methode auf dem Intervall $[\frac{\tau}{2}, \tau]$ weitergeführt mit den Anfangswerten $\phi(t) = y_0(t)$, wobei eine Fortsetzung wie in (2.2) nicht mehr notwendig ist. Für das Intervall $[\tau, \frac{3}{2}\tau]$ wird dann $\phi : [-\varepsilon, \frac{\tau}{2}] \to \mathbb{R}^n$ auf die bereits erhaltene Lösung y gesetzt, usw. Tabelle 1 zeigt die enthaltenen Abhängigkeiten.

Die Schritte-Methode wird rekursiv auf den Intervallen durchgeführt solange die zugehörigen gewöhnlichen Dgln. noch Lösungen über die gesamten Intervalle besitzen. Bricht diese Folge nie ab, dann existiert die Lösung für alle $t \geq 0$. Wir finden somit eine Lösung $y : [0, T) \to \mathbb{R}^n$ des AWPs (1.3),(1.4) auf einen maximalen Intervall ($T < \infty$ oder $T = \infty$). Der nachfolgende Satz fasst das Ergebnis zusammen.

Satz 2.1 *Gegeben sei das AWP* (1.3),(1.4) *eines Dgl.-Systems mit einer Verzögerung. Die rechte Seite $f : D \times E \to \mathbb{R}^n$ mit offenen Mengen $D, E \subseteq \mathbb{R}^n$ und $D \subseteq E$ sei stetig differenzierbar auf D und stetig auf E. Dann gibt es ein maximales T mit $0 < T \leq \infty$ und eine zugehörige eindeutige Lösung $y : [0, T) \to \mathbb{R}^n$.*

Bemerkung 2.1 Bei einem System aus Dgln. (1.9) mit mehreren Verzögerungen, siehe Def. 1.2, gilt unter entsprechenden Voraussetzungen die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung analog. Die Schritte-Methode wird dann angewendet mittels Intervallen der Breite $\frac{\tau}{2}$ mit $\tau = \min\{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$.

Bemerkung 2.2 Bei einer Dgl. (1.11) mit verteilter Verzögerung, siehe Def. 1.3, kann die Schritte-Methode angewendet werden, falls $\tau_{\min} > 0$ gilt. Jedoch kann die Schritte-Methode im Fall $\tau_{\min} = 0$ nicht eingesetzt werden.

In Satz 2.1 ist der Fall $T < \infty$ möglich. Der folgende Satz beinhaltet eine hinreichende (aber keineswegs notwendige) Bedingung dafür, dass die Lösung für alle $t \geq 0$ existiert ($T = \infty$).

Satz 2.2 *Gegeben sei ein AWP eines Systems* (1.9) *mit konstanten Verzögerungen* $\tau_1 < \cdots < \tau_m$. *Die rechte Seite* $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *erfülle die Voraussetzungen aus Satz 2.1 und die Bedingung*

$$\|f(y, z_1, \ldots, z_m)\| \leq \bar{c} + c_0\|y\| + \sum_{i=1}^{m} c_i\|z_i\| \tag{2.4}$$

für alle $y, z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{R}^n$ *mit Konstanten* $\bar{c}, c_0, c_1, \ldots, c_m \geq 0$ *und einer beliebigen Vektornorm. Dann existiert eine eindeutige Lösung* $y : [-\tau_m, \infty) \to \mathbb{R}^n$.

Beweis:

In der Schritte-Methode entsteht eine nichtautonome gewöhnliche Dgl.

$$y'(t) = \tilde{f}(t, y(t)) = f(y(t), \phi(t - \tau_1), \ldots, \phi(t - \tau_m))$$

mit $f : (-\varepsilon, \tau_1) \to \mathbb{R}^n$. Durch die Bedingung aus dem Satz können wir abschätzen

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}(t, y)\| &= \|f(y, \phi(t - \tau_1), \ldots, \phi(t - \tau_m))\| \\
&\leq \bar{c} + c_0\|y\| + \sum_{i=1}^{m} c_i\|\phi(t - \tau_i)\| \\
&\leq \left(\bar{c} + \sum_{i=1}^{m} c_i \max_{t \in [-\varepsilon, \tau_1]} \|\phi(t - \tau_i)\|\right) + c_0\|y\|
\end{aligned}$$

für alle $t \in (-\varepsilon, \tau_1)$ und alle $y \in \mathbb{R}^n$. Die Maxima existieren, da die Funktionen jeweils stetig auf dem kompakten Intervall sind. Dadurch ist die Nicht-Explosionsbedingung für gewöhnliche Dgln. erfüllt und die Lösung y existiert in ganz $(-\varepsilon, \tau)$. Analog gilt dies in den weiteren Intervallen der Schritte-Methode. Die Folge bricht also nie ab. □

2.3 Positivität

In vielen Modellen aus der Populationsdynamik, der chemischen Reaktionskinetik, der Epidemiologie und anderen Anwendungen haben die Unbekannten die Bedeutung von nichtnegativen Größen (z.B. Anzahlen, Konzentrationen). Daher sind wir an Kriterien interessiert, wann die Lösungen einer verzögerten Dgl. nichtnegative Lösungen besitzt. Es bezeichnet $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$.

Satz 2.3 *Die Funktion $f : \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}^n$ erfülle die Forderungen aus Satz 2.1. Gilt die Bedingung*

$$y_i = 0 \quad \Rightarrow \quad f_i(y, z) \geq 0$$

für $i = 1, \ldots, n$ und alle $y, z \in \mathbb{R}_+^n$ sowie $y_0(t) \in \mathbb{R}_+^n$ für $t \in [-\tau, 0]$, dann gilt bei der Lösung des AWPs (1.3),(1.4) *auch $y(t) \in \mathbb{R}_+^n$ für alle $t \geq 0$.*

Beweis: siehe [3], S. 28.

Bemerkung 2.3 Satz 2.3 gilt analog für autonome Systeme aus gewöhnlichen Dgln. (1.1), da der Fall $f(y, z) = f(y)$ betrachtet werden kann.

Beispiel 2.1 Wir wenden Satz 2.3 auf Beispiel 1.1 ($n = 1$) an. Mit $y(t) = N(t)$ und $z(t) = N(t - \tau)$ gilt $f = bz - dy$. Wir erhalten

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad f = bz \geq 0$$

für alle $z \geq 0$ wegen $b > 0$. Somit ist die Positivität gegeben.

Beispiel 2.2 Wir wenden Satz 2.3 auf Beispiel 1.2 ($n = 1$) an. Mit $y = N(t)$ und $z = N(t - \tau)$ gilt $f = ry(1 - \frac{z}{K})$. Wir erhalten

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0$$

für beliebiges z. Somit ist die Positivität gegeben.

Beispiel 2.3 Es bezeichen M die Konzentration einer mRNA und P die Konzentration eines Proteins. Ein einfaches Modell für die chemischen Reaktionen mit diesen Stoffen ist

$$\begin{aligned} M'(t) &= \alpha_M \, \frac{1}{1 + (P(t-\tau)/P_0)^{n_{\mathrm{H}}}} - \mu_M M(t) \\ P'(t) &= \alpha_P M(t) - \mu_P P(t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

mit Konstanten $\alpha_M, \alpha_P, \mu_M, \mu_P > 0$, einem Schwellenwert $P_0 > 0$, dem Hill-Koeffizienten $n_{\mathrm{H}} \geq 1$ und einer Verzögerungen $\tau > 0$.

Wir wenden Satz 2.3 auf das System (2.5) an. Mit $y = (M(t), P(t))^\top$ und $z = (M(t-\tau), P(t-\tau))^\top$ gilt

$$\begin{aligned} f_1(y, z) &= \alpha_M \, \frac{1}{1 + (z_2/P_0)^n} - \mu_M y_1 \\ f_2(y, z) &= \alpha_P y_1 - \mu_P y_2. \end{aligned}$$

Es folgt

$$y_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1(y,z) = \alpha_M \, \frac{1}{1 + (z_2/P_0)^n} \geq 0$$

$$y_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f_2(x,y) = \alpha_P y_1 \geq 0$$

für alle $y_1, y_2, z_1, z_2 \geq 0$. Wieder ist die Positivität garantiert.

Leider lässt sich Satz 2.3 nicht bei den SIR-Modellen mit Verzögerung anwenden.

Beispiel 2.4 Wir betrachten das SIR-Modell aus Beispiel 1.4. Die rechte Seite läßt sich schreiben als

$$\begin{aligned} f_1(y,z) &= -\beta y_1 y_2 + \gamma z_2 \\ f_2(y,z) &= \beta y_1 y_2 - \gamma y_2 \\ f_3(y,z) &= \gamma y_2 - \gamma z_2 = \gamma(y_2 - z_2). \end{aligned}$$

Die ersten beiden Komponenten erfüllen die geforderte Bedingung. Die dritte Komponente ist unabhängig von y_3. Es tritt $f_3 < 0$ auch für $y_2, z_2 \geq 0$ auf.

2.4 Halbfluss

Wir definieren einen allgemeinen Begriff in Zusammenhang mit dynamischen Systemen.

Definition 2.2 *Es sei X eine nichtleere Teilmenge eines metrischen Raums. Ein Halbfluss in X ist eine Familie von Abbildungen $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ mit $\varphi_t : X \to X$, so dass die beiden Bedingungen erfüllt sind:*

i) Identitätseigenschaft: $\varphi_0(x) = x$ *für alle* $x \in X$,

ii) Halbgruppeneigenschaft: $\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{t+s}(x)$ *für alle* $x \in X$ *und* $t, s \geq 0$.

Bemerkung 2.4 Ein Fluss ist eine Familie von Abbildungen $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ mit analogen Eigenschaften.

Die Halbgruppeneigenschaft bewirkt auch eine Kommutativität bei der Verkettung der Abbildungen

$$\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{t+s}(x) = \varphi_{s+t}(x) = \varphi_s(\varphi_t(x)) \quad \text{für } x \in X,\ t,s \geq 0.$$

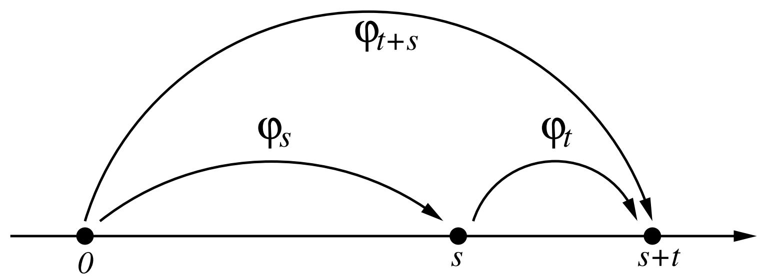

Abbildung 4: Halbfluss bei gewöhnlichen Dgln.

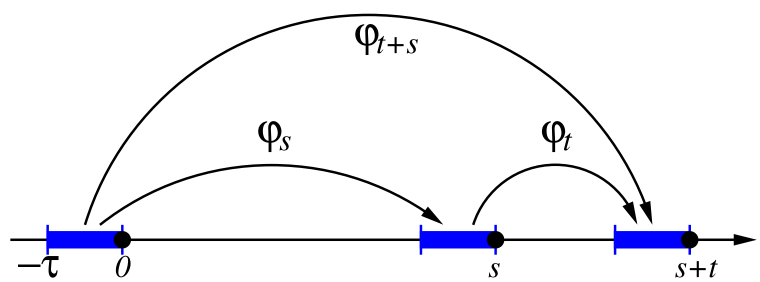

Abbildung 5: Halbfluss bei verzögerten Dgln. mit einer Verzögerung τ.

Wir betrachten das autonome System (1.1) aus gewöhnlichen Dgln. mit lokal Lipschitz-stetiger rechter Seite $f : D \to D$ und einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Es sei vorausgesetzt, dass die Lösung eines AWPs $y(0) = y_0 \in D$ für alle $t \geq 0$ existiert. Wir setzen $\varphi_t(y_0) = y(t; y_0)$ für $y_0 \in D$. Dann ist $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ ein Halbfluss, da die Eigenschaften auf Definition 2.2 erfüllt sind. Hier gilt $X = D \subseteq \mathbb{R}^n$ und als Metrik dient z.B. $d(x, \tilde{x}) = \|x - \tilde{x}\|_2$. Abbildung 4 veranschaulicht die Operation des Halbflusses.

Nun betrachten wir ein System verzögerter Dgln. (1.9) mit mehreren konstanten Verzögerungen $\tau_1 < \cdots < \tau_m$. Die rechte Seite sei $f : D \times D \times \cdots \times D \to \mathbb{R}^n$ mit einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und erfülle die Voraussetzungen aus Satz 2.1. Die Anfangswerte sind gegeben durch $y_0 : [-\tau_m, 0] \to \mathbb{R}^n$. Als metrischen Raum setzen wir die Menge

$$X = C([-\tau_m, 0], D) = \{x : [-\tau_m, 0] \to D \,:\, x \text{ stetig}\}$$

mit der Metrik

$$d(x, \tilde{x}) = \|x - \tilde{x}\|_\infty = \max_{t\in[-\tau_m,0]} \|x(t) - \tilde{x}(t)\|_2 \tag{2.6}$$

an. Wieder wird vorausgesetzt, dass Lösungen von AWPen zum System (1.9) eine eindeutige Lösung mit $y(t; y_0) \in D$ für alle $t \geq 0$ besitzen. Wir definieren die

Abbildungen

$$\varphi_t : X \to X, \quad (\varphi_t(y_0))(r) = y(t + r; y_0) \quad \text{für } r \in [-\tau_m, 0],$$

wobei $t \geq 0$. Die Familie $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ ist dann ein Halbfluss gemäß Definition 2.2. Abbildung 5 demonstriert die Abbildungen des Halbflusses.

Bei einem System aus gewöhnlichen Dgln. liegt durch $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge des endlichdimensionalen Vektorraums $\mathbb{R}^n$ vor. Bei einem System aus verzögerten Dgln. ist $X = C([-\tau_m, 0], D)$, d.h. eine unendlichdimensionale Teilmenge des Vektorraums $C([-\tau_m, 0], \mathbb{R}^n)$. Daher besitzen verzögerte Dgln. bereits eine Komplexität wie (einfache) partielle Differentialgleichungen.

2.5 Lineare Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir lineare Systeme aus verzögerten Dgln. und deren Eigenschaften.

Ein lineares System aus gewöhnlichen Dgln. hat die Gestalt

$$y'(t) = Ay(t) \tag{2.7}$$

mit einer konstanten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Für eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ machen wir den Ansatz

$$y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v \tag{2.8}$$

mit einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{C}$ und einem Vektor $v \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$. Einsetzen in (2.7) und Division durch $\mathrm{e}^{\lambda t}$ liefert mit der Einheitsmatrix $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$(\lambda I - A)\, v = 0.$$

Eine Lösung (2.8) ungleich null liegt genau dann vor, falls v ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ ist. Die *charakteristische Gleichung* zur linearen Dgl. (2.7) lautet daher

$$p(\lambda) := \det{(\lambda I - A)} = 0.$$

Dies stellt ein Nullstellenproblem für ein Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (vom Grad n) dar und somit eine algebraische Gleichung.

Definition 2.3 *Ein lineares System aus verzögerten Dgln. mit Verzögerungen $\tau_1 < \cdots < \tau_m$ besitzt die Form*

$$y'(t) = A_0\, y(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i\, y(t - \tau_i) \tag{2.9}$$

mit konstanten Matrizen $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für $i = 0, 1, \ldots, m$ und $A_i \neq 0$ für $i = 1, \ldots, m$.

Ein lineares System inklusive nur einer Verzögerung lautet dann

$$y'(t) = Ay(t) + By(t - \tau) \tag{2.10}$$

mit Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Satz 2.4 *Ein lineares System aus verzögerten Dgln.* (2.9) *mit Verzögerungen* $\tau_1 < \cdots < \tau_m$ *hat folgende Eigenschaften.*

1. *Die Menge der Lösungen auf einem Intervall* $[-\tau_m, T) \subseteq \mathbb{R}$ *mit* $0 < T \leq \infty$ *bilden einen Vektorraum über* $\mathbb{R}$ *bzw.* $\mathbb{C}$*.*
2. *Lösungen von AWPen existieren für alle* $t \geq -\tau_m$ *und sind eindeutig.*

Beweis:

1. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sowie $I = [-\tau_m, T)$. Sind $x, y : I \to \mathbb{K}$ Lösungen, dann folgt

$$\begin{aligned} (x+y)'(t) &= x'(t) + y'(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t - \tau_i) + A_0 y(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i y(t - \tau_i) \\ &= A_0(x(t) + y(t)) + \sum_{i=1}^{m} A_i (x(t - \tau_i) + y(t - \tau_i)) \end{aligned}$$

für $t \in I$. Somit ist $x + y$ wieder eine Lösung. Mit $\alpha \in \mathbb{K}$ folgt

$$\begin{aligned} (\alpha y)'(t) &= \alpha y'(t) = \alpha \left(A_0 \, y(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i \, y(t - \tau_i) \right) \\ &= A_0 \, (\alpha y(t)) + \sum_{i=1}^{m} A_i \, (\alpha y(t - \tau_i)) \end{aligned}$$

für $t \in I$. Also ist αy auch eine Lösung.

2. Die rechte Seite der Dgl. $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lautet

$$f(y, z_1, \ldots, z_m) = A_0 y + \sum_{i=1}^{m} A_i z_i$$

und ist beliebig oft stetig differenzierbar. Dadurch sind die Voraussetzungen aus Satz 2.1 über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen erfüllt. Sei $\| \cdot \|$ eine beliebige Vektornorm und $\|\cdot\|_*$ die induzierte Matrixnorm (Operatornorm). Eine Abschätzung zeigt

$$\|f(y,z_1,\dots,z_m)\| = \left\|A_0 y + \sum_{i=1}^m A_i z_i\right\| \le \|A_0 y\| + \sum_{i=1}^m \|A_i z_i\|$$
$$\le \|A_0\|_* \|y\| + \sum_{i=1}^m \|A_i\|_* \|z_i\|.$$

Dadurch ist die Bedingung (2.4) aus Satz 2.2 erfüllt mit den Konstanten $\bar{c} = 0$ und $c_i = \|A_i\|_*$ für $i = 0, 1, \dots, m$. □

Wir machen wieder den Ansatz der Form (2.8) für eine Lösung des verzögerten Dgl.-Systems (2.9). Einsetzen in das System ergibt

$$\lambda \mathrm{e}^{\lambda t} v = \mathrm{e}^{\lambda t} A_0 v + \sum_{i=1}^m \mathrm{e}^{\lambda(t-\tau_i)} A_i v.$$

Division durch $\mathrm{e}^{\lambda t}$ liefert

$$\lambda v = A_0 v + \sum_{i=1}^m \mathrm{e}^{-\lambda \tau_i} A_i v.$$

Wir ordnen die Terme um zu

$$\left(\lambda I - A_0 - \sum_{i=1}^m \mathrm{e}^{-\lambda \tau_i} A_i\right) v = 0.$$

Diese Bedingung führt auf die folgende Definition.

Definition 2.4 *Die charakteristische Gleichung eines linearen Systems mit mehreren Verzögerungen* (1.9) *lautet*

$$g(\lambda) := \det\left(\lambda I - A_0 - \sum_{i=1}^m \mathrm{e}^{-\lambda \tau_i} A_i\right) = 0 \tag{2.11}$$

mit der Unbekannten $\lambda \in \mathbb{C}$. Die Lösungen dieser Gleichung werden als Eigenwerte des Dgl.-Systems bezeichnet.

Die Bedingung (2.11) stellt eine transzendente Gleichung dar, wodurch die praktische Lösbarkeit erheblich erschwert wird. Die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ aus (2.11) ist eine ganze Funktion, d.h. sie ist holomorph und somit analytisch überall in $\mathbb{C}$. Ganze Funktionen besitzen (unter anderem) die Eigenschaften:

i) Es gibt höchstens abzählbar viele Nullstellen in $\mathbb{C}$.

ii) Jede Nullstelle ist isoliert.

Aus (ii) folgt, dass die Nullstellenmenge keinen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ besitzt.

Lemma 2.1 *Zu $\sigma \in \mathbb{R}$ gibt es in der Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > \sigma\}$ höchstens endlich viele Lösungen der charakteristischen Gleichung* (2.11). *Falls es eine Folge $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ aus paarweise verschiedenen Lösungen gibt, dann gilt $\mathrm{Re}(\lambda_j) \to -\infty$ für $j \to \infty$.*

Beweis:

Sei σ gewählt und $E = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > \sigma\}$ sowie $B_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ für beliebiges $r > 0$. Die Lösungen von (2.11) sind genau die Nullstellen einer ganzen Funktion.

Angenommen es gibt eine unendliche Folge $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aus paarweise verschiedenen Nullstellen in E. Die Menge $E \cap B_r$ mit $r > 0$ kann nur endlich viele Nullstellen enthalten. Anderenfalls gäbe es laut dem Satz von Bolzano-Weierstraß in der kompakten Menge B_r einen Häufungspunkt der Folge. Damit folgt notwendigerweise $|\lambda_j| \to \infty$ für $j \to \infty$. Wir betrachten die Matrizen

$$C_j = \frac{1}{\lambda_j}\left(\lambda_j I - A_0 - \sum_{i=1}^{m} \mathrm{e}^{-\lambda_j \tau_i} A_i\right) = I - \frac{1}{\lambda_j} A_0 - \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_j \tau_i}}{\lambda_j} A_i$$

für $j \in \mathbb{N}$ mit $\lambda_j \neq 0$. Es ist

$$\det(C_j) = \frac{1}{\lambda_j^n} \det\left(\lambda_j I - A_0 - \sum_{i=1}^{m} \mathrm{e}^{-\lambda_j \tau_i} A_i\right) = 0$$

für alle j. Wegen $\lambda_j \in E$ gilt die gleichmäßige Abschätzung

$$\left|\mathrm{e}^{-\lambda_j \tau_i}\right| = \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(\lambda_j)\tau_i} \leq \begin{cases} 1 & \text{für } \sigma \geq 0, \\ \mathrm{e}^{-\sigma \tau_i} & \text{für } \sigma < 0. \end{cases}$$

Damit folgt $C_j \to I$. Dies liefert mit der Stetigkeit der Determinante den Widerspruch

$$1 = \det(I) = \det\left(\lim_{j\to\infty} C_j\right) = \lim_{j\to\infty} \det(C_j) = 0.$$

Also kann es höchstens endlich viele Nullstellen in E geben. □

Lemma 2.2 *Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Lösung der charakteristischen Gleichung* (2.11), *dann ist auch der konjugierte Wert $\overline{\lambda}$ eine Lösung.*

Der Beweis folgt daraus, dass sich die Konjugation durch alle beteiligten Rechenoperationen, die in der Gleichung (2.11) enthalten sind, hindurchzieht.

Im allgemeinen gibt es abzählbar unendlich viele (paarweise verschiedene) Lösungen der charakteristischen Gleichung (2.11). Damit existieren auch unendlich viele linear unabhängige Lösungen der Form (2.8). Es kann noch weitere linear unabhängige Lösungen geben.

3 Stabilität

In diesem Kapitel untersuchen wir die Stabilität von stationären Lösungen zu verzögerten Dgln. Nicht mehr betrachtet wird die Stabilität von periodischen Lösungen.

3.1 Stationäre Lösungen

Der folgende Begriff wird wie bei gewöhnlichen Dgln. definiert.

Definition 3.1 *Gegeben sei ein System aus verzögerten Dgln.* (1.9) *mit einer rechter Seite $f : D \times D \times \cdots \times D \to \mathbb{R}^n$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$). Es ist $y^* \in D$ ein stationärer Punkt oder eine stationäre Lösung, falls $y(t) = y^*$ für $t \in [-\tau_m, \infty)$ eine Lösung des Systems ist.*

Satz 3.1 *In der Situation aus Definition 3.1 ist $y^* \in D$ genau dann ein stationärer Punkt, wenn*

$$f(y^*, y^*, \ldots, y^*) = 0. \tag{3.1}$$

Beweis:

Die Richtung „$\Leftarrow$“ ist klar.

Für die Richtung „$\Rightarrow$“ verwenden wir einen indirekten Beweis. O.E.d.A. sei $n = 1$. Angenommen $y(t) = y^*$ für $t \geq -\tau_m$ ist Lösung. Ist $f(y^*, \ldots, y^*) \neq 0$, dann gilt mit den Stetigkeiten $y'(t) > 0$ oder $y'(t) < 0$ für alle $t \in [0, \varepsilon)$ mit einem $\varepsilon > 0$. Dadurch muss die Lösung dort ansteigen oder abfallen. Widerspruch. $\square$

Die Bedingung (3.1) stellt ein nichtlineares System aus n Gleichungen für die unbekannten Komponenten $y_1^*, \ldots, y_n^*$ dar.

Bemerkung 3.1 Bei Dgln. mit verteilter Verzögerung (1.11) werden stationäre Punkte wie in Definition 3.1 festgelegt. Mit der Eigenschaft einer Wahrscheinlichkeitsdichte gilt

$$\int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} y^* \, g(\tau) \, \mathrm{d}\tau = y^* \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} g(\tau) \, \mathrm{d}\tau = y^*,$$

wodurch auch die Bedingung $f(y^*, y^*) = 0$ folgt.

Beispiel 3.1 Wir greifen das Beispiel 1.2 auf:

$$N'(t) = r\,N(t)\Big(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\Big).$$

Für einen stationären Punkt ergibt sich das Nullstellenproblem

$$rN^*\Big(1 - \frac{N^*}{K}\Big) = 0.$$

Die Lösungen lauten $N_1^* = 0$ und $N_2^* = K$. Es entstehen die gleichen stationären Punkte wie bei der entsprechenden gew. Dgl. ($\tau = 0$).

Beispiel 3.2 Wir untersuchen das SIR-Modell aus Beispiel 1.4. Die Nullstellenbedingung (3.1) liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\beta S^* I^* + \gamma I^* &= 0 \\ \beta S^* I^* - \gamma I^* &= 0 \\ \gamma I^* - \gamma I^* &= 0. \end{aligned}$$

Es liegt somit nur eine Gleichung vor. Wir verwenden $-\beta S^* I^* + \gamma I^* = 0$.

1. Fall: $\quad I^* = 0$
Die Gleichung ist hier stets erfüllt. Die Menge der stationären Punkte lautet

$$\Big\{(S^*, 0, R^*)^\top \,:\, S^* \in \mathbb{R},\ R^* \in \mathbb{R}\Big\}.$$

2. Fall: $\quad I^* \neq 0$
Division der Gleichung durch I^* führt auf $-\beta S^* + \gamma = 0$. Die Menge der stationären Punkte ist nun

$$\Big\{(\tfrac{\gamma}{\beta}, I^*, R^*)^\top \,:\, I^* \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ R^* \in \mathbb{R}\Big\}$$

Unter der Voraussetzung der Nichtnegativität der Lösung sowie der Normierung $S + I + R = 1$ ergeben sich die stationären Punkte

$$\Big\{(S^*, 0, 1 - S^*)^\top \,:\, S^* \geq 0\Big\} \cup \Big\{(\tfrac{\gamma}{\beta}, I^*, 1 - \tfrac{\gamma}{\delta} - I^*)^\top \,:\, I^* > 0\Big\}.$$

Die Stabilität für stationäre Lösungen wird wie bei gewöhnlichen Dgln. definiert. Den Abstand zwischen zwei Anfangswertvorgaben $y_0, \tilde{y}_0 : [-\tau_m, 0] \to D$ quantifizieren wir mit der Metrik (2.6). Ein einzelner Anfangswert $y_0 \in D$ wird dann konstant als Funktion fortgesetzt. Wir nehmen an, dass AWPe stets eindeutige Lösungen für alle $t \geq -\tau_m$ besitzen.

Definition 3.2 *Gegeben sei ein stationärer Punkt y^* einer verzögerten Dgl. und sei y die Lösung zu Anfangswerten y_0. Der stationäre Punkt heißt stabil, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit*

$$d(y^*, y_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad \|y^* - y(t)\|_2 < \varepsilon \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Der stationäre Punkt heißt attraktiv, falls ein $\delta > 0$ existiert mit

$$d(y^*, y_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \|y^* - y(t)\|_2 = 0.$$

Der stationäre Punkt heißt asymptotisch stabil, wenn er stabil und attraktiv ist.

Bemerkung 3.2

i) Die (einfache) Stabilität aus Definition 3.2 wird auch als Lyapunov-Stabilität bezeichnet.

ii) Es gibt stationäre Punkte, die attraktiv, aber nicht stabil sind.

iii) Die Konvergenzbedingung bei der Attraktivität ist äquivalent zu $\lim_{t\to\infty} y(t) = y^*$.

iv) Falls ein stationärer Punkt nicht isoliert ist, dann kann er nicht asymptotisch stabil sein.

Wir interessieren uns nun für Kriterien, welche die (asymptotische) Stabilität einer stationären Lösung bestimmen.

3.2 Lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten ein lineares System aus verzögerten Dgln. (2.9) mit Verzögerungen $\tau_1 < \cdots < \tau_m$, siehe Definition 2.3. Der Definitionsbereich der rechten Seite f ist daher $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \mathbb{R}^n$. Für einen stationären Punkte gemäß Definition 3.1 ergibt sich mit Satz 3.1 die Bedingung

$$\left(\sum_{i=0}^{m} A_i\right) y^* = 0.$$

Sei $\hat{A} = A_0 + A_1 + \cdots + A_m$. Die Bedingung ist daher $y^* \in \mathrm{kern}(\hat{A})$. Es folgt eine Fallunterscheidung.

1. Fall: $\hat{A}$ regulär

Es ist $y^* = 0$ der einzige stationäre Punkt. Somit ist dieser isoliert. Dieser stationäre Punkt kann asymptotisch stabil sein oder nicht.

2. Fall: $\hat{A}$ singulär

Es gibt einen Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\dim(U) \geq 1$ aus stationären Punkten. Dadurch gibt es keinen isolierten stationären Punkt. Somit gibt es keinen asymptotisch stabilen stationären Punkt.

Satz 3.2 *Gegeben sei ein lineares System aus verzögerten Dgln.* (2.9)*. Somit ist* $y^* = 0$ *ein stationärer Punkt.*

i) Ist $y^* = 0$ *stabil, dann ist jede Lösung eines AWPs jeweils beschränkt.*

ii) $y^* = 0$ *ist genau dann attraktiv, wenn für jede Lösung eines AWPs gilt*

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0. \tag{3.2}$$

Beweis:

i) Es bezeichne $\|\cdot\|$ die Euklidische Vektornorm. Sei y eine beliebige Lösung mit Anfangswerten nicht identisch null. Wir setzen $\tilde{y} = \alpha y$ mit

$$\alpha = \frac{\delta}{2}\Big(\max_{t\in[-\tau_m,0]} \|y(t)\|\Big)^{-1} > 0.$$

Damit ist $d(0, \tilde{y}_0) = \frac{\delta}{2} < \delta$. Es folgt $\|\tilde{y}(t)\| = \|\tilde{y}(t) - y^*\| < \varepsilon$ für alle $t \geq 0$, siehe Definition 3.1. Dadurch gilt

$$\|y(t)\| = \|\tfrac{1}{\alpha}\tilde{y}(t)\| = \tfrac{1}{|\alpha|}\,\|\tilde{y}(t)\| < \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

für alle $t \geq 0$.

ii) Ist (3.2) für alle Lösungen erfüllt, dann auch für diejenigen mit $d(0, y_0) < \delta$ für beliebiges $\delta > 0$.

Sei umgekehrt (3.2) für $d(0, y_0) < \delta$ erfüllt. Sei $y(t)$ eine beliebige Lösung mit Anfangswerten nicht identisch null. Wir setzen $\tilde{y} = \alpha y$ mit α wie zuvor. Wegen $d(0, \tilde{y}_0) < \delta$ folgt $\tilde{y} \to 0$, siehe Definition 3.1. Somit gilt ebenfalls $y(t) = \frac{1}{\alpha}\tilde{y}(t) \to \infty$ für $t \to \infty$. □

Satz 3.3 *Es sei ein lineares System aus verzögerten Dgln.* (2.9) *gegeben. Gibt es einen Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$*, dann ist der stationäre Punkt* $y^* = 0$ *nicht attraktiv. Gibt es einen Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$*, dann ist der stationäre Punkt* $y^* = 0$ *weder stabil noch attraktiv.*

Beweis:

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert. Dann gibt es eine zugehörige Lösung (2.8) mit $v \neq 0$. Es bezeichne $\|\cdot\|$ die Euklidische Vektornorm. Also gilt $\|v\| \neq 0$. Es folgt

$$\|y(t)\| = \left\|e^{\lambda t} v\right\| = \left|e^{\lambda t}\right| \|v\| = \left|e^{\mathrm{Re}(\lambda)t}\right| \|v\| = e^{\mathrm{Re}(\lambda)t} \|v\|.$$

Gilt $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$, dann folgt $\|y(t)\| \geq \|v\| > 0$ für alle $t \geq 0$. Laut Satz 3.2 kann $y^* = 0$ nicht attraktiv sein, da (3.2) nicht gegeben ist.

Gilt $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, dann folgt $\|y(t)\| \to \infty$ für $t \to \infty$. Daher ist die Lösung nicht beschränkt und es gilt nicht (3.2). Mit Satz 3.2 kann $y^* = 0$ nicht stabil oder attraktiv sein. □

Satz 3.4 *Es sei ein lineares System aus verzögerten Dgln.* (2.9) *gegeben. Der stationäre Punkt* $y^* = 0$ *ist genau dann asymptotisch stabil, wenn für alle Eigenwerte* $\lambda \in \mathbb{C}$ *gilt* $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

Beweis:

Nach Satz 3.3 ist die Bedingung $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ für alle Eigenwerte notwendig für die asymptotische Stabilität.

Dass diese Bedingung hinreichend für die asymptotische Stabilität ist, wird im Beweis zu Theorem 4.3 in [7] gezeigt. □

Bemerkung 3.3 *Bei linearen Systemen aus gewöhnlichen Dgln.* (2.7) *kann die Stabilität und Attraktivität eindeutig anhand der Jordanschen Normalform der Matrix A erkannt werden. Im Gegensatz dazu erhalten wir bei linearen Systemen aus verzögerten Dgln. keine Aussage oder weiteres Kriterium im Fall* $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ *für alle Eigenwerte* λ.

Lemma 3.1 *Ist in einem linearen System aus verzögerten Dgln.* (2.9) *die Matrix* $A_0 + A_1 + \cdots + A_m$ *singulär, dann liegt mit* $\lambda = 0$ *ein Eigenwert vor.*

Beweis:

Sei $v \in \operatorname{kern}(A_0 + A_1 + \cdots + A_m)\backslash\{0\}$. Für $\lambda_0 = 0$ folgt

$$\left(\lambda_0 I - A_0 - \sum_{i=1}^{m} \mathrm{e}^{-\lambda_0 \tau_i} A_i\right) v = -\left(A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i\right) v = 0.$$

Also ist $\lambda_0 = 0$ ein Eigenwert der verzögerten Dgl. $\square$

Im Fall einer singulären Matrix folgt aus Lemma 3.1 und Satz 3.4, dass $y^* = 0$ nicht asyptotisch stabil sein kann. In Bemerkung 3.2 wurde bereits festgestellt, dass $y^* = 0$ nicht asymptotisch stabil sein kann, falls $\hat{A}$ singulär ist.

Wir betrachten noch ein lineares System (2.10) mit einer Verzögerung. Im Grenzfall $\tau = 0$ entsteht das lineare System aus gewöhnlichen Dgln. $y' = (A + B)y$. Die folgenden Resultate zeigen, dass kleine Verzögerungen die Stabilität nicht zerstören.

Lemma 3.2 *Seien $\mu_1, \ldots, \mu_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte der Matrix $A + B$, $\sigma \in \mathbb{R}$ mit $\sigma < \min\{\mathrm{Re}(\mu_1), \ldots, \mathrm{Re}(\mu_k)\}$ und $\delta > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $\tau_0 > 0$, so dass falls für ein $\tau \in (0, \tau_0)$ und ein $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\det\left(\lambda I - A - \mathrm{e}^{-\lambda\tau} B\right) = 0,$$

dann folgt $\mathrm{Re}(\lambda) < \sigma$ oder $|\lambda - \mu_i| < \delta$ für ein i.

Beweis: siehe Theorem 4.4 in [7]

Satz 3.5 *Es gelte $\mathrm{Re}(\mu) < 0$ für alle Eigenwerte der Matrix $A + B$. Dann gibt es ein $\tau_0 > 0$, so dass beim linearen System aus verzögerten Dgln. (2.10) dann der stationäre Punkt $y^* = 0$ asymptotisch stabil für alle $0 < \tau < \tau_0$ ist.*

Beweis:

Es sei mit einem $\varepsilon > 0$

$$\sigma = \min\{\mathrm{Re}(\mu_1), \ldots, \mathrm{Re}(\mu_k)\} - \varepsilon \quad \text{und} \quad s = \max\{\mathrm{Re}(\mu_1), \ldots, \mathrm{Re}(\mu_k)\}.$$

Dann gilt $\sigma, s < 0$. Wir wählen $\delta = |s|$ in Lemma 3.2. Für einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ der linearen verzögerten Dgl. gilt dann $\mathrm{Re}(\lambda) < \sigma < 0$ oder $\mathrm{Re}(\lambda) < \mathrm{Re}(\mu_i) + \delta \leq 0$ für ein i wegen $|\mathrm{Re}(\lambda) - \mathrm{Re}(\mu_i)| \leq |\lambda - \mu_i|$. Mit Satz 3.4 folgt die asymptotische Stabilität. $\square$

Literatur

[1] A. Bellen, M. Zennaro: *Numerical Methods for Delay Differential Equations.* Clarendon Press, 2003.

[2] F. Brauer, C. Castillo-Chavez: *Mathematical models in population biology and epidemiology.* Springer, 2001.

[3] T. Erneux: *Applied Delay Differential Equations.* Springer, 2009.

[4] L. Grüne, O. Junge: *Gewöhnliche Differentialgleichungen: Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme.* (2. Aufl.) Springer, 2016.

[5] R. Pulch: Delay differential equations for epidemic models with temporary immunity. in: M. Ehrhardt, M. Günther (Hrsg.): Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2021. Mathematics in Industry Vol. 39, Springer, 2022, S. 99-106.

[6] A. Ruehli, G. Antonini, J. Ekman: Neutral Delay Differential Equations from the PEEC Circuit Solution of Maxwell's Equation. in: Proceedings of IFAC TDS 2006, 6th Workshop on Time Delay Systems, 10-12 July, 2006, L'Aquila.

[7] H. Smith: *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences.* Springer, 2011.