Prof. Dr. R. Pulch
Wintersemester 2022/23

Universität Greifswald
Institut für Mathematik und Informatik

Differentialgleichungen in der Biologie

Übungsblatt 1

1. Es bezeichne $x(t)$ die Größe einer Population zur Zeit $t \geq 0$, $r > 0$ eine Wachstumskonstante und $K > 0$ die konstante Kapazität des Lebensraums. Für das Populationswachstum wird das logistische Modell

$$x'(t) = r \cdot x(t) \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right), \qquad x(0) = x_0$$

betrachtet.

   a) Lösen Sie das Anfangswertproblem für $0 < x_0 < K$ durch Trennung der Variablen. *Hinweis*: Verwenden Sie gegebenenfalls eine Formelsammlung für unbestimmte Integrale.

   b) Wie ist das Verhalten der Lösung $x(t)$ für $t \to \infty$ falls $0 < x_0 < K$ gilt.

2. Das SIS-Modell besteht aus dem Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t)I(t) + \gamma I(t) \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \end{aligned}$$

mit Konstanten $\beta, \gamma > 0$ und Anfangswerten $S(0), I(0) > 0$.

   a) Begründen Sie, dass $S(t) + I(t)$ konstant für alle t ist.

   b) Leiten Sie mit der Eigenschaft aus Teil (a) eine einzelne Differentialgleichung für $I(t)$ her.

   c) Es gelte $S(0) + I(0) = 1$. Wie ist das Verhalten der Lösungen $S(t)$ und $I(t)$ für $t \to \infty$ jeweils in den Fällen $\beta > \gamma$ und $\beta \leq \gamma$?

3. Betrachtet wird das Differentialgleichungssystem aus dem Fitzhugh-Nagumo-Modell

$$\begin{aligned} v'(t) &= v(t)(a - v(t))(v(t) - 1) - w(t) + i(t) \\ w'(t) &= bv(t) - cw(t) \end{aligned}$$

mit konstanten Parametern $a, b, c > 0$. Linearisieren Sie die rechte Seite um den Zustand $(v^*, w^*) = (0, 0)$ um ein lineares inhomogenes Differentialgleichungssystem zu erhalten. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix in Abhängigkeit der Parameter. Welche Art von Lösungen entsteht für $b \gg \max\{a, c\}$ und $i \equiv 0$?

4. Sei $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ ein Halbfluss in $D \subseteq \mathbb{R}^k$, der stetig sowohl in der Zeit t als auch in den Zuständen $\xi \in \mathbb{R}^k$ ist. Beweisen Sie: Existiert der Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_t(\xi_0) = \hat{\xi}$$

in D für ein $\xi_0 \in D$, dann ist $\hat{\xi}$ ein Fixpunkt des Halbflusses, d.h. es gilt

$$\varphi_t(\hat{\xi}) = \hat{\xi} \qquad \text{für alle } \; t \geq 0.$$

5. Sei $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ global Lipschitz stetig, d.h. es gibt eine Konstante $L > 0$ mit

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L \, \|x - y\| \qquad \text{für alle } \ x, y \in \mathbb{R}^k$$

in einer beliebigen Vektornorm $\| \cdot \|$. Beweisen Sie, dass daraus die Nichtexplosions-Bedingung

$$\|F(x)\| \leq c_1 \|x\| + c_0 \qquad \text{für alle } \ x \in \mathbb{R}^k$$

mit Konstanten $c_1, c_0 \geq 0$ folgt.

Besprechung der Aufgaben: am 27.10.2022