Prof. Dr. Roland Pulch
Wintersemester 2024/25

Universität Greifswald
Institut für Mathematik und Informatik

Differentialgleichungen in der Biologie

Übungsblatt 1

1. Es bezeichne $x(t)$ die Größe einer Population zur Zeit $t \geq 0$, $r > 0$ eine Wachstumskonstante und $K > 0$ die konstante Kapazität des Lebensraums. Für das Populationswachstum wird das logistische Modell

$$x'(t) = r \cdot x(t) \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right), \qquad x(0) = x_0$$

betrachtet.

   a) Lösen Sie das Anfangswertproblem für $0 < x_0 < K$ durch Trennung der Variablen. *Hinweis*: Verwenden Sie gegebenenfalls eine Formelsammlung für unbestimmte Integrale.

   b) Wie ist das Verhalten der Lösung $x(t)$ für $t \to \infty$ falls $0 < x_0 < K$ gilt.

2. Für die Bildung von Hydrogenbromid entwickelten Christiansen, Herzfeld und Polanyi (1919/20) ein Modell mit fünf chemischen Reaktionen:

$$\mathrm{Br_2} \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} 2\,\mathrm{Br}$$

$$\mathrm{Br} + \mathrm{H_2} \underset{k_4}{\overset{k_3}{\rightleftharpoons}} \mathrm{HBr} + \mathrm{H}$$

$$\mathrm{H} + \mathrm{Br_2} \xrightarrow{k_5} \mathrm{HBr} + \mathrm{Br}$$

Stellen Sie ein System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen für die zeitabhängigen Konzentrationen $[\mathrm{Br_2}]$, $[\mathrm{Br}]$, $[\mathrm{H}]$, $[\mathrm{H_2}]$, $[\mathrm{HBr}]$ auf.

3. Das SIS-Modell besteht aus dem Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t)I(t) + \gamma I(t) \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \end{aligned}$$

mit Konstanten $\beta, \gamma > 0$ und Anfangswerten $S(0), I(0) > 0$.

   a) Begründen Sie, dass $S(t) + I(t)$ konstant für alle t ist.

   b) Leiten Sie mit der Eigenschaft aus Teil (a) eine einzelne Differentialgleichung für $I(t)$ her.

   c) Es gelte $S(0) + I(0) = 1$. Wie ist das Verhalten der Lösungen $S(t)$ und $I(t)$ für $t \to \infty$ jeweils in den Fällen $\beta > \gamma$ und $\beta \leq \gamma$?

4. Sei $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ global Lipschitz stetig, d.h. es gibt eine Konstante $L > 0$ mit

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L\,\|x - y\| \qquad \text{für alle } \; x, y \in \mathbb{R}^k$$

   in einer beliebigen Vektornorm $\|\cdot\|$. Beweisen Sie, dass daraus die Nichtexplosions-Bedingung

$$\|F(x)\| \leq c_1\|x\| + c_0 \qquad \text{für alle } \; x \in \mathbb{R}^k$$

   mit Konstanten $c_1, c_0 \geq 0$ folgt.

5. Zum Differentialgleichungssystem $x_1' = -x_2$, $x_2' = x_1$ sind Lösungen zu Anfangswertproblemen gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}}_{=S(t)} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}.$$

   Beweisen Sie, dass durch $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ mit $\varphi_t(\xi) = S(t)\xi$ ein Halbfluss auf $\mathbb{R}^2$ gegeben ist. Dabei soll nur die Formel für die Matrix $S(t)$ verwendet werden und nicht die Differentialgleichung.

Besprechung der Aufgaben: am 24.10.2024