Prof. Dr. R. Pulch
Wintersemester 2022/23

Universität Greifswald
Institut für Mathematik und Informatik

Differentialgleichungen in der Biologie

Übungsblatt 2

1. Sei $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ ein stetiger Halbfluss auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^k$.

   a) Beweisen Sie, dass die Menge seiner stationären Punkte abgeschlossen ist.

   b) Zugehöhrige diskrete Halbflüsse $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ entstehen durch $\psi_n = \varphi_{n\Delta t}$ mit einer Schrittweite $\Delta t > 0$. Stationäre Punkte werden analog definiert. Zeigen Sie, dass ein stationärer Punkt von $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ auch ein stationärer Punkt von $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist. Zeigen Sie mittels eines Beispiels, dass die Umkehrung nicht immer gilt.

2. Ein SIR-Modell inklusive eines Verlusts der Immunität lautet

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t)I(t) + \alpha R(t) \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ R'(t) &= \gamma I(t) - \alpha R(t) \end{aligned}$$

   mit Konstanten $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Bestimmen Sie die Menge aller stationären Punkte dieses Differentialgleichungssystems. Partitionieren Sie die Menge in die beiden Teilmengen „infektionsfrei“ und „endemisches Infektionsgeschehen“.

3. Wir betrachten ein Differentialgleichungssystem ähnlich dem Fitzhugh-Nagumo-Modell

$$\begin{aligned} x_1' &= F_1(x_1, x_2) = x_2 + x_1 - \tfrac{1}{3}x_1^3 \\ x_2' &= F_2(x_1, x_2) = x_1 - a + bx_2 \end{aligned}$$

   mit konstanten Parametern $a, b > 0$. Die sogenannten Nullklinen

$$\mathcal{N}_i = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ F_i(x_1, x_2) = 0\} \qquad \text{für } i = 1, 2$$

   sollen diskutiert werden. Stationäre Punkte liegen genau in $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$ vor. Interpretieren Sie die Nullklinen geometrisch in der (x_1, x_2)-Ebene. Finden Sie Parameter, so dass jeweils genau ein, zwei und drei stationäre Punkte entstehen. Begründen Sie, dass immer mindestens ein stationärer Punkt existiert.

4. Die Funktion $x : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ erfülle die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \sin^2\left(\frac{x(t)}{2}\right).$$

   Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 2\left\lceil \frac{x(0)}{2\pi} \right\rceil \pi,$$

   wobei $\lceil \gamma \rceil$ die kleinste ganze Zahl größer gleich $\gamma \in \mathbb{R}$ ist.

5. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda x(t) - x(t)^3$$

mit einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle stationären Punkte dieser Differentialgleichung in Abhängigkeit des Parameters λ. Untersuchen Sie dann, ob die stationären Punkte asymptotisch stabil oder instabil sind.

6. Gegeben sei ein Modell einer Fischpopulation $N(t)$ mit logistischem Wachstum und Abfischen der Gestalt

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - EN(t)$$

für positive Konstanten r, K, E.

a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie jeweils (mit Fallunterscheidungen für alle möglichen positiven Konstanten), ob die stationären Punkte asymptotisch stabil oder instabil sind. Hierzu soll eine grafische Betrachtung des Funktionsgraphen der rechten Seite eingesetzt werden.

c) Beweisen Sie, dass $N(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ gilt falls $N(0) > 0$ erfüllt ist.

Besprechung der Aufgaben: am 10.11.2022