Prof. Dr. R. Pulch
Wintersemester 2022/23

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Institut für Mathematik und Informatik

Differentialgleichungen in der Biologie

Übungsblatt 3

1. Berechnen Sie die Matrix-Exponentialfunktion e^{tA} für $t \in \mathbb{R}$ und die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Gegeben sei ein zweidimensionales lineares Differentialgleichungssystem $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax$, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Sei $S = a + d$ die Spur und $D = ad - bc$ die Determinante der Matrix.

a) Stellen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 der Matrix sowie die Summe $\lambda_1 + \lambda_2$ und das Produkt $\lambda_1 \lambda_2$ als Formel nur mit S und D dar.

b) Erstellen Sie ein zweidimensionales Diagramm mit Abszisse S und Ordinate D. Teilen Sie darin den zweidimensionalen Raum auf in Gebiete mit den jeweiligen Typen der Nulllösung (Knoten, Strudel, Sattel, etc.).

3. Gegeben sei ein Anfangswertproblem $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax$, $x(0) = \xi$ mit der konstanten Matrix $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$. Sei $(\varphi_t)_{t \geq 0}$ der zugehörige Halbfluss. Eine beliebige aber feste Vektornorm $\| \cdot \|$ wird verwendet. Beweisen Sie, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind.

i) Es gibt eine Konstante $L > 0$ mit

$$\|\varphi_t(\xi_1) - \varphi_t(\xi_2)\| \leq L \, \|\xi_1 - \xi_2\|$$

für alle $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^k$ und $t \geq 0$.

ii) Es gibt eine Konstante $L > 0$ mit

$$\|\varphi_t(\xi)\| \leq L \, \|\xi\|$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^k$ und $t \geq 0$.

iii) Die Nulllösung (Anfangswert $\xi = 0$) ist stabil.

4. Betrachtet wird ein lineares SIR-Modell mit Verlust der Immunität

$$\begin{aligned} S' &= -S + \alpha R \\ I' &= S - I \\ R' &= I - \alpha R \end{aligned}$$

inklusive dem reellen Parameter $\alpha > 0$.

 a) Geben Sie die Matrix A zu diesem linearen Differentialgleichungssystem an. Ist die Matrix singulär?

 b) Bestimmen Sie die Menge aller stationären Punkte (S^*, I^*, R^*) zu diesem Differentialgleichungssystem. Interpretieren Sie die relativen Größen $\frac{S^*}{N^*}, \frac{I^*}{N^*}, \frac{R^*}{N^*}$ mit $N^* = S^* + I^* + R^*$ für hohe Parameter α, sofern $S^*, I^*, R^* > 0$.

 c) Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrix A. Untersuchen Sie damit die Stabilität und Attraktivität der Nulllösung.

5. Betrachtet wird ein lineares Differentialgleichungssystem $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax$ für $t \geq 0$. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ heißt

 - *dissipativ*, wenn $A + A^\top$ negativ semi-definit ist.
 - *strikt dissipativ*, wenn $A + A^\top$ negativ definit ist.

 Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

 a) Bei einer dissipativen oder strikt dissipativen Matrix ist für eine Lösung $x(t)$ die Euklidische Norm $\|x(t)\|$ monoton fallend mit t. Was folgt für die Stabilität der Nulllösung?
 Hinweis: Differenzieren Sie die Funktion $f(t) = x(t)^\top x(t)$.

 b) Falls die Matrix strikt dissipativ ist, dann gilt $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ für alle Eigenwerte λ der Matrix. Was folgt für die Attraktivität der Nulllösung?

Besprechung der Aufgaben: am 24.11.2022