Prof. Dr. Roland Pulch
Wintersemester 2024/25

Universität Greifswald
Institut für Mathematik und Informatik

Differentialgleichungen in der Biologie

Übungsblatt 4

1. Betrachtet wird das Konkurrenz-Modell

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= x(3-x-2y)\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= y(2-x-y).\end{aligned}$$

   Bestimmen Sie alle stationären Punkte. Untersuchen Sie deren Stabilität und geben Sie den Typ des Punkts an (Knoten, Strudel, Sattel, etc.).

2. Ein SIR-Modell inklusive eines Verlusts der Immunität lautet

$$\begin{aligned}S' &= -\beta SI + \alpha R\\ I' &= \beta SI - \gamma I\\ R' &= \gamma I - \alpha R\end{aligned}$$

   mit Konstanten $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Es gibt zwei Scharen aus (nichtnegativen) stationären Punkten

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= \big\{(S^*, I^*, R^*) = (s, 0, 0) \ : \ s \geq 0\big\}\\ \mathcal{S}_2 &= \big\{(S^*, I^*, R^*) = (\tfrac{\gamma}{\beta}, i, \tfrac{\gamma}{\alpha} i) \ : \ i > 0\big\}.\end{aligned}$$

   Berechnen Sie die Jacobi-Matrix zu diesen stationären Punkten. Bestimmen Sie alle zugehörigen Eigenwerte bei $\mathcal{S}_1$. Zeigen Sie, dass bei $\mathcal{S}_2$ ein Eigenwert null auftritt. Was kann man anhand dieser Eigenwerte über die Stabilität der stationären Punkte folgern bzw. nicht folgern?

3. Betrachtet wird das Räuber–Beute–Modell

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} &= 2B\left(1-\frac{B}{2}\right) \quad -R\,\frac{B}{B+1}\\ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} &= -\frac{R}{4} \qquad\qquad +R\,\frac{B}{B+1}.\end{aligned}$$

   a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte. Analysieren Sie auch deren Stabilität.
   b) Zeigen Sie die positive Invarianz, d.h. mit $D = [0, \infty[^2$ und dem zugehörigen Halbfluss $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ gilt $\varphi_t(\xi) \in D$ für alle $\xi \in D$ und $t \geq 0$.
   c) Zeigen Sie unter Verwendung der Eigenschaft aus Teil (b), dass der Halbfluss invariant bezüglich der Menge $T = \{(b,r)^\top \ : \ b \geq 0, \ r \geq 0, \ b + r \leq k\}$ für alle hinreichend großen k ist.
   Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B+R)$.
   d) Zeigen Sie weiter, dass das System eine periodische Lösung besitzt.

4. Zeigen Sie, dass bei folgenden Differentialgleichungssystemen keine periodische Lösung in ganz $D = \mathbb{R}^2$ existiert.

a) $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^3 + y \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + y + y^3$$

b) $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^y \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^x$$

5. Betrachtet wird ein Differentialgleichungssystem $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(x)$ mit stetig differenzierbarer rechter Seite $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$. Es sei eine Schar aus stationären Punkten $x^*(\mu)$ mit Scharparameter $\mu \in (\mu_{\min}, \mu_{\max})$ gegeben. Zudem sei die Schar stetig differenzierbar bezüglich μ mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} x^*(\mu) \neq 0$ (Nullvektor) für alle μ. Beweisen Sie, dass die Jacobi-Matrix F' bei allen stationären Punkten singulär ist.

Besprechung der Aufgaben: am 05.12.2024