Prof. Dr. R. Pulch
Wintersemester 2022/23

Universität Greifswald
Institut für Mathematik und Informatik

Differentialgleichungen in der Biologie

Übungsblatt 4

1. Untersuchen Sie das Konkurrenz-Modell

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 2N(1 - (N + 2M))$$
$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = M(1 - (3N + M))$$

auf stationäre Punkte und deren Stabilität.

2. Ein Modell der Belousov-Zhabotinsky-Reaktion lautet

$$x_1' = \alpha - (\beta + 1)x_1 + x_1^2 x_2$$
$$x_2' = \beta x_1 - x_1^2 x_2$$

mit konstanten Parametern $\alpha, \beta > 0$.

a) Bestimmen Sie den einzigen stationären Punkt des Systems.
Zur Kontrolle: $x_1^* = \alpha$, $x_2^* = \frac{\beta}{\alpha}$

b) Untersuchen Sie soweit wie möglich den stationären Punkt auf Stabilität in Abhängigkeit der Parameter $\alpha, \beta > 0$.

c) Sei $\alpha = \beta = 1$. Klassifizieren Sie den stationären Punkt bezüglich der Stabilität (Knoten, Sattel, Strudel, etc.).

d) Wir nehmen an, dass die Lösungen für alle $t \geq 0$ existieren. Zeigen Sie, dass $x_1(t), x_2(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ und alle $\alpha, \beta > 0$ gilt unter der Voraussetzung $x_1(0), x_2(0) > 0$.

3. Betrachtet wird das Differentialgleichungssystem

$$x' = -y - \frac{x(x^2 + y^2 - 2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$y' = x - \frac{y(x^2 + y^2 - 2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Bestimmen Sie für alle Anfangswerte mit $x(0) \neq 0$ oder $y(0) \neq 0$ die Omega-Grenzmengen.

Hinweis: Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2 + y^2)$.

4. Das SIR-Modell mit einem Verlust der Immunität lässt sich vereinfachen zu dem Differentialgleichungssystem

$$
\begin{aligned}
S'(t) &= -\beta S(t)I(t) + \alpha(N - S(t) - I(t)) \\
I'(t) &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)
\end{aligned}
$$

mit der konstanten Gesamtpopulation $N > 0$ und den Konstanten $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Sei $N > \frac{\gamma}{\beta}$.

a) Bestimmen Sie die beiden stationären Punkte des Differentialgleichungssystems. Welcher ist der „infektionsfreie Zustand“ und welcher das „endemische Infektionsgeschehen“?

b) Untersuchen Sie die stationären Punkte auf Stabilität.

Besprechung der Aufgaben: am 08.12.2022