Prof. Dr. Roland Pulch
Wintersemester 2024/25

Universität Greifswald
Institut für Mathematik und Informatik

Differentialgleichungen in der Biologie

Übungsblatt 5

1. Die Linearisierung der beiden Differentialgleichungssysteme

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -y + x(x^2+y^2) \\ \dot{y} & = & x + y(x^2+y^2) \end{array} \quad (1) \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -y - x(x^2+y^2) \\ \dot{y} & = & x - y(x^2+y^2) \end{array} \quad (2)$$

im stationären Punkt $(0,0)$ führt in beiden Fällen auf das System

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -y \\ \dot{y} & = & x. \end{array} \quad (3)$$

a) Stellen Sie für (1) und (2) jeweils die Differentialgleichung für die Polarkoordinate $r = \sqrt{x^2+y^2}$ auf und lösen Sie diese für einen Anfangswert $r(0) = r_0 > 0$.

b) Begründen Sie, dass beide Differentialgleichungen (1) und (2) nicht topologisch äquivalent zur linearen Differentialgleichung (3) nahe $(0,0)$ sind.

2. Untersuchen Sie, ob das Lotka–Volterra Räuber–Beute–Modell

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} & = & B - RB \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} & = & -R + RB \end{array}$$

strukturell stabil im Bereich

$$D_0 = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ r \end{pmatrix} : 0 < b < 2,\ 0 < r < 2 \right\}$$

ist.

3. Gegeben sei die von zwei Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ abhängige Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha(1+x) + x^2(\alpha+\beta).$$

Zeigen Sie, dass für jedes feste $\beta \neq 0$ bei $\alpha_0 = 0$ eine Sattel–Knoten–Bifurkation vorliegt.

Ist im Fall $\beta = 0$ der Parameterwert $\alpha_0 = 0$ für die Differentialgleichung auch ein Bifurkationspunkt?

4. Das Ricker-Modell eines Populationswachstums mit linearem Abfischen lautet

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = N\mathrm{e}^{-\beta N} - \alpha N$$

für die Populationsdichte $N : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ mit den Parametern $\alpha > 0$ und $\beta > 0$.

Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung (bei festem β) bezüglich des Parameters α eine transkritische Bifurkation durchläuft. An welcher Stelle?

5. Gegeben sei eine Differentialgleichung

$$\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -V'(x)$$

mit einem stetig differenzierbaren Potential $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Stationäre Punkte x^* sind somit genau die Nullstellen von V'. Zudem wird vorausgesetzt, dass alle Nullstellen von V' isoliert sind.

a) Begründen Sie, dass strikte lokale Minima von V asymptotisch stabile stationäre Punkte und strikte lokale Maxima von V instabile stationäre Punkte sind.

b) Ein symmetrisches quartisches Potential ist gegeben durch

$$V(x) = -\tfrac{1}{2}\beta x^2 + \tfrac{1}{4}x^4$$

mit Parameter $\beta \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie mit Fallunterscheidung bezüglich des Parameters die stationären Punkte und untersuchen Sie mit der Aussage in Aufgabenteil (a) deren Stabilität.

Welcher Typ einer Bifurkation liegt bei $\beta_0 = 0$ vor?

Besprechung der Aufgaben: am 19.12.2024