Prof. Dr. R. Pulch
Wintersemester 2022/23

Universität Greifswald
Institut für Mathematik und Informatik

Differentialgleichungen in der Biologie

Übungsblatt 5

1. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} &= \beta M - \gamma P \\ \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} &= \alpha \frac{1}{1+P^h} - \delta M\,, \end{aligned}$$

welches die Selbst-Inhibition eines Gens beschreibt. Dabei sind

- P die Protein-Konzentration und
- M die mRNA-Konzentration,
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ Produktions- und Abbauraten sowie
- $h \geq 1$ der sogenannte Hill-Koeffizient.

a) Zeigen Sie, dass die Menge $[0,\infty[^2 \subset \mathbb{R}^2$ invariant unter dem zugehörigen Halbfluss $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ ist.

b) Finden Sie $c_1, c_2 > 0$ so, dass die Menge

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ m \end{pmatrix} :\ 0 \leq p \leq c_1,\ 0 \leq m \leq c_2 \right\}$$

invariant unter dem zugehörigen Halbfluss $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ ist.

c) Begründen Sie, dass es für dieses System keine periodischen Lösungen in ganz $D = \mathbb{R}^2$ gibt.

2. Die Linearisierung der beiden Differentialgleichungssysteme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(x^2+y^2) \\ \dot{y} &= x + y(x^2+y^2) \end{aligned} \quad (1) \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= -y - x(x^2+y^2) \\ \dot{y} &= x - y(x^2+y^2) \end{aligned} \quad (2)$$

im stationären Punkt $(0,0)$ führt in beiden Fällen auf das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x. \end{aligned} \quad (3)$$

a) Stellen Sie für (1) und (2) jeweils die Differentialgleichung für die Polarkoordinate $r = \sqrt{x^2+y^2}$ auf und lösen Sie diese für einen Anfangswert $r(0) = r_0 > 0$.

b) Begründen Sie, dass beide Differentialgleichungen (1) und (2) nicht topologisch äquivalent zur linearen Differentialgleichung (3) nahe $(0,0)$ sind.

3. Zeigen Sie, dass die Halbflüsse $(\varphi_t^i)_{t\geq 0}$ auf $\mathbb{R}^2$, welche durch die linearen Differentialgleichungen
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A_i x$$
für $i \in \{1,2,3\}$ mit
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
gegeben sind, topologisch äquivalent sind.

4. Untersuchen Sie, ob das Lotka-Volterra Räuber–Beute–Modell
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} &= \quad B \quad - RB \\ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} &= -R \quad + RB \end{aligned}$$
strukturell stabil im Bereich
$$D_0 = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ r \end{pmatrix} : 0 < b < 2,\ 0 < r < 2 \right\}$$
ist.

Besprechung der Aufgaben: am 5.1.2023