Prof. Dr. R. Pulch
Wintersemester 2022/23

Universität Greifswald
Institut für Mathematik und Informatik

Differentialgleichungen in der Biologie

Übungsblatt 6

1. Gegeben sei die von zwei Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ abhängige Differentialgleichung
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha(1+x) + x^2(\alpha+\beta).$$
Zeigen Sie, dass für jedes feste $\beta \neq 0$ bei $\alpha_0 = 0$ eine Sattel–Knoten–Bifurkation vorliegt.
Ist im Fall $\beta = 0$ der Parameterwert $\alpha_0 = 0$ für die Differentialgleichung auch ein Bifurkationspunkt?

2. Das Ricker-Modell eines Populationswachstums mit linearem Abfischen lautet
$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = N\mathrm{e}^{-\beta N} - \alpha N$$
für die Populationsdichte $N : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit den Parametern $\alpha > 0$ und $\beta > 0$.
Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung (bei festem β) bezüglich des Parameters α eine transkritische Bifurkation durchläuft. An welcher Stelle?

3. Das Räuber-Beute-Modell
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} &= B\Big(1-\frac{B}{K}\Big) - R\,\frac{B}{B+1} \\ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{2}R \qquad\quad + R\,\frac{B}{B+1} \end{aligned}$$
durchläuft in Abhängigkeit der Beute-Kapazität K eine Hopf–Bifurkation am stationären Punkt $(B^*, R^*) = (1, 2-\frac{2}{K})$ im Inneren des positiven Quadranten. Bestimmen Sie den Bifurkationspunkt K_0. Zeigen Sie dann noch weitere Bedingungen für die Hopf–Bifurkation in diesem Punkt.
Gibt es auch eine transkritische Bifurkation?

4. Das nichtlineare Differentialgleichungssystem
$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= uv \\ \tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -2v - u^2 \end{aligned}$$
besitzt den eindeutigen stationären Punkt $(u^*, v^*) = (0,0)$. Bestimmen Sie zu diesem stationären Punkt (näherungsweise) eine Zentrumsmannigfaltigkeit.
Hinweis: Setzen Sie für die Funktion H eine Potenzreihe an und bestimmen Sie deren Koeffizienten bis (einschließlich) Grad 3. Begründen Sie zur Vereinfachung am Anfang, dass die Koeffizienten für Grad 0 und Grad 1 verschwinden müssen.
Entscheiden Sie mittels der Zentrumsmannigfaltigkeit bzw. der Funktion H, ob der stationäre Punkt stabil oder instabil ist.

Besprechung der Aufgaben: am 19.1.2023