Prof. Dr. Roland Pulch
Wintersemester 2024/25

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Institut für Mathematik und Informatik

Differentialgleichungen in der Biologie

Übungsblatt 7

1. Gegeben sei die einfache verzögerte Differentialgleichung
$$x'(t) = -x(t-\tau)$$
mit Verzögerung $\tau > 0$ und Anfangswerten $x(t) = 1$ für $-\tau \leq t \leq 0$.
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die Lösung gegeben ist durch
$$x(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \, (t - (k-1)\tau)^k \qquad \text{für } \ (n-1)\tau \leq t < n\tau \quad \text{und} \quad n \geq 1.$$
Untersuchen Sie die Stetigkeit und Glattheit dieser Funktion.
Betrachten Sie dabei auch die höheren Ableitungen.

2. Betrachten Sie für $b > d > 0$ die verzögerte Differentialgleichung mit Ricker-Wachstum:
$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -d \cdot N(t) + b \cdot N(t-\tau) \cdot \mathrm{e}^{-N(t-\tau)}.$$
   a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte dieser Differentialgleichung.
   b) Linearisieren Sie die Dgl. um den positiven stationären Punkt $N^* > 0$.
   c) Zur Vereinfachung sei $b = \mathrm{e}^3$ und $d = 1$.
   Bestimmen Sie eine Verzögerung $\tau > 0$, bei der eine Hopf-Bifurkation in einer Umgebung des positiven stationären Punkts $N^* > 0$ möglich ist. (Geben Sie τ auch als Zahlwert an.)

3. Das Fisher-KPP Modell führt auf ein Randwertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung
$$\Phi'' + c\,\Phi' + \Phi - \Phi^2 = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} \Phi(x) = 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = 0$$
mit der Wellengeschwindigkeit $c > 0$.
Zeigen Sie, dass für $c = \frac{5}{\sqrt{6}}$ die Lösung gegeben ist durch
$$\Phi(x) = \frac{1}{\left(1 + \mathrm{e}^{x/\sqrt{6}}\right)^2}.$$
Skizzieren Sie diese Lösung.

Besprechung der Aufgaben: am 30.1.2025