Prof. Dr. R. Pulch
Wintersemester 2022/23

Universität Greifswald
Institut für Mathematik und Informatik

Differentialgleichungen in der Biologie

Übungsblatt 7

1. Untersuchen Sie, ob die Modelle (a)–(d) für verzögertes logistisches Wachstum die folgende biologische Forderung für beliebiges $\tau > 0$ erfüllen:

   Es gilt $N(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$, wenn $N(t) \geq 0$ für $-\tau \leq t \leq 0$.

   a) $\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right)$

   b) $\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = rN(t-\tau)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$

   c) $\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = rN(t-\tau)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right)$

   d) $\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = rN(t-\tau) - \frac{r}{K}N(t)^2$

   Hinweis: Was können Sie für $\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}$ aussagen, wenn $N(t) = 0$ wäre?

2. Gegeben sei die einfache verzögerte Differentialgleichung

   $$x'(t) = -x(t-\tau)$$

   mit Verzögerung $\tau > 0$ und Anfangswerten $x(t) = 1$ für $-\tau \leq t \leq 0$.
   Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die Lösung gegeben ist durch

   $$x(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} (t - (k-1)\tau)^k \qquad \text{für } (n-1)\tau \leq t < n\tau \quad \text{und} \quad n \geq 1.$$

   Untersuchen Sie die Stetigkeit und Glattheit dieser Funktion.
   Betrachten Sie dabei auch die höheren Ableitungen.

3. Betrachten Sie für $b > d > 0$ die verzögerte Differentialgleichung mit Ricker-Wachstum:

   $$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -d \cdot N(t) + b \cdot N(t-\tau) \cdot \mathrm{e}^{-N(t-\tau)}.$$

   a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte dieser Differentialgleichung.

   b) Linearisieren Sie die Dgl. um den positiven stationären Punkt $N^* > 0$.

   c) Zur Vereinfachung sei $b = \mathrm{e}^3$ und $d = 1$.
   Bestimmen Sie eine Verzögerung $\tau > 0$, bei der eine Hopf-Bifurkation in einer Umgebung des positiven stationären Punkts $N^* > 0$ möglich ist. (Geben Sie τ auch als Zahlwert an.)

Besprechung der Aufgaben: am 2.2.2023