Lemma: Sei $0 \le h_0 \le \frac{1}{2}$. Mit $t_0 = 0$ und

$$t_{k+1} = h_0 + \frac{1}{2}\, t_k^2 \qquad \text{für } \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

ist die Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton steigend und

$$\lim_{k\to\infty} t_k = t^* = 1 - \sqrt{1 - 2h_0}.$$

Beweis:

i) Wir verwenden vollständige Induktion. Als Induktionsanfang gilt $t_0 = 0$ und $t_1 = h_0 \ge 0$. Im Induktionsschritt sei nun $t_k \ge t_{k-1}$. Es folgt

$$t_{k+1} - t_k = \tfrac{1}{2}t_k^2 - \tfrac{1}{2}t_{k-1}^2 = \tfrac{1}{2}\underbrace{(t_k + t_{k-1})}_{\ge 0}\underbrace{(t_k - t_{k-1})}_{\ge 0} \ge 0,$$

d.h. $t_{k+1} \ge t_k$. Damit steigt die Folge monoton an.

ii) Wir zeigen $t_k \le 1$ für alle k durch vollständige Induktion. Der Induktionsanfang ist klar. Im Induktionsschritt sei $t_k \le 1$. Es folgt

$$t_{k+1} = h_0 + \tfrac{1}{2}t_k^2 \le \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}1^2 = 1.$$

iii) Mit (i) und (ii) ist die Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton steigend und nach oben beschränkt. Damit existiert der Grenzwert t^* der Folge. Desweiteren gilt

$$t^* = \lim_{k\to\infty} t_{k+1} = \lim_{k\to\infty} h_0 + \tfrac{1}{2}t_k^2 = h_0 + \tfrac{1}{2}{t^*}^2.$$

Wir erhalten die quadratische Gleichung ${t^*}^2 - 2t^* + 2h_0 = 0$. Es ergeben sich die reellen Nullstellen

$$t^*_{1/2} = \tfrac{1}{2}\left[2 \pm \sqrt{4 - 8h_0}\right] = 1 \pm \sqrt{1 - 2h_0}.$$

Wegen (ii) ist der Grenzwert $t^* = 1 - \sqrt{1 - 2h_0} \le 1$. □

Insbesondere gilt damit $0 \le t^* - t_k$ für alle k und

$$\lim_{k\to\infty} t^* - t_k = 0.$$

Wird die obige Bedingung leicht verschärft zu $h_0 < \frac{1}{2}$, dann folgt $t^* < 1$. Dadurch erhalten wir

$$\frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\|x^k - x^{k-1}\|} \le \tfrac{1}{2}(t_k + t_{k-1}) \le \tfrac{1}{2}(t^* + t^*) = t^* < 1.$$

Somit liegt im *vereinfachten Newton-Verfahren* (mindestens) lineare Konvergenzgeschwindigkeit vor.