Newton-Verfahren: Beispiel

Nichtlineares Gleichungssystem: $F(x) = 0$ mit $F : D \to \mathbb{R}^n$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$

Voraussetzungen: Lösung $\hat{x} \in D$ isoliert, F stetig differenzierbar, $\mathrm{D}F(\hat{x})$ regulär

Iterationsverfahren: $x^0 \to x^1 \to x^2 \to x^3 \to \cdots$

Abkürzungen: $\Delta x_k = x^{k+1} - x^k \qquad \Delta F_k = F(x^{k+1}) - F(x^k)$

Verwendet wird die Euklidische Norm $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$.

1. Gewöhnliches Newton-Verfahren: $x^{k+1} = x^k - \mathrm{D}F(x^k)^{-1}F(x^k)$

2. Vereinfachtes Newton-Verfahren: $x^{k+1} = x^k - \mathrm{D}F(x^0)^{-1}F(x^k)$

3. Quasi-Newton-Verfahren: $x^{k+1} = x^k - J_k^{-1}F(x^k)$

3.1 Broydens gute Rang-1-Modifikation: $$J_{k+1} = J_k + \frac{F(x^{k+1})\Delta {x_k}^\top}{\|\Delta x_k\|^2}$$

3.2 Broydens schlechte Rang-1-Modifikation: $$J_{k+1}^{-1} = J_k^{-1}\left(I - \frac{F(x^{k+1})\Delta F_k^\top}{\|\Delta F_k\|^2}\right)$$

Startmatrix: $J_0 = \mathrm{D}F(x^0)$

<u>Beispiel: Schnittpunkte dreier Kugeln</u>

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad F(x) = \begin{pmatrix} (x_1-1)^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2 \\ (x_1+1)^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2 \\ x_1^2 + (x_2-1)^2 + x_3^2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösungen: $\hat{x} = (0,0,1)^\top$ und $\tilde{x} = (0,0,-1)^\top$

Gewünscht ist die Konvergenz $\lim_{k\to\infty} x^k = \hat{x}$.

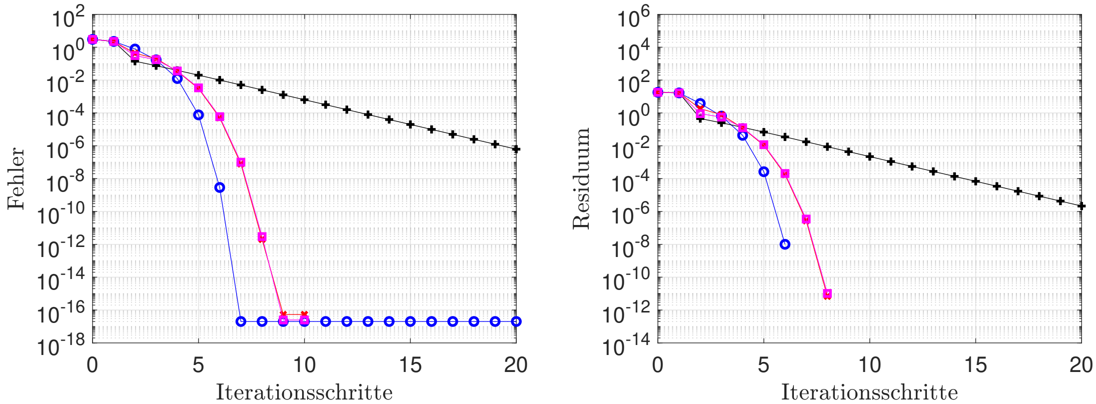
Symbole und Farben in Grafiken:

- $\circ$ gewöhnliches Newton-Verfahren
- $+$ vereinfachtes Newton-Verfahren
- $\times$ Broydens gute Rang-1-Modifikation
- $\square$ Broydens schlechte Rang-1-Modifikation

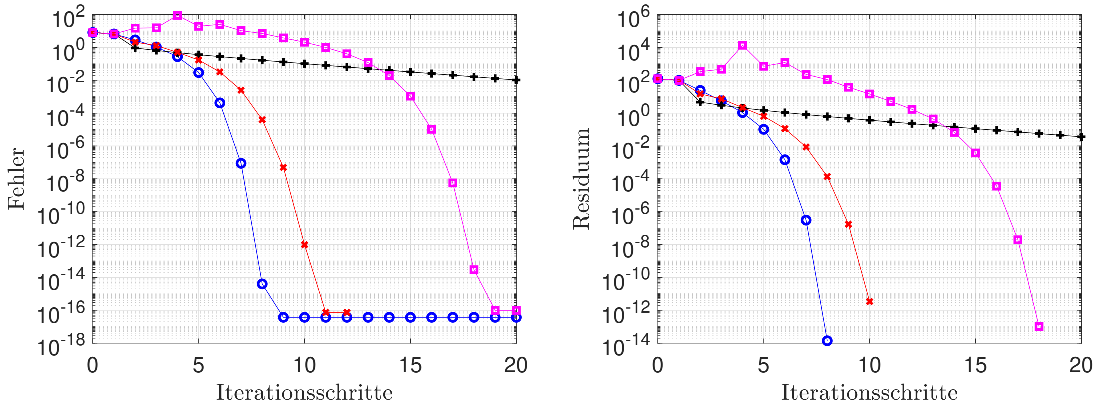
Fehler : $\|x^k - \hat{x}\|$ Residuum : $\|F(x^k)\| = \|F(x^k) - F(\hat{x})\|$

Berechnungen wurden durchgeführt mit Softwarepaket MATLAB in doppelter Genauigkeit, d.h. Maschinengenauigkeit $\varepsilon_0 \approx 2 \cdot 10^{-16}$.

Startwert $x^0 = (2, 2, 2)^\top$



Startwert $x^0 = (5, 5, 5)^\top$



Startwert $x^0 = (10, 10, 10)^\top$