Prof. Dr. Roland Pulch

Universität Greifswald
Institut für Mathematik und Informatik
Wintersemester 2023/24

Numerik II

Übungsblatt 5

Aufgabe 10 : *Existenz von schwachen Lösungen.*

Wir betrachten das Intervall $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ und die Bilinearform

$$a(u,v) = \int_0^1 x^4 u'(x) v'(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{für } \ u,v \in H_0^1(0,1).$$

Zudem sei das folgende Variationsproblem gegeben

$$J(u) = \tfrac{1}{2} a(u,u) - \int_0^1 u(x) \, \mathrm{d}x \quad \longrightarrow \quad \text{min.} \quad \text{für } \ u \in H_0^1(0,1).$$

a) Zeigen Sie, dass die Bilinearform a stetig und positiv, jedoch nicht koerziv ist.

b) Konstruieren Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche das Variationsproblem impliziert. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Zeigen Sie, dass das Randwertproblem $u(0) = u(1) = 0$ keine klassische Lösung besitzt.

c) Beweisen Sie, dass keine Lösung des Variationsproblems existiert.
Hinweis: Konstruieren Sie eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(0,1)$ mit $J(u_n) \to -\infty$.

Aufgabe 11 : *Ritz-Galerkin-Verfahren in ℓ^2.*

Wir betrachten den Hilbert-Raum der quadrat-summierbaren Folgen reeller Zahlen

$$\ell^2 = \left\{ v = (v_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{\infty} v_i^2 < \infty \right\}, \qquad \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} u_i v_i.$$

Die Bilinearform $a(u,v) = \langle u, v \rangle$ ist offensichtlich symmetrisch, stetig und koerziv. Wir definieren eine lineare, stetige Abbildung $l : \ell^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$l(v) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \cdot v_i.$$

Desweiteren sei $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)^\top$ der j-te Einheitsvektor in ℓ^2.

a) Erraten Sie die Lösung $u \in \ell^2$ der schwachen Formulierung $a(u,v) = l(v)$ für alle $v \in \ell^2$. Verifizieren Sie Ihre Vermutung.

b) Wenden Sie das Ritz-Galerkin-Verfahren mit den Unterräumen $S_N = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_N\}$ an. Bestimmen Sie die resultierende Näherung $u_N \in S_N$. Konvergieren die Näherungen gegen die exakte Lösung für steigendes N in der Norm des Hilbert-Raums?

c) Stellen Sie die Ritz-Galerkin-Methode mit den Unterräumen $\tilde{S}_N = \operatorname{span}\{e_2, \ldots, e_{N+1}\}$ auf und ermitteln Sie die resultierende Näherung $u_N \in \tilde{S}_N$. Konvergieren die Näherungen gegen die exakte Lösung für steigendes N in der Norm des Hilbert-Raums?

d) Sei nun a eine beliebige symmetrische, stetige, koerzive Bilinearform und l eine beliebige stetige Linearform. Beweisen Sie mit dem Lemma von Céa, dass zu den Unterräumen $S_N = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_N\}$ die Näherungen $u_N \in S_N$ aus der Ritz-Galerkin-Methode gegen die exakte Lösung der schwachen Formulierung konvergieren, d.h. $\|u - u_N\|_{\ell^2} \to 0$.

Hausaufgabe 10 : *Schwache Lösung ohne klassische Lösung.*

Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega = (-1, 1)$$

mit den Randbedingungen $u(-1) = u(1) = 0$. Die rechte Seite sei

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x < 0, \\ -2 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Begründen Sie (kurz), dass keine klassische Lösung existiert.

b) Zeigen Sie, dass

$$u(x) = \begin{cases} -x^2 - x & \text{für } x < 0, \\ x^2 - x & \text{für } x \geq 0, \end{cases}$$

eine schwache Lösung des Problems ist.

Hausaufgabe 11 : *Beispiel für Variationsproblem.*

Betrachtet wird der Hilbert-Raum ℓ^2 und darauf die Bilinearform

$$a(u, v) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} u_j v_j,$$

siehe Hausaufgabe 9. Ein Variationsproblem wird definiert durch

$$J(u) = \tfrac{1}{2} a(u, u) \;\to\; \min .$$

Sei $V = \big\{ (u_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \;:\; u_1 = 1 \big\}$.

a) Begründen Sie, dass $V \subseteq \ell^2$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge ist.

b) Warum ist der Satz von Lax-Milgram hier nicht anwendbar?

c) Zeigen Sie, dass trotzdem eine eindeutige Minimalstelle $\hat{u} \in V$ bezüglich J existiert.

Hausaufgabe 12 : *Lemma von Céa in der Energienorm.*

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein reeller Hilbert-Raum. Betrachtet wird die Lösung u der schwachen Formulierung $a(u, v) = \ell(v)$ für alle $v \in H$ mit Bilinearform a und Linearform ℓ. Die Bilinearform sei symmetrisch, stetig, koerziv und die Linearform sei stetig. Zudem bezeichne u_N die Näherung aus dem Ritz-Galerkin-Verfahren in einem endlichdimensionalen Unterraum S_N. Es ist $\|u\|_H = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ die Norm des Hilbert-Raums und $\|u\|_a = \sqrt{a(u, u)}$ die Energienorm.

a) Beweisen Sie die Abschätzung

$$\|u - u_N\|_a \leq \|u - v_N\|_a \qquad \text{für alle } \; v_N \in S_N,$$

welche als Lemma von Céa in der Energienorm bezeichnet wird.

b) Beweisen Sie mit Aufgabenteil (a) die schärfere Abschätzung

$$\|u - u_N\|_H \leq \sqrt{\frac{C}{\beta}}\, \|u - v_N\|_H \qquad \text{für alle } \; v_N \in S_N$$

mit Konstante C aus Stetigkeit und Konstante β aus Koerzivität der Bilinearform.

Abgabe der Hausaufgaben: 1.12.2023