Prof. Dr. Roland Pulch

Universität Greifswald
Institut für Mathematik und Informatik
Wintersemester 2023/24

# Numerik II

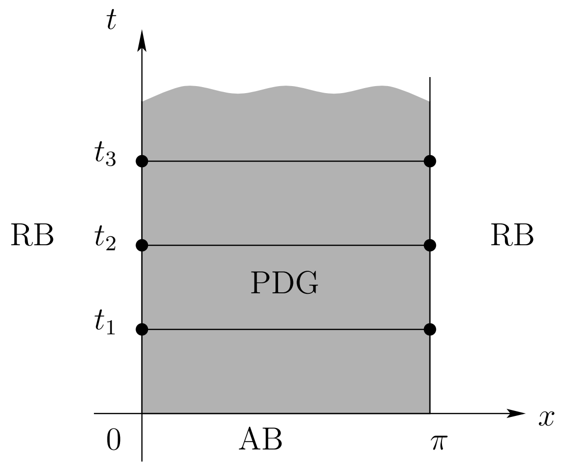
## Übungsblatt 9

**Aufgabe 20 :** *Rothe-Methode.*

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung mit Quellterm

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin(x) \qquad \text{in} \quad [0,\pi] \times [0,T]$$

zu Anfangswerten $u(x,0) = 0$ und homogenen Dirichlet-Randwerten $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$. Die exakte Lösung lautet $u(x,t) = (1 - \mathrm{e}^{-t}) \sin(x)$.




Im Zeitintervall $[0,T]$ werden mit einer konstanten Schrittweite $k$ die Approximationen $z_n(x)$ bei $t_n = nk$ für die Lösung $u(x,t_n)$ mit $n = 0,1,\ldots,\frac{T}{k}$ eingeführt. Es folgt das Zwei-Punkt-Randwertproblem

$$\frac{z_n(x) - z_{n-1}(x)}{k} - z_n''(x) = \sin(x),$$

$$z_n(0) = 0, \quad z_n(\pi) = 0$$

zu einer gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

**a)** Beweisen Sie, dass die Lösungen des Randwertproblems gegeben sind durch

$$z_n(x) = \left(1 - \frac{1}{(1+k)^n}\right) \sin(x).$$

**b)** Die Lösungen $z_n$ können zu linearer Interpolation in den Zeitintervallen $[t_{n-1}, t_n]$ verwendet werden. Es folgen Näherungen $u^k(x,t)$ von $u(x,t)$, welche Rothe-Funktionen genannt werden und für alle $t \in [0,T]$ definiert sind. Zeigen Sie, dass die Näherungen $u^k(x,t)$ punktweise für $x$ und $t$ gegen die exakte Lösung konvergieren falls $k \to 0$.

**Aufgabe 21 :** *Fehlerverstärkung bei Finite-Differenzen-Methode für Wellengleichung.*

Zur numerischen Lösung der Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$ wird ein Gitter $x_j = jh$, $t_n = nk$ mit Schrittweiten $h$ und $k$ in Ort bzw. Zeit eingeführt. Das Finite-Differenzen-Verfahren

$$U_j^{n+1} = -U_j^{n-1} + 2(1-r^2)U_j^n + r^2(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n)$$

mit $r = \frac{k}{h}$ liefert Näherungen $U_j^n \approx u(x_j, t_n)$.

Wir betrachten Anfangswerte $U_j^0 = 0$ für alle $j$, $U_0^1 = \varepsilon$ und $U_j^1 = 0$ für $j \neq 0$. Verwenden Sie diese Anfangswerte um die Ergebnisse $U_j^n$ für $j = -3, \ldots, 3$ und $n = 2, 3, 4$ zu berechnen. Dabei sollen die beiden Fälle $r^2 = 1$ und $r^2 = 2$ jeweils untersucht werden.

Wird der Anfangsfehler $\varepsilon$ mit der Zeit verstärkt oder gedämpft? Was folgern Sie für die Stabilität des Verfahrens?

*Hinweis*: In dieser Aufgabe sind folgende Tabellen zu vervollständigen.

| | $j=-3$ | $j=-2$ | $j=-1$ | $j=\pm 0$ | $j=+1$ | $j=+2$ | $j=+3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n=1$ | 0 | 0 | 0 | $\varepsilon$ | 0 | 0 | 0 |
| $n=2$ | | | | | | | |
| $n=3$ | | | | | | | |
| $n=4$ | | | | | | | |

| | $j=-3$ | $j=-2$ | $j=-1$ | $j=\pm 0$ | $j=+1$ | $j=+2$ | $j=+3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n=1$ | 0 | 0 | 0 | $\varepsilon$ | 0 | 0 | 0 |
| $n=2$ | | | | | | | |
| $n=3$ | | | | | | | |
| $n=4$ | | | | | | | |

**Aufgabe 22 :** *Implizites Verfahren für Wellengleichung.*

Für die Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$ betrachten wir das implizite Finite-Differenzen-Verfahren

$$U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1} = r^2 \left[U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1}\right]$$

mit $r = \frac{k}{h}$ für die Schrittweiten $k$ in der Zeit und $h$ im Ort.

**a)** Zeigen Sie, dass dieses Verfahren konsistent von Ordnung 1 für konstantes $r$ ist.

**b)** Beweisen Sie, dass das Verfahren stabil bezüglich des Kriteriums nach von-Neumann für beliebiges $r > 0$ ist.

**Hausaufgabe 20 :** *Linienmethode für spezielle Wärmeleitungsprobleme.*

Im folgenden ist stets mittels einer Linienmethode ein lineares Differentialgleichungssystem $y'(t) = By(t)$ für Näherungen $y_j(t) \approx u(x_j, t)$ mit $x_j = jh$ herzuleiten. Zweite Ableitungen sind wie üblich mit dem symmetrischen Differenzenquotienten zweiter Ordnung zu ersetzen.

**a)** Gegeben sei die Dgl. $u_t = u_{xx}$ mit den homogenen Neumann-Randbedingungen $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$. Diskretisieren Sie die Neumann-Bedingungen mit dem gewöhnlichen Differenzenquotienten. Geben Sie die Matrix $B$ an und zeigen Sie, dass diese negativ semidefinit und singulär ist.

**b)** Gegeben sei die Dgl. $u_t + bu_x = au_{xx}$ mit Konstanten $a > 0$ und $b \neq 0$ sowie homogenen Dirichlet-Randbedingungen $u(0, t) = u(1, t) = 0$. Ersetzen Sie die erste Ableitung mit einem symmetrischen Differenzenquotienten. Geben Sie die Matrix $B$ an und beweisen Sie, dass die Matrix negativ semidefinit für hinreichend kleine Schrittweite $h$ ist.

**Hausaufgabe 21 :** *Maxwell-Gleichungen als Wellengleichungen.*

Die Maxwell-Gleichungen beschreiben die klassische Elektrodynamik. Seien $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das elektrische Feld bzw. das magnetische Feld. Im Vakuum lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{div } E &= 0 && \text{(Gaußsches Gesetz)} \\ \text{div } B &= 0 && \text{(Gaußsches Gesetz für Magnetfelder)} \\ \text{rot } E &= -\frac{\partial B}{\partial t} && \text{(Maxwell-Faraday-Gleichung)} \\ \text{rot } B &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} && \text{(Ampèresches Gesetz)} \end{aligned}$$

mit der Permittivität $\varepsilon_0 > 0$ und der Permeabilität $\mu_0 > 0$. Die Lösungen $E$ und $B$ seien hinreichend oft stetig differenzierbar.

Aus diesem System partieller Differentialgleichungen sollen sechs unabhängige Wellengleichungen jeweils für die Komponenten des elektrischen Felds und des magnetischen Felds hergeleitet werden. Wenden Sie dazu zunächst den Rotationsoperator auf beiden Seiten der Maxwell-Faraday-Gleichung und dem Ampèreschen Gesetz an.

Bestätigen Sie, dass die Wellengeschwindigkeit in jeder der sechs entstehenden Wellengleichungen übereinstimmt und geben Sie den Wert an.

*Hinweis*: Für ein Skalarfeld $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kann der Gradient $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3})$ gebildet werden. Auf ein Vektorfeld $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kann der Divergenzoperator div $A = \nabla \cdot A$ und der Rotationsoperator rot $A = \nabla \times A$ angewendet werden. Es gilt die allgemeine Formel

$$\text{rot}(\text{rot } A) = \nabla(\text{div } A) - \Delta A,$$

wobei der Laplace-Operator $\Delta$ in jeder Komponente von $A = (A_1, A_2, A_3)$ separat verwendet wird.

**Hausaufgabe 22 :** *Neumann-Stabilität bei Dgl. erster Ordnung.*

Wir betrachten die partielle Differentialgleichung $u_t = u_x$ von erster Ordnung, welche einen hyperbolischen Typ besitzt. Die expliziten Finite-Differenzen-Methoden

$$\text{(i)} \quad \frac{1}{k}\Big[U_j^{n+1} - U_j^n\Big] = \frac{1}{h}\Big[U_{j+1}^n - U_j^n\Big] \qquad \text{(ii)} \quad \frac{1}{k}\Big[U_j^{n+1} - U_j^n\Big] = \frac{1}{h}\Big[U_j^n - U_{j-1}^n\Big]$$

mit Zeitschrittweite $k > 0$ und Ortschrittweite $h > 0$ sind offenbar konsistent (mit Ordnung 1). Sei $r = \frac{k}{h}$. Beweisen Sie folgende Aussagen über die Stabilität der Methoden laut dem Konzept nach von-Neumann.

**a)** Das Verfahren (i) ist stabil falls $r \leq 1$ gilt.

**b)** Das Verfahren (ii) ist instabil für alle $r > 0$.

**Abgabe der Hausaufgaben:** 12.1.2024