Gewöhnliche Differentialgleichungen

Volkmar Liebscher

Roland Pulch

Universität Greifswald

Wintersemester 2020/21

Version 16. September 2020

Zusammenfassung

Die Vorlesung gibt eine Einführung in die Mathematik gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Das Skript geht zurück auf die Veranstaltung von Prof. Volkmar Liebscher im Jahre 2007. Vielen Dank an Sybille Dühring für das Tippen des Skriptes. Diese Version enthält Modifikationen und Ergänzungen durch Prof. Roland Pulch.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Literaturempfehlungen

1. H. Heuser: „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ (5. Aufl.) Teubner 2006
2. B. Aulbach: „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ (2. Aufl)
   Spektrum 1997
3. O. Forster: „Analysis 2: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, gewöhnliche Differentialgleichungen“ (11. Aufl.) Springer Spektrum 2017
4. L. Grüne, O. Junge: „Gewöhnliche Differentialgleichungen: Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme“ (2. Aufl)
   Springer Spektrum 2016
5. M. Braun: „Differentialgleichungen und ihre Anwendungen“ (2. Aufl.)
   Springer 1991
6. W. Strampp, V. Ganzha: „Differentialgleichungen mit Mathematica“
   Vieweg 1995
7. A.D. Poljanin, V.F. Zajcev: „Sammlung gewöhnlicher Differentialgleichungen“ Thun 1996
8. K. Strehmel, R. Weiner, H. Podhaisky: „Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen: Nichtsteife, steife und differential-algebraische Gleichungen“ Vieweg & Teubner 2012

1.2 Zum Begriff

Motivation *Die erste Ableitung einer Funktion beschreibt die Änderungsgeschwindigkeit der Funktion, die 2. Ableitung die Beschleunigung. Oftmals ist es einfacher einen Zusammenhang zwischen der unabhängigen Variablen, deren Funktionswert und gewissen Ableitungen herzustellen, als die Funktion direkt zu bestimmen. Deshalb sind solche Zusammenhänge nützlich, um reale Sachverhalte mathematisch zu modellieren.*

Definition 1.1 *Eine gewöhnliche Differentialgleichung ist eine Gleichung der Form*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \tag{1.1}$$

wobei $n \in \mathbb{N},\ f : \Omega \to \mathbb{R},\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. n *heißt Ordnung der Differentialgleichung.*

Anmerkungen

1. *Dies ist einfach ein formaler Begriff.*
2. Ω *ist typischerweise eine Menge mit vorteilhaften Eigenschaften (z.B. zusammenhängend oder sogar konvex).*
3. *Es gibt auch den Begriff der impliziten Differentialgleichung:*

   $$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

   Dann heißt (1.1) *explizite Differentialgleichung.*

Definition 1.2 *Seien* $n \in \mathbb{N},\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1},\ f : \Omega \to \mathbb{R}$*, dann heißt* $y : I \to \mathbb{R},\ I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall, Lösung von* (1.1) *in* I*, falls das Folgende gilt:*

1. y *ist in* I n*-mal differenzierbar.*
2. *Für alle* $x \in I$ *ist* $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in \Omega$.
3. *für alle* $x \in I$ *gilt* $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$.

Anmerkungen *Das Intervall* I *ist Bestandteil des Lösungsbegriffs.*

1.3 Beispiele

Beispiel 1.1 *Für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachten wir die gewöhnliche Differentialgleichung*

$$y' = f(x). \tag{1.2}$$

Wir suchen also eine Stammfunktion zu f. Ist $x_0 \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$, so stellt

$$y(x) = c + \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t \tag{1.3}$$

eine Lösung zu (1.2) *dar, mit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Dies führt zu zwei interessanten Beobachtungen:

1. *Das Lösen einer Differentialgleichung hängt eng mit der Integration von Funktionen zusammen. Deshalb hat sich auch der Begriff „Integration einer Differentialgleichung“ für das Lösen derselbem eingebürgert.*
2. *Die Lösung einer Differentialgleichung ist selbst bei fixiertem Intervall I nicht eindeutig bestimmt.*

Beispiel 1.2 *Wir betrachten* (1.2) *für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{für } x \geq 0, \\ -1 & \textit{für } x < 0. \end{cases}$$

Dann ergibt (1.3) *mit $x_0 = 0,\ c = 0$*

$$y(x) = |x| = \begin{cases} x & \textit{für } x \geq 0, \\ -x & \textit{für } x < 0. \end{cases}$$

Dies ist im strengen Sinne von Definition 1.2 auf der vorherigen Seite keine Lösung von (1.2). *Das heißt:* Eine Differentialgleichung muß keine Lösung haben!

Beispiel 1.3

$$y' = -xy$$

Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y(x) = c\,\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}$ eine Lösung dieser Differentialgleichung.

$$\begin{aligned} y'(x) &= (c\,\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}})' = c\,(\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}})' = c\,\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\left(\frac{-x^2}{2}\right)' \\ &= c\,\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}(-x) = -xy(x) \end{aligned}$$

Beispiel 1.4 *$y'' = -y$ hat die (allgemeine) Lösung:*

$$y(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)\,.$$

Beispiel 1.5 *Eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit*

$$\frac{\partial^2 u(s,t)}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u(s,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{1.4}$$

heißt harmonische Funktion. (1.4) *ist keine gewöhnliche Differentialgleichung, sondern eine partielle Differentialgleichung.*

Definition 1.3 *Unter der Voraussetzung von Definition 1.2 auf Seite 4 heißt $y : I \to \mathbb{R}$ Lösung des Anfangswertproblems*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$
$$y(x_0) = a_0,\ y'(x_0) = a_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} \tag{1.5}$$

für $x_0 \in I,\ a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, falls y eine Lösung von (1.1) *ist und* (1.5) *gilt.*

Beispiel 1.6 *(siehe auch Bsp. 1.4)*

$$y'' = -y,$$
$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$
$$y(x) = \sin(x)$$

ist Lösung dieses Anfangswertproblems.

Beispiel 1.7 *Wir betrachten die Newtonsche Gleichung*

$$my'' = F(x, y, y'),$$

wobei m die Masse, y'' die Beschleunigung eines Massepunktes sowie F die auf ihn wirkende Kraft beschreibt.

Die Bahnkurve eines Teilchens löst das Anfangswertproblem mit $y(0) = y_0$, dem Startpunkt, und $y'(0) = v_0$, der Anfangsgeschwindigkeit.

Ein anschauliches Beispiel ist die Gleichung für die eingespannte Feder:

$$y'' = -ky$$

Das heißt, die Kraft ist proportional zur Auslenkung der Feder. Dies ist eigentlich Bsp. 1.6.

Definition 1.4 *Ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen wird durch eine Gleichung der Form*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

beschrieben, wobei $n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N},\ \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k$ *und* $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$. n *heißt Ordnung der Differentialgleichung,* k *Dimension.*

Anmerkungen *Es gibt analog auch Definition 1.2 auf Seite 4 und 1.3 auf der vorherigen Seite für Differentialgleichungssysteme. Die Ableitungen werden in diesem Zusammenhang komponentenweise verstanden*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_k'(x) \end{pmatrix}.$$

Beispiel 1.8 *Volterra-Lotka Räuber-Beute-Modell*

$$\begin{aligned} b' &= \alpha b - \beta r b \ \ \textit{Beute} \\ r' &= \gamma r b - \delta r \ \ \textit{Räuber} \end{aligned}$$

mit Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. *Zur Definition 1.4 passen*

$$n = 1, \quad k = 2$$

sowie

$$f\left(x, \begin{pmatrix} b \\ r \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha b - \beta r b \\ \gamma r b - \delta r \end{pmatrix}$$

Transformation 1.1 *(Differentialgleichung zu einem System von Differentialgleichung 1. Ordnung)*

Sei $y : I \to \mathbb{R}$ *Lösung der Differentialgleichung* $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ (1.1) *für* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. *Dann ist* $z : I \to \mathbb{R}^n$

$$z(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ f(x, z_1, \dots, z_n) \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Ist umgekehrt $z : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.6)*, so löst z_1* (1.1)*. Die Zuordnung $y \leftrightarrow z$ ist eineindeutig.*

Anmerkungen

1. *Dieses Verfahren ist wichtig, weil viele Softwaresysteme nur Differentialgleichungen 1. Ordnung lösen.*
2. *Das Verfahren funktioniert genau so gut für Differentialgleichungssysteme höherer Ordnung.*

Beispiel 1.9 *siehe Bsp. 1.4 auf Seite 6 und Bsp. 1.6 auf Seite 6.*

$$y'' = -y \ \text{ wird zu } z_1' = z_2,\ z_2' = -z_1$$

Definition 1.5 *Ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen im Sinne von Definition 1.4 auf der vorherigen Seite heißt autonom, falls f nicht von x abhängt.*

Anmerkungen *Dies bedeutet, dass die Dynamik des Systems nicht von der Zeit abhängt.*

Transformation 1.2 *Differentialgleichungssystem 1. Ordnung zu autonomes Differentialgleichungssystem 1.Ordnung*

Sei $y : I \to \mathbb{R}^k$ Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) \tag{1.7}$$

Dann ist $z : I \to \mathbb{R}^{k+1}$ mit

$$z(x) = \begin{pmatrix} x \\ y_1(x) \\ \vdots \\ y_k(x) \end{pmatrix}$$

Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{k+1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 \\ f\left(z_1, \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_{k+1} \end{pmatrix}\right) \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Löst $z : I \to \mathbb{R}^{k+1}$ *umgekehrt* (1.8)*, so ist*

$$y(x) = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ \vdots \\ z_{k+1}(x) \end{pmatrix}$$

Lösung von (1.7)*. Die Zuordnung* $y \leftrightarrow z$ *ist eineindeutig.*

Beispiel 1.10 *(siehe Bsp. 1.3 auf Seite 5)*

$$y' = -xy$$

Das äquivalente System erster Ordnung lautet

$$\begin{aligned} z_1' &= 1, \\ z_2' &= -z_1 z_2 \,. \end{aligned}$$

1.4 Offene Fragen

Welche Fragen bleiben offen?

1. Hat eine Differentialgleichung eine Lösung?
2. Ist die Lösung eines Anfangswertproblems eindeutig?
3. Hängt diese Lösung stetig von den Anfangswerten ab?
4. Wie erhält man eine Lösung?

Kapitel 2

Lösungsverfahren für eindimensionale Differentialgleichungen

Motivation *Um ein Gefühl für Differentialgleichungen zu bekommen, behandeln wir zunächst einige elementar lösbare Typen von Diferentialgleichungen 1. Ordnung.*

2.1 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Wir behandeln Anfangswertprobleme der Form

$$\begin{aligned} y' &= f(x)g(y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Rezept 2.1 *Wir schreiben*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x)g(y) \\ \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y &= f(x)\,\mathrm{d}x \\ \int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y &= \int f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Ist nun G eine Stammfunktion zu $\frac{1}{g}$ und F eine Stammfunktion zu f, dann gilt

$$\begin{aligned} G(y) &= F(x) + c \\ y &= G^{-1}(F(x) + c). \end{aligned}$$

Die Konstante c ergibt sich dann aus der Anfangsbedingung:

$$\begin{aligned} G(y_0) &= F(x_0) + c \\ c &= G(y_0) - F(x_0). \end{aligned}$$

Offene Fragen:

1. Was passiert für $g(y) = 0$, insbesondere wenn $g(y_0) = 0$?
2. Gibt es weitere Lösungen?

Satz 2.1 *Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle mit $x_0 \in I,\ y_0 \in J$ und $f : I \to \mathbb{R},\ g : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.*

1. *Ist $g(y_0) = 0$, dann hat das Anfangswertproblem* (2.1) *die Lösung*

$$y(x) = y_0 \quad \textit{für } x \in I\,.$$

2. *Ist $g(y_0) \neq 0$, so gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine Lösung $y :]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\to J$ von* (2.1).

Sei $G(z) = \int\limits_{y_0}^{z} \frac{1}{g(y)} \mathrm{d}y$. Dann ist G in einem offenen Intervoll $\tilde{J} \subseteq J$ mit $y_0 \in \tilde{J}$ invertierbar und jede Lösung $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R},\ \tilde{I} \subseteq]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ hat notwendig die Gestalt

$$\tilde{y}(x) = G^{-1}\left(\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t \right). \tag{2.2}$$

Anmerkungen *Im Fall 1. haben wir keine Eindeutigkeitsangabe, siehe dazu Beispiel Bsp. 2.3 auf Seite 17.*

Beweis:

1. Sei $y(x) = y_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &= 0 \\ f(x)g(y(x)) &= f(x)g(y_0) = 0 \\ y(x_0) &= y_0 \,. \end{aligned}$$

   Damit löst dieses y (2.1).

2. Es gilt $g(y_0) \neq 0$. Da g stetig ist, gibt es also ein $\delta > 0$, so dass $g(z) \neq 0$ für alle $z \in]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$.

   Folglich ist

$$G(z) = \int\limits_{y_0}^{z} \frac{1}{g(u)} \, \mathrm{d}u$$

   im Intervall $]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$ streng monoton. Dadurch ist das Bild

$$G(]y_0 - \delta, y_0 + \delta[) = \{G(y) \, : \, y_0 - \delta < y < y_0 + \delta\} = K$$

   ein offenes Intervall und G ist auf K invertierbar mit $G^{-1}(0) = y_0$. Da 0 ein innerer Punkt von K ist, gibt ein $\epsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t \in K \qquad \text{für alle } \; x \in]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\,.$$

   Wir definieren nun $y :]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\to \mathbb{R}$ durch (2.2), d.h.

$$y(x) = G^{-1}\Big(\int\limits_{x_0}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t \Big) \,. \tag{2.3}$$

   Wir erhalten

$$y(x_0) = G^{-1}\Big(\int\limits_{x_0}^{x_0} f(t)\mathrm{d}t \Big) = G^{-1}(0) = y_0 \,.$$

   Deswegen erhalten wir aus (2.3)

$$G(y(x)) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t \,.$$

Da $G :]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\to K$ differenzierbar ist, gilt nach der Kettenregel

$$(G(y(x)))' = G'(y(x))y'(x) = \frac{1}{g(y(x))}\, y'(x).$$

Andererseits ist mit obiger Formel

$$(G(y(x)))' = \Big(\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t\Big)' = f(x).$$

Zusammen folgt

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) = f(x)g(y(x))$$

für alle $x \in]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$. Damit löst y das Anfangswertproblem (2.1).

Sei nun

$$\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{I} =]x_0 - \mu, x_0 + \eta[$$

mit $0 < \mu, \eta \leq \epsilon$ eine Lösung von (2.1). Wegen $g(\tilde{y}(x_0)) = g(y_0) \neq 0$ und der Stetigkeit von g sowie $\tilde{y}$ gibt es wieder ein $\theta > 0$ mit $g(\tilde{y}(x)) \neq 0$ für alle $x \in]x_0 - \theta, x_0 + \theta[$. Wir setzen $\theta \leq \epsilon$ voraus.

Oben wurde bereits $(G(y(x)))' = f(x)$ gezeigt. Ebenso folgt hier

$$(G(\tilde{y}(x)))' = \Big(\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t\Big)' = f(x).$$

Gleichsetzen liefert $(G(y(x)))' = (G(\tilde{y}(x)))'$. Da die Anfangsbedingung übereinstimmt, d.h. $G(y(x_0)) = G(\tilde{y}(x_0))$, gilt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sogar

$$G(y(x)) = G(\tilde{y}(x)) \qquad \text{für alle } \ x \in]x_0 - \theta, x_0 + \theta[.$$

Anwendung der Umkehrfunktion zeigt somit $y(x) = \tilde{y}(x)$ für alle $x \in]x_0 - \theta, x_0 + \theta[$.

Angenommen es gilt $\tilde{y}(x) \neq y(x)$ für ein x mit $x_0 < x < x_0 + \eta$. Dann setzen wir

$$s = \inf\{x \in (x_0, x_0 + \eta) \ : \ y(x) \neq \tilde{y}(x)\}.$$

Die Existenz dieses Infimums ist sichergestellt mit $x_0 + \theta \leq s < x_0 + \varepsilon$. Es ist $y(x) = \tilde{y}(x)$ für alle $x \in [x_0, x_0 + s)$. Die Stetigkeit der beteiligten Funktionen garantiert $y(s) = \tilde{y}(s)$. In jeder Umgebung von s gibt es Punkte x

mit $y(x) \neq \tilde{y}(x)$. Wenn wir jedoch das Anfangswertproblem statt bei x_0 bei $x = s$ betrachten, dann erhalten wir wieder ein offenes Intervall um diesen Anfangswert auf dem y und $\tilde{y}$ übereinstimmen. Durch diesen Widerspruch gilt $y(x) = \tilde{y}(x)$ für alle $x \in [x_0, x_0 + \eta)$.

Analog können wir bei $\tilde{y}(x) \neq y(x)$ für ein x mit $x_0 - \mu < x < x_0$ argumentieren. Es folgt $y(x) = \tilde{y}(x)$ für alle $x \in (x_0 - \mu, x_0]$.

Dadurch ist der Beweis vollständig geführt. ■

Beispiel 2.1

$$\begin{aligned} y' &= \lambda y - \mu y^2 \\ \lambda,&\mu > 0 \\ y(0) &= y_0 > 0 \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung heißt logistische Differentialgleichung oder Pearl-Verhulst Gleichung.

Zur Berechnung der Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\lambda y - \mu y^2} &= \mathrm{d}x \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{\lambda y - \mu y^2} &= \int \mathrm{d}x = x + c \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \lambda y - \mu y^2 &= y(\lambda - \mu y) \\ \frac{1}{\lambda y - \mu y^2} &= \frac{A}{y} + \frac{B}{\lambda - \mu y} \\ 1 &= A(\lambda - \mu y) + By \\ &= A\lambda + (B - \mu A)y \\ \Rightarrow A &= \frac{1}{\lambda} \\ B &= \frac{\mu}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda y - \mu y^2} &= \frac{1}{\lambda y} + \frac{1}{\lambda(\frac{\lambda}{\mu} - y)} \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{\lambda y - \mu y^2} &= \frac{1}{\lambda} \ln |y| - \frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{\lambda}{\mu} - y \right| + c \end{aligned}$$

Folglich muss gelten:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda}\ln|y| - \frac{1}{\lambda}\ln\left|y - \frac{\lambda}{\mu}\right| &= x + c \\
\ln\frac{|y|}{|y - \frac{\lambda}{\mu}|} &= \lambda x + c \\
\left|\frac{y}{y - \frac{\lambda}{\mu}}\right| &= \mathrm{e}^{\lambda x + c} \\
\frac{y}{y - \frac{\lambda}{\mu}} &= C\,\mathrm{e}^{\lambda x} \textit{ für ein } C \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\
y &= C\,\mathrm{e}^{\lambda x}(y - \tfrac{\lambda}{\mu}) \\
&= C\,\mathrm{e}^{\lambda x}y - \tfrac{\lambda}{\mu}C\,\mathrm{e}^{\lambda x} \\
\Rightarrow \qquad \frac{\lambda}{\mu}C\,\mathrm{e}^{\lambda x} &= y(C\,\mathrm{e}^{\lambda x} - 1) \\
y &= \frac{\frac{\lambda}{\mu}C\,\mathrm{e}^{\lambda x}}{C\,\mathrm{e}^{\lambda x} - 1}
\end{aligned}$$

Wir passen die Anfangswerte an:

$$\begin{aligned}
y(0) &= y_0 \\
\frac{y_0}{y_0 - \frac{\lambda}{\mu}} &= C\,\mathrm{e}^{\lambda\cdot 0} = C \\
y(x) &= \frac{\frac{\lambda}{\mu}\frac{y_0}{y_0 - \frac{\lambda}{\mu}}\mathrm{e}^{\lambda x}}{\frac{y_0}{y_0 - \frac{\lambda}{\mu}}\mathrm{e}^{\lambda x} - 1} \\
&= \frac{\frac{\lambda}{\mu}y_0\mathrm{e}^{\lambda x}}{y_0\mathrm{e}^{\lambda x} + \frac{\lambda}{\mu} - y_0} \\
&= \frac{\frac{\lambda}{\mu}y_0}{y_0 + (\frac{\lambda}{\mu} - y_0)\mathrm{e}^{-\lambda x}}
\end{aligned}$$

Für $x \to \infty$ *gilt* $\mathrm{e}^{-\lambda x} \to 0$ *und* $y(x) \to \frac{\frac{\lambda}{\mu}y_0}{y_0} = \frac{\lambda}{\mu}$*. Die Lösung ist in Abb. 2.1 auf der nächsten Seite bildlich dargestellt.*

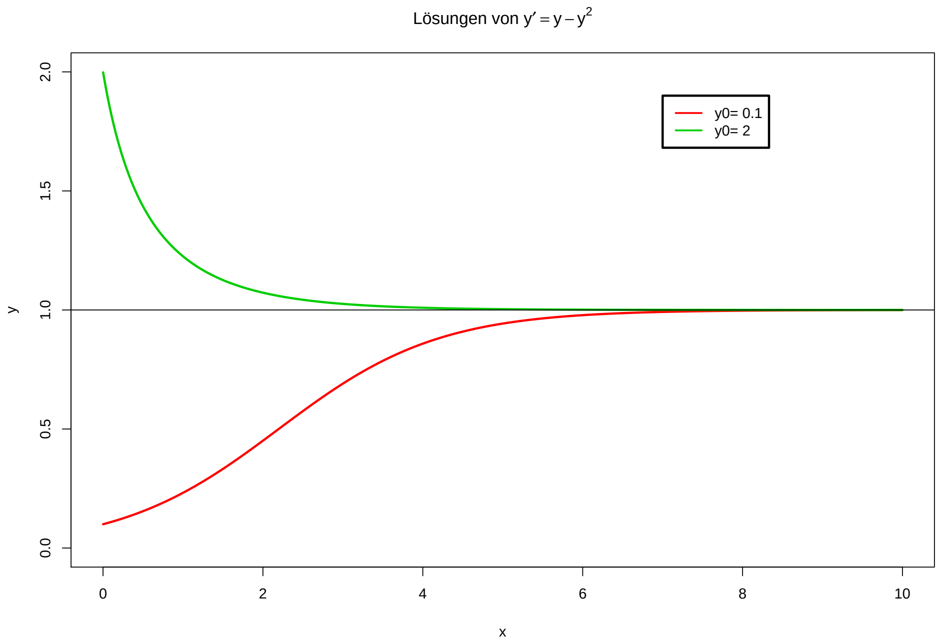


Abbildung 2.1: Lösungen von $y' = y - y^2$ im Intervall $[0, 10]$

Beispiel 2.2

$$
\begin{aligned}
y' &= -\frac{x}{y} \\
y\,\mathrm{d}y &= -x\,\mathrm{d}x \\
\frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + c \\
\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} &= c \\
y^2 + x^2 &= c = y_0^2 + x_0^2 \\
y &= \pm\sqrt{y_0^2 + x_0^2 - x^2}, \quad x \in \left[-\sqrt{y_0^2 + x_0^2}, +\sqrt{y_0^2 + x_0^2}\right] \\
y(x_0) &= y_0 \\
\Rightarrow y_0 &= \pm\sqrt{y_0^2} \\
&= \pm|y_0| \\
\textit{also} \quad y(x) &= \operatorname{sign}(y_0) \cdot \sqrt{y_0^2 + x_0^2 - x^2}\,.
\end{aligned}
$$

Für $y_0 = 0$ ist die rechte Seite der Differentialgleichung nicht erklärt.
Das Richtungsfeld ist in Abb. 2.2 auf der nächsten Seite zu sehen.

Beispiel 2.3

$$
\begin{aligned}
y' &= 3 \cdot \sqrt[3]{y^2} \\
y(0) &= 0
\end{aligned}
$$

Das Richtungsfeld ist in Abb. 2.3 auf Seite 19, eine Lösung in Abb. 2.4 auf Seite 20 zu sehen.

Sowohl $y(x) \equiv 0$ als auch $y(x) = x^3$ lösen die Differentialgleichung.

1. *ist klar*
2.

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= 3x^2 \\
&= 3\sqrt[3]{x^6} \\
&= 3\sqrt[3]{y^2} \\
&\Rightarrow \textit{mehr als eine Lösung}
\end{aligned}
$$

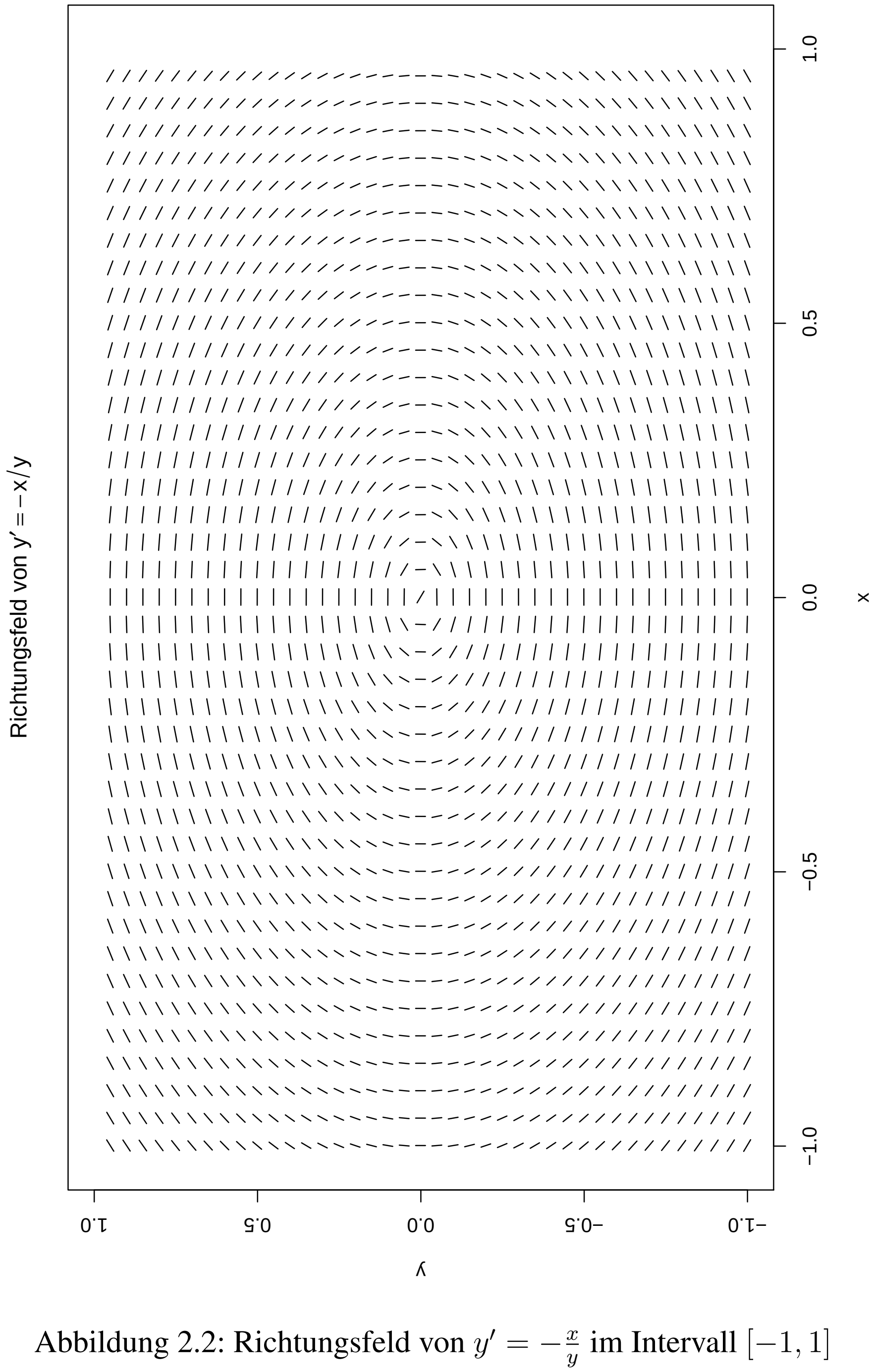


Abbildung 2.2: Richtungsfeld von $y' = -\frac{x}{y}$ im Intervall $[-1, 1]$

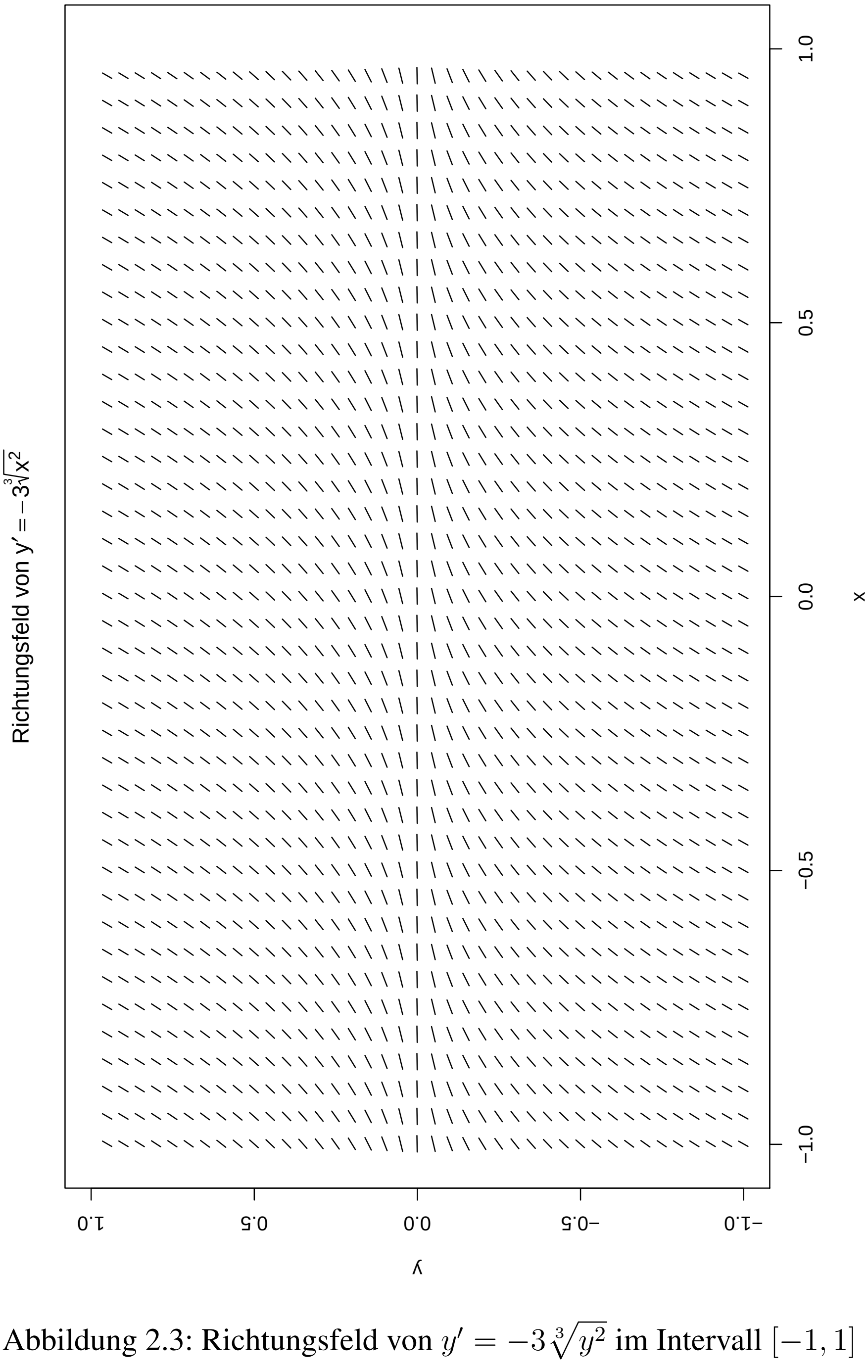


Abbildung 2.3: Richtungsfeld von $y' = -3\sqrt[3]{y^2}$ im Intervall $[-1, 1]$

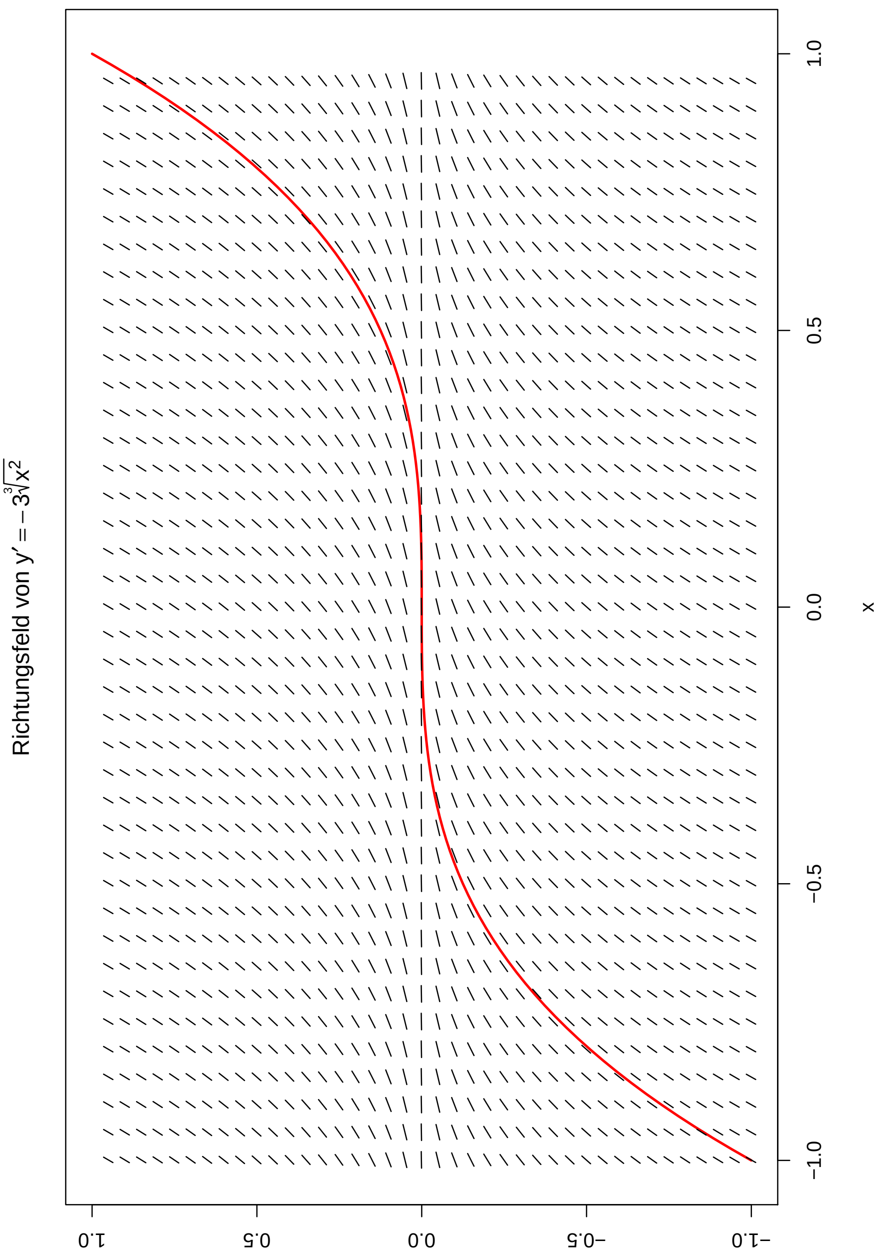


Abbildung 2.4: Richtungsfeld von $y' = -3\sqrt[3]{y^2}$ im Intervall $[-1, 1]$ und eine Lösung (rote Kurve)

Für $y(x_0) \neq 0$ ist dieses Rezept problemlos durchführbar.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{3\sqrt[3]{y^2}} &= 1\,\mathrm{d}x \\ \int \frac{1}{3}|y|^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}y &= x + c \\ \operatorname{sign}(y)\,|y|^{\frac{1}{3}} &= x + c \\ y &= \pm(c+x)^3\end{aligned}$$

Durch „Zusammenstecken" bekommen wir eine mehrdimensionale Menge an Lösungen.
Folgerung: Eine Differentialgleichung muss keine eindeutige Lösung haben.

2.2 Homogene Differentialgleichungen

Homogene Differentialgleichungen sind Gleichungen der Form

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.4}$$

mit den Anfangswerten

$$y(x_0) = y_0,\ x_0 \neq 0.$$

Transformation 2.1 *Homogene Differentialgleichung wird umgeformt zu Differentialgleichung mit getrennten Variablen.*

Sei y Lösung von (2.4). *Dann löst*

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}$$

$$z' = \frac{1}{x}(h(z) - z)\,. \tag{2.5}$$

Die Zuordnung $z \leftrightarrow y$ ist eineindeutig.

Satz 2.2 *Die Transformation 2.1 ist korrekt.*

Beweis:

Sei y Lösung von (2.4). Nach der Quotientenregel gilt dann:

$$\begin{aligned} z'(x) = \left(\frac{y(x)}{x}\right)' &= \frac{y'(x)x - y(x)}{x^2} \\ &= \frac{h\left(\frac{y(x)}{x}\right)}{x} - \frac{\frac{y(x)}{x}}{x} \\ &= \frac{1}{x}\left(h\left(\frac{y(x)}{x}\right) - \frac{y(x)}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x}(h(z(x)) - z(x)) \end{aligned}$$

Nun sei umgekehrt z Lösung von (2.5). Wir finden dann mit der Produktregel:

$$\begin{aligned} y'(x) = (xz(x))' &= z(x) + xz'(x) \\ &= z(x) + h(z(x)) - z(x) \\ &= h(z(x)) \\ &= h\left(\frac{y(x)}{x}\right) \end{aligned}$$

Dadurch ist die Behauptung gezeigt. ■

Beispiel 2.4

$$\begin{aligned} y' &= 1 + \frac{y}{x} \\ y(1) &= y_0 \end{aligned}$$

Transformation 2.1 auf der vorherigen Seite:

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{x}(1 + z - z) \\ &= \frac{1}{x} \\ z(x) &= \ln|x| + c \\ y(x) &= xz(x) \\ &= x\ln|x| + cx \end{aligned}$$

wegen $x_0 > 0$ können wir nur Lösungen für $x \in]0, \infty[$ suchen.

$$y(x) = \ln x + cx$$

Anfangswert einsetzen

$$\begin{aligned} y_0 &= y(1) \\ &= \ln 1 + c \\ &= c \\ y(x) &= x \ln x + y_0 x \end{aligned}$$

Die Lösungen sind in Abb. 2.5 auf der nächsten Seite zu sehen.

2.3 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wie betrachten nun Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} y' &= f(x)y + h(x) \qquad (2.6) \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Differentialgleichungen dieses Typs heißen auch lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung. Linear, weil die rechte Seite für feste x eine lineare Funktion in y ist.

Beispiel 2.5

$$\begin{aligned} y' &= f(x)y \qquad (2.7) \\ y(x_0) &= y_0\,, \end{aligned}$$

das heißt $h \equiv 0$ verschwindet in Gleichung (2.6). (2.7) *ist eine Gleichung mit getrennten Variablen. Wir wenden Rezept 2.1 auf Seite 10 an.*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{y} &= f(x)\,\mathrm{d}x \\ \ln|y| &= F(x) + c \\ y(x) &= c\,\mathrm{e}^{F(x)} \qquad \textit{für ein } c \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \end{aligned}$$

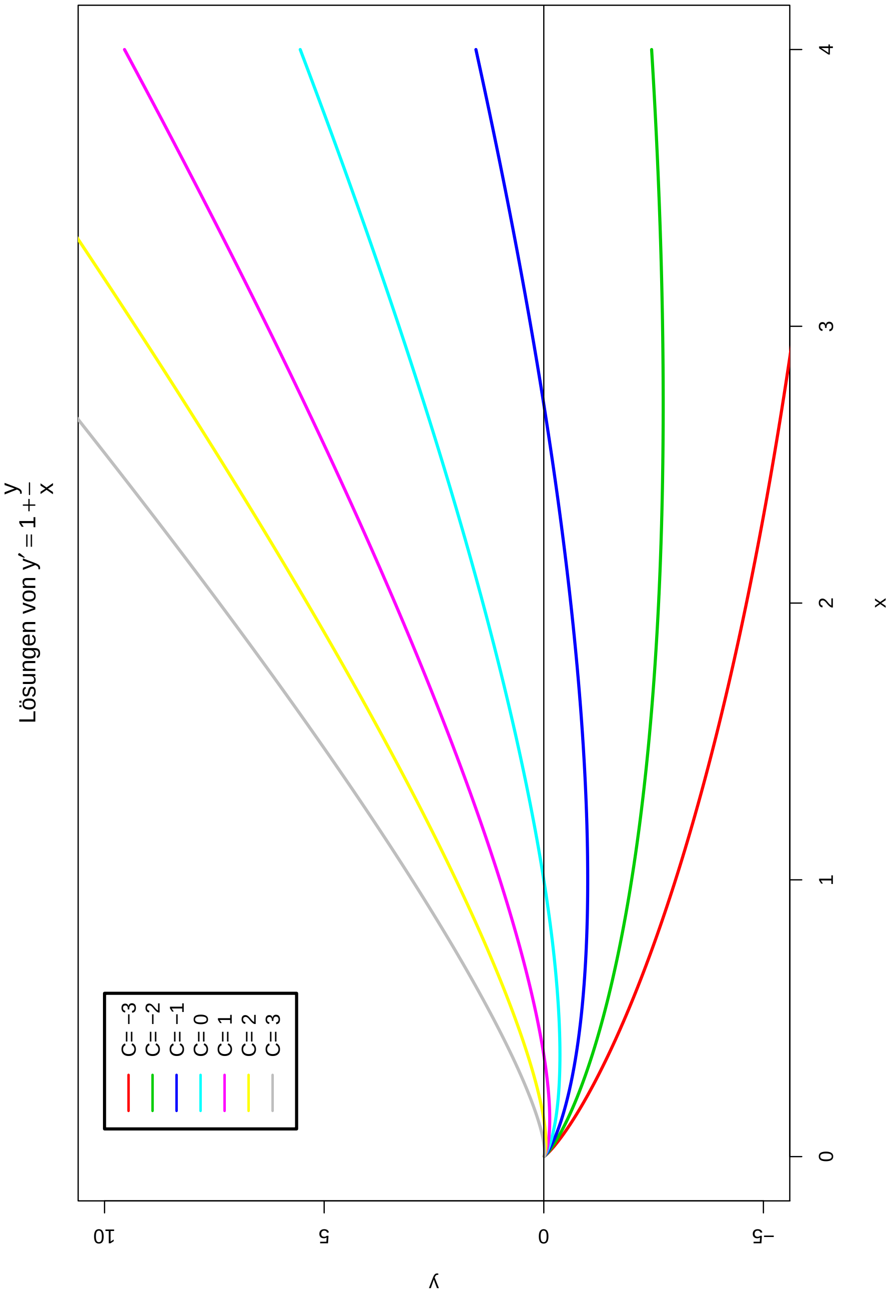


Abbildung 2.5: Lösungen von $y' = 1 + \frac{y}{x}$ im Intervall $[0, 4]$

Rezept 2.2 *Variation der Konstanten, Joseph Lowis Lagrange*

1. *Schritt: Anstelle von* (2.6) *lösen wir zunächst* (2.7), *d.h.*

$$y(x) = c\mathrm{e}^{F(x)} \tag{2.8}$$

2. *Schritt: Wir machen den Ansatz, dass* c *in* (2.8) *eine Funktion von* x *ist:*

$$\begin{aligned} y(x) &= c(x)\mathrm{e}^{F(x)} \\ y'(x) &= c'(x)\mathrm{e}^{F(x)} + c(x)\mathrm{e}^{F(x)}F'(x) \\ &= c'(x)\mathrm{e}^{F(x)} + c(x)\mathrm{e}^{F(x)}f(x) \\ f(x)y(x) + h(x) &= f(x)c(x)\mathrm{e}^{F(x)} + h(x) \end{aligned}$$

Damit erfüllt y *die Differentialgleichung* (2.6) *genau dann, wenn*

$$\begin{aligned} c'(x)\mathrm{e}^{F(x)} &= h(x) \\ c'(x) &= h(x)\mathrm{e}^{-F(x)} \\ c(x) &= \int h(x)\mathrm{e}^{-F(x)}\,\mathrm{d}x + c, \end{aligned}$$

Hinweis: Man merke sich die Rechenschritte, nicht die Schlussformel.

3. *Schritt: Anfangswerte:*

$$\begin{aligned} y(x_0) &= c(x_0)\mathrm{e}^{F(x_0)} \\ c(x) &= \int\limits_{x_0}^{x} h(u)\mathrm{e}^{F(u)}\,\mathrm{d}u + c \\ c(x_0) &= c \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} y(x_0) = y_0 &= c\mathrm{e}^{F(x_0)} \\ c &= y_0\mathrm{e}^{-F(x_0)} \\ y(x) &= \left(\int\limits_{x_0}^{x} h(u)\mathrm{e}^{-F(u)}\,\mathrm{d}u + y_0\mathrm{e}^{-F(x_0)}\right)\mathrm{e}^{F(x)} \end{aligned}$$

speziell

$$\begin{aligned} & h \equiv 0 \\ \Rightarrow \quad & y(x) = y_0\,\mathrm{e}^{F(x)-F(x_0)}. \end{aligned}$$

Beispiel 2.6

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x} - x \\ y(1) &= 1 \\ f(x) &= \frac{1}{x} \\ h(x) &= -x \end{aligned}$$

1. *Homogene lineare Differentialgleichung lösen:*

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x} \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \ln|y| &= \ln|x| + c \\ y &= \pm c \cdot |x| \end{aligned}$$

Wegen der Differenzierbarkeit von y gilt also $y(x) = cx$ mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

2. *Ansatz:*

$$\begin{aligned} y(x) &= c(x)x \\ y'(x) &= c'(x)x + c(x) \\ \frac{y(x)}{x} - x &= \frac{c(x)x}{x} - x \\ &= c(x) - x \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} c'(x)x &= -x \\ c'(x) &= -1 \\ c(x) &= -x + c. \end{aligned}$$

3. *Einsetzen der Anfangswerte:*

$$\begin{aligned} y(x) &= c(x)x \\ &= (-x + c)x \\ &= -x^2 + cx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(1) &= -1 + c \cdot 1 \\ &= c - 1 \\ \Rightarrow c &= 2 \\ y(x) &= -x^2 + 2x \end{aligned}$$

Da die rechte Seite der Differentialgleichung für $x = 0$ nicht erklärt ist, ist die Lösung des Anfangswertproblems nur auf $]0, \infty[$ gültig.

2.4 Bernoulli-Differentialgleichung

Diese Differentialgleichungen haben die Gestalt:

$$y' = f(x)y + h(x)y^k \tag{2.9}$$

für ein $k \in \mathbb{R}$. Wir können zwei Spezialfälle lösen:

1. $k = 1$: lineare Differentialgleichung 1.Ordnung (getrennte Variablen)
2. $k = 0$: lineare Differentialgleichung 1.Ordnung (allerdings ohne getrennte Variablen)

Transformation 2.2 *Bernoullische Differentialgleichung zu linearer Differentialgleichung 1.Ordnung im Fall $k \neq 1$.*

Sei $y : I \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ Lösung von (2.9)*. Dann ist*

$$z : I \to \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad z(x) = y(x)^{1-k},$$

Lösung der Differentialgleichung

$$z' = (1-k)(f(x)z + h(x)) \tag{2.10}$$

Ist umgekehrt $z : I \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ eine Lösung von (2.10)*, so löst*

$$y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-k}}$$

die Differentialgleichung (2.9)*.*

Satz 2.3 *Die Transformation 2.2 ist korrekt.*

Beweis:

Die Kettenregel ergibt

$$\begin{aligned}
z'(x) &= (y(x)^{1-k})' \\
&= (1-k)y(x)^{1-k-1}y'(x) \\
&= (1-k)\frac{1}{y(x)^k}(f(x)y(x) + h(x)y(x)^k) \\
&= (1-k)(f(x)y(x)^{1-k} + h(x)) \\
&= (1-k)(f(x)z(x) + h(x)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'(x) &= (z(x)^{\frac{1}{1-k}})' \\
&= \frac{1}{1-k}z(x)^{\frac{1}{1-k}-1}z'(x) \\
&= \frac{1}{1-k}z(x)^{\frac{1-1+k}{1-k}}(1-k)(f(x)z(x) + h(x)) \\
&= y(x)^k(f(x)y(x)^{1-k} + h(x)) \\
&= f(x)y(x) + h(x)y(x)^k.
\end{aligned}$$

Dadurch ist die Lösungseigenschaft nachgewiesen. ■

Beispiel 2.7

$$\begin{aligned}
y' &= -y + x\sqrt{y} \\
\textit{mit } \; y(x_0) &= y_0 > 0
\end{aligned}$$

1. *Differentialgleichung für z aufstellen:*

$$\begin{aligned}
k &= \frac{1}{2}, \quad f(x) = -1, \quad h(x) = x \\
z(x) &= y(x)^{1-\frac{1}{2}} \\
&= y(x)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{y(x)} \\
\textit{Wir finden } \; z' &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)(-z + x) \\
&= -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}x
\end{aligned}$$

2. Homogene lineare Differentialgleichung lösen:

$$\begin{aligned} z' &= -\frac{1}{2}z \\ \int \frac{\mathrm{d}z}{z} &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x \\ \ln|z| &= -\frac{x}{2} + c \\ |z| &= \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}+c} \\ z &= c\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

3. Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned} z(x) &= c(x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \\ z'(x) &= c'(x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + c(x)\left(-\tfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \\ -\frac{1}{2}z(x) + \frac{1}{2}x &= -\frac{1}{2}c(x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad c'(x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} &= \frac{1}{2}x \\ c'(x) &= \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \\ c(x) &= \int \frac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{2}2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \int \frac{1}{2}2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + c \\ &= (x-2)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + c \end{aligned}$$

4. *Rückeinsetzen und Anfangswerte anpassen:*

$$\begin{aligned}
z(x) &= c(x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \\
&= \left((x-2)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + c\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \\
&= (x-2)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + c\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \\
&= x - 2 + c\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \\
z(x_0) &= \sqrt{y(x_0)} \\
&= \sqrt{y_0} \\
\textit{und}\ \ z(x_0) &= x_0 - 2 + c\,\mathrm{e}^{-\frac{x_0}{2}} \\
c &= \mathrm{e}^{\frac{x_0}{2}}\,(\sqrt{y_0} - x_0 + 2) \\
z(x) &= x - 2 + \mathrm{e}^{\frac{x_0}{2}}\,(\sqrt{y_0} - x_0 + 2)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \\
y(x) &= z(x)^2 \\
&= \left(x - 2 + (\sqrt{y_0} - x_0 + 2)\mathrm{e}^{-\frac{x-x_0}{2}}\right)^2 .
\end{aligned}$$

2.5 Riccati-Differetialgleichungen

Wir betrachten Differntialgleichungen der Form

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)\,. \tag{2.11}$$

Dies ist die allgemeine quadratische Differentialgleichung 1. Ordnung.

Spezialfälle:

1. Falls $h \equiv 0$, dann haben wir wieder eine Bernoullische Differentialgleichung vom vorigen Abschnitt (Exponent $k = 2$).
2. Falls $f \equiv 0$, dann haben wir eine lineare Differentialgleichung.
3. Falls $g \equiv 0$ und $h \equiv 0$, dann liegt eine Differentialgleichung in getrennten Veränderlichen vor.

Im Allgemeinen gibt es keine geschlossene analytische Darstellung der Lösungen von (2.11). Es hilft aber enorm, wenn wir eine Lösung raten können.

Transformation 2.3 *Riccatische Differentialgleichung + eine Lösung zu Bernoullische Differentialgleichung*

Seien $y, \bar{y} : I \to \mathbb{R}$ Lösungen von (2.11)*. Dann löst die Differenzfunktion $z : I \to \mathbb{R},\ z(x) = y(x) - \bar{y}(x)$ die Differentialgleichung*

$$z' = (2f(x)\bar{y}(x) + g(x))z + f(x)z^2 \tag{2.12}$$

Lösen umgekehrt $z : I \to \mathbb{R}$ (2.12) *und $\bar{y} : I \to \mathbb{R}$* (2.11)*, so löst die Summe $y : I \to \mathbb{R},\ y(x) = \bar{y}(x) + z(x)$ auch* (2.11).

Anmerkungen *Das Verfahren kann man also so beschreiben: Eine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung und alle Lösungen der Bernoullischen Differentialgleichung ergeben alle Lösungen der Riccatischen Differentialgleichung.*

Satz 2.4 *Die Transformation 2.3 auf der vorherigen Seite ist korrekt.*

Beweis:

Seien $y, \bar{y} : I \to \mathbb{R}$ Lösungen von (2.11) und $z = y - \bar{y}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z'(x) &= y'(x) - \bar{y}'(x) \\ &= f(x)y(x)^2 + g(x)y(x) + h(x) - f(x)\bar{y}(x)^2 - g(x)\bar{y}(x) - h(x) \\ &= f(x)(y(x)^2 - \bar{y}(x)^2) + g(x)(y(x) - \bar{y}(x)) \\ &= (y(x) - \bar{y}(x))(f(x)(y(x) + \bar{y}(x)) + g(x)) \\ &= z(x)(f(x)(z(x) + 2\bar{y}(x)) + g(x)) \\ &= f(x)z(x)^2 + (2f(x)\bar{y}(x) + g(x))z(x). \end{aligned}$$

Die Umkehrung verläuft analog. ■

Beispiel 2.8

$$y' = -y^2 + y - \frac{1}{x} \qquad y(1) = 2$$

1. *Raten einer Lösung der Riccati-Dgl.:*

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) &= \frac{1}{x} \quad \textit{ist spezielle Lösung} \\ \bar{y}(x)' &= -\frac{1}{x^2} \\ -\bar{y}(x)^2 + \bar{y}(x) - \frac{1}{x} &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

2. *Transformation 2.3 auf Seite 30 :*

$$\begin{aligned} z(x) &= y(x) - \frac{1}{x} \quad \textit{führt auf} \quad (f(x) = -1, g(x) = 1) \\ z' &= \Big(2(-1)\frac{1}{x} + 1\Big)z + (-1)z^2 \\ &= \Big(1 - \frac{2}{x}\Big)z - z^2 \end{aligned}$$

3. *Bernoulli-Dgl. lösen:*

$$\begin{aligned} k &= 2 \\ \Rightarrow u(x) &= z(x)^{1-2} = \frac{1}{z(x)} \quad \textit{führt auf} \\ u' &= (1-2)\Big(\Big(1 - \frac{2}{x}\Big)u - 1\Big) \\ &= -\Big(1 - \frac{2}{x}\Big)u + 1 \end{aligned}$$

4. *Homogene lineare Dgl. lösen:*

$$\begin{aligned} u' &= -\Big(1 - \frac{2}{x}\Big)u \\ \int \frac{\mathrm{d}u}{u} &= \int \frac{2}{x} - 1 \,\mathrm{d}x \\ \ln|u| &= 2\ln|x| - x + c \\ |u| &= cx^2\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Wegen der Anfangsbedingung $x_0 > 0,\ y_0 > 1$ *also auch* $u(x_0) = \frac{1}{y_0 - \frac{1}{x_0}} = 1 > 0$ *können wir* $u(x) = cx^2\mathrm{e}^{-x}$ *annehmen.*

5. *Variation der Konstanten:*

$$\begin{aligned} u(x) &= c(x)x^2\mathrm{e}^{-x} \\ u'(x) &= c'(x)x^2\mathrm{e}^{-x} + c(x)(2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x}) \\ \left(-1 - \tfrac{2}{x}\right)u(x) + 1 &= \left(-1 - \tfrac{2}{x}\right)c(x)x^2\mathrm{e}^{-x} + 1 \\ &= c(x)(2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x}) + 1 \end{aligned}$$

Wir finden $c'(x)x^2\mathrm{e}^{-x} = 1$

$$c'(x) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad c(x) = \int \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x\,.$$

Dieses Integral lässt sich nicht geschlossen lösen. Immerhin hilft diese Darstellung eventuell bei der numerischen Lösung.

Beispiel 2.9

$$\begin{aligned} y' &= -y^2 + y + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \\ y(1) &= 2 \end{aligned}$$

Wir haben eine Riccatische Differentialgleichung mit

$$\begin{aligned} f(x) &= -1 \\ g(x) &= 1 \\ h(x) &= \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

1. *Raten einer Lösung der Riccati-Dgl.:*

$$\bar{y}(x) = -\frac{1}{x} \text{ ist eine Lösung}.$$

2. *Transformation 2.3 auf Seite 30 :*

$$\begin{aligned} z(x) &= y(x) + \frac{1}{x} \\ &\text{führt auf Transformation 2.3} \\ z' &= \Big(\frac{2}{x} + 1\Big) z - z^2 \end{aligned}$$

3. *Bernoulli-Dgl. lösen:*

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{z(x)} \quad \text{führt nach Transformation 2.2 auf} \\ u' &= -\Big(\frac{2}{x} + 1\Big) u + 1\,. \end{aligned}$$

4. *Homogene lineare Dgl. lösen:*

$$\begin{aligned} u' &= -\Big(\frac{2}{x} + 1\Big) u \\ \int \frac{\mathrm{d}u}{u} &= \int -\frac{2}{x} - 1 \,\mathrm{d}x \\ \ln|u| &= -2\ln|x| - x + c \\ u(x) &= c\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-x}\,. \end{aligned}$$

5. Variation der Konstanten

$$\begin{aligned}
u(x) &= c(x)\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-x} \\
u'(x) &= \frac{c'(x)}{x^2}\mathrm{e}^{-x} + c(x)\Big(-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}\Big)\mathrm{e}^{-x} \\
-\Big(\frac{2}{x}+1\Big)u(x)+1 &= c(x)\Big(-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}\Big)\mathrm{e}^{-x}+1 \\
\textit{Damit gilt}\quad \frac{c'(x)}{x^2}\mathrm{e}^{-x} &= 1 \\
c'(x) &= x^2\mathrm{e}^x \\
c(x) &= \int x^2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\
&= x^2\mathrm{e}^x - \int 2x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\
&= x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + \int 2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\
&= (x^2-2x+2)\mathrm{e}^x + c.
\end{aligned}$$

6. Rückeinsetzen

$$\begin{aligned}
u(x) &= c(x)\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-x} \\
&= \big((x^2-2x+2)\mathrm{e}^x+c\big)\,\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-x} \\
z(x) &= \frac{1}{u(x)} \\
&= \frac{x^2\mathrm{e}^x}{(x^2-2x+2)\mathrm{e}^x+c} \\
y(x) &= z(x)-\frac{1}{x} \\
&= \frac{x^2\mathrm{e}^x}{(x^2-2x+2)\mathrm{e}^x+c}-\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

7. *Anfangswert für Bestimmung der Konstante*

$$u(1) = \frac{1}{z(1)} = \frac{1}{y(1)+1} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$u(1) = (\mathrm{e}^1 \cdot 1 + c) \cdot \frac{1}{1^2}\mathrm{e}^{-1} = 1 + c\,\mathrm{e}^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + c\,\mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$c = -\frac{2\mathrm{e}}{3}$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(x) = \frac{x^2\mathrm{e}^x}{(x^2-2x+2)\mathrm{e}^x - \frac{2}{3}\mathrm{e}} - \frac{1}{x}$$

Transformation 2.4 *lineare Differentialgleichung 2.Ordnung zu Riccatische Differentialgleichungen*

Löst $y : I \to]0,\infty[$ *die Differentialgleichung*

$$y'' = f(x)y' + g(x)y,$$

so löst $z(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}$ *die Differentialgleichung* (2.12).

$$z' = -z^2 + f(x)z + g(x). \qquad (2.13)$$

Wenn umgekehrt $z : I \to \mathbb{R}$ (2.13) *löst, so löst*

$$y(x) = c\,\mathrm{e}^{\int z(x)\mathrm{d}x}$$

für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ *die Gleichung* (2.12).

Anmerkungen *Die zusätzliche freie Konstante rührt daher, dass die Differentialgleichung für* y *von der Ordnunng 2 ist und entsprechend 2 Parameter (Anfangswerte für* y, y'*) benötigt. Die Differentialgleichung* (2.13) *dagegen hat die Ordnung 1 und nur einen freien Parameter.*

Satz 2.5 *Die Transformation 2.4 ist korrekt.*

Beweis:

y löse die Differentialgleichung 2. Ordnung. Es folgt

$$\begin{aligned}
z'(x) &= \left(\frac{y'(x)}{y(x)}\right)' \\
&= \frac{y''(x)y(x) - y'(x)y'(x)}{y(x)^2} \\
&= \frac{y''(x)}{y(x)} - \left(\frac{y'(x)}{y(x)}\right)^2 \\
&= \frac{f(x)y'(x) + g(x)y(x)}{y(x)} - \left(\frac{y'(x)}{y(x)}\right)^2 \\
&= f(x)\frac{y'(x)}{y(x)} + g(x) - \left(\frac{y'(x)}{y(x)}\right)^2 \\
&= f(x)z(x) + g(x) - z(x)^2 (= \text{(2.13)})\,.
\end{aligned}$$

Zur Umkehrung löse z (2.13). Dann finden wir für

$$\begin{aligned}
y(x) &= c\,\mathrm{e}^{\int z(x)\mathrm{d}x} \\
y'(x) &= c\,z(x)\mathrm{e}^{\int z(x)\mathrm{d}x} \\
y''(x) &= c\,z'(x)\mathrm{e}^{\int z(x)\mathrm{d}x} + cz(x)^2\mathrm{e}^{\int z(x)\mathrm{d}x} \\
y''(x) - f(x)y'(x) - g(x)y(x) &= c\,\mathrm{e}^{\int z(x)\mathrm{d}x}\underbrace{(z'(x) + z(x)^2 - f(x)z(x) - g(x))}_{=0 \text{ wegen(2.13)}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Damit sind die Lösungseigenschaften nachgewiesen. ■

2.6 Exakte Differentialgleichungen

Definition 2.1 *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge. Dann sagen wir, dass die partielle Ableitung $\frac{\partial H}{\partial x}$ einer Funktion $H : \Omega \to \mathbb{R}$ in $(x_0,\ y_0) \in \Omega$ existiert, falls*

$$\lim_{h\to 0} \frac{H(x_0 + h, y_0) - H(x_0, y_0)}{h} =: \frac{\partial H}{\partial x}(x_0, y_0)$$

existiert, analog existiert $\frac{\partial H}{\partial y}$, falls

$$\lim_{h\to 0} \frac{H(x_0, y_0 + h) - H(x_0, y_0)}{h} =: \frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0)$$

existiert. Wir sagen, dass H in Ω zweimal partiell stetig differenzierbar ist, falls $\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}$ für alle $(x_0, y_0) \in \Omega$ existiert, sowie $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial H}{\partial x})$, $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial H}{\partial y})$, $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial H}{\partial x})$ und $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial H}{\partial y})$ für alle $(x_0, y_0) \in \Omega$ existieren und stetig von (x_0, y_0) abhängen.

Symbole:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial H}{\partial x}\Big)$$
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial H}{\partial y}\Big)$$
$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial H}{\partial y}\Big)$$

Ein Satz der Analysis sagt, wenn $H : \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal partiell stetig differenzierbar ist, so gilt für alle $(x_0, y_0) \in \Omega$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial H}{\partial y}\Big)(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial H}{\partial x}\Big)(x_0, y_0)\,. \tag{2.14}$$

Grund: Taylor Formel

$$\begin{aligned} H(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = &\, H(x_0, y_0) + H_1^1(x_0, y_0)h_1 + H_2^1(x_0, y_0)h_2 \\ &+ H_{11}^2(x_0, y_0)h_1^2 + H_{12}^2(x_0, y_0)h_1 h_2 \\ &+ H_{22}^2(x_0, y_0)h_2^2 + o(h_1^2 + h_2^2) \end{aligned}$$

Wir betrachten im Folgenden (halb)implizite Differentialgleichungen der Form:

$$p(x, y) + q(x, y)y' = 0. \tag{2.15}$$

Formal ist diese Differentialgleichung äquivalent zu (unter Annahme $q \neq 0$)

$$y' = \frac{-p(x, y)}{q(x, y)}. \tag{2.16}$$

Lösungsbegriff und Anfangswertproblem dehnen wir in der offensichtlichen Art und Weise auf (2.15) aus.

Definition 2.2 *Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $p, q : I \times J \to \mathbb{R}$ partiell stetig differenzierbare Funktionen. Dann heißt die Differentialgleichung* (2.15) *exakt falls eine zweimal partiell stetig differenzierbare Funktion $H : I \times J \to \mathbb{R}$ mit*

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x_0, y_0) = p(x_0, y_0)\,, \ \frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0) = q(x_0, y_0) \quad \textit{für alle } x_0 \in I, y_0 \in J$$

existiert. H heißt dann Potential für (2.15).

Satz 2.6 *Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $p, q : I \times J \to \mathbb{R}$.*

1. *Dann ist die Differentialgleichung* (2.15) *genau dann exakt, wenn p und q einmal partiell stetig differenzierbar sind und*

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial q}{\partial x}(x, y) \tag{2.17}$$

für alle $x \in I, y \in J$.

2. *Unter diesen Bedingungen erfüllen alle Potentiale von* (2.15) *für $x^* \in I$ und $y^* \in J$ die Beziehung*

$$H(x, y) = H(x^*, y^*) + \int_{x^*}^{x} p(s, y^*)\, \mathrm{d}s + \int_{y^*}^{y} q(x, t)\, \mathrm{d}t \tag{2.18}$$

für alle $x \in I, y \in J$. Erfüllt $H : I \times J \to \mathbb{R}$ umgekehrt (2.18)*, so ist H ein Potential für* (2.15).

3. *Ist $\tilde{I} \subseteq I$ ein offenes Intervall und $y : \tilde{I} \to J$ eine Lösung von* (2.15)*, so ist die Funktion $x \mapsto H(x, y(x))$ auf $\tilde{I}$ konstant.*

Beispiel 2.10 *Wir betrachten die Differentialgleichung in getrennten Variablen*

$$y' = f(x)g(y)$$

Es gibt mehrere Umformungen nach (2.15)*:*

$$\begin{aligned} -f(x) + \frac{1}{g(y)}\, y' &= 0 \\ p(x, y) &= -f(x) \\ q(x, y) &= \frac{1}{g(y)} \end{aligned}$$

Wir überprüfen (2.17)

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial q}{\partial x}(x, y) \Rightarrow \text{ ist exakt}$$

Andere Variante:

$$\begin{aligned}
-g(y) + \frac{1}{f(x)}\, y' = 0 \\
p(x,y) &= -g(y) \\
\frac{\partial p}{\partial y} &= -g'(y) \\
q(x,y) &= \frac{1}{f(x)} \\
\frac{\partial q}{\partial x} &= -\frac{f'(x)}{f(x)^2}
\end{aligned}$$

(2.17) *gilt nur, wenn* g' *und* $\frac{f'}{f^2}$ *konstant sind und zudem* $g' = \frac{f'}{f^2}$ *ist.*
Die Exaktheit einer Gleichung ist daher extrem von der Transformation abhängig.

Beispiel 2.11

$$(x+y)y' + (y+x+1) = 0 \quad \textit{auf } \mathbb{R}\times\mathbb{R},$$
$$y(0) = 2$$

$$\begin{aligned}
p(x,y) &= x+y+1 \\
q(x,y) &= x+y
\end{aligned}$$

1. *Ist die Differentialgleichung exakt ?*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial y}(x,y) &= 1 \\
\frac{\partial q}{\partial x}(x,y) &= 1 \;\;\Rightarrow\;\; \textit{Dgl. ist exakt}
\end{aligned}$$

2. *Potential bestimmen*

$$H(x,y) = H(x^*,y^*) + \int_{x^*}^{x} p(s,y^*)\,\mathrm{d}s + \int_{y^*}^{y} q(x,t)\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
x^* &= 0\,,\ y^* = 0 \\
H(x^*, y^*) &= 0 \\
H(x,y) &= \int\limits_0^x (s+1)\mathrm{d}s + \int\limits_0^y (x+t)\mathrm{d}t \\
&= \tfrac{1}{2}s^2 + s\,\Big|_0^x + xt + \tfrac{1}{2}t^2\,\Big|_0^y \\
&= \frac{x^2}{2} + x + xy + \frac{y^2}{2}
\end{aligned}
$$

3. *Auflösen des Potentials*

$$
\begin{aligned}
H(x,y) = H(x_0, y_0) &= H(0,2) = 2 \\
2 &= \tfrac{y^2}{2} + xy + \tfrac{1}{2}x^2 + x \\
0 &= y^2 + 2xy + x^2 + 2x - 4 \\
y_{1,2} &= -x \pm \sqrt{x^2 - x^2 - 2x + 4} \\
&= -x \pm \sqrt{4 - 2x}
\end{aligned}
$$

4. *Benutzung des Anfangswertes*

$$2 = y(0) = -0 \pm \sqrt{4-2} = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad + \textit{ ist richtig.}$$

Folglich ist die Lösung $y(x) = -x + \sqrt{4-2x}$ *nur für* $x \leq 2$ *erklärt.*

Beweis:

1. i) Wir zeigen, dass aus der Exaktheit die Bedingung (2.17) folgt.

   Sei H ein Potential für die Differentialgleichung (2.15). Wir benutzen (2.14). Dann finden wir

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial H}{\partial x}\Big) \\
&= \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial H}{\partial y}\Big) \\
&= \frac{\partial q}{\partial x}.
\end{aligned}
$$

   Damit ist (2.17) notwendig für die Exaktheit von (2.15).

ii) Wir zeigen umgekehrt, dass die Bedingung (2.17) die Exaktheit der Differentialgleichung impliziert.

Zu beliebigen stetig differenzierbaren Funktionen p, q und einem beliebigen Punkt x^*, y^* definieren wir die Funktion H über (2.18). Differentiation liefert

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{x^*}^{x} p(s,y^*)\,\mathrm{d}s}_{p(x,y^*)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{y^*}^{y} q(x,t)\,\mathrm{d}t}_{\int\limits_{y^*}^{y} \frac{\partial q}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t\text{ ,da } \frac{\partial q}{\partial x}(x,t)\text{ stetig ist.}}$$

$$= p(x,y^*) + \int\limits_{y^*}^{y} \frac{\partial q}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

$$= p(x,y^*) + \int\limits_{y^*}^{y} \frac{\partial p}{\partial y}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

$$= p(x,y^*) + p(x,y) - p(x,y^*) = p(x,y)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{x^*}^{x} p(s,y^*)\,\mathrm{d}s}_{=0} + \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{y^*}^{y} q(x,t)\,\mathrm{d}t$$

$$= q(x,y).$$

Es existieren $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}$ und sind stetig, da p, q stetig differenzierbar sind. Also ist H zweimal stetig differenzierbar. Damit ist H ein Potential von (2.15). Nach Definition 2.2 ist die Differentialgleichung exakt.

2. Sei H ein beliebiges Potential für (2.15). Dann gilt

$$H(x,y) - H(x^*,y^*) = \underbrace{H(x,y) - H(x,y^*)}_{\int\limits_{y^*}^{y} \frac{\partial H}{\partial y}(x,t)\mathrm{d}t} + \underbrace{H(x,y^*) - H(x^*,y^*)}_{\int\limits_{x^*}^{x} \frac{\partial H}{\partial x}(s,y^*)\mathrm{d}s}$$

$$= \int\limits_{y^*}^{y} q(x,t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{x^*}^{x} p(s,y^*)\,\mathrm{d}s\,.$$

Dies ist (2.18).

Dass umgekehrt eine Funktion (2.18) ein Potential darstellt, wurde bereits in Teil 1 (ii) gezeigt.

3. Sei $y : \tilde{I} \to J$ eine Lösung von (2.15). Wir finden nun für ein $x \in \tilde{I}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$ hinreichend klein, dass $x + \varepsilon \in \tilde{I}$, nach der Taylorformel

$$\begin{aligned}
H(x+\varepsilon, y(x+\varepsilon)) &= H(x+\varepsilon, y(x) + y'(x)\varepsilon + o(\varepsilon)) \\
&= H(x, y(x)) + \varepsilon \frac{\partial H}{\partial x}(x, y(x)) \\
&\quad + (y'(x)\varepsilon + o(\varepsilon)) \frac{\partial H}{\partial y}(x, y(x)) + o(\varepsilon) \\
&\quad + o(y'(x)\varepsilon + o(\varepsilon)) \\
&= H(x, y(x)) + \varepsilon \left(\frac{\partial H}{\partial x}(x, y(x)) + y'(x) \frac{\partial H}{\partial y}(x, y(x)) \right) \\
&\quad + \underbrace{o(\varepsilon) \frac{\partial H}{\partial y}(x, y(x)) + o(\varepsilon) + o(y'(x)\varepsilon + o(\varepsilon))}_{=o(\varepsilon)} \\
&= H(x, y(x)) + \varepsilon \big(\underbrace{p(x, y(x)) + y'(x) q(x, y(x))}_{=0 \text{ ,da } y \text{ Lösung von (2.15) ist}} \big) + o(\varepsilon) \\
&= H(x, y(x)) + o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Wir erhalten also, dass

$$\frac{H(x+\varepsilon, y(x+\varepsilon)) - H(x, y(x))}{\varepsilon} = \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Im Grenzübergang folgt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{H(x+\varepsilon, y(x+\varepsilon)) - H(x, y(x))}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0.$$

Daher ergibt sich für die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H(x, y(x)) = 0 \qquad \text{für alle } \ x \in \tilde{I}\,.$$

Damit ist die Abbildung $x \mapsto H(x, y(x))$ auf $\tilde{I}$ konstant.

Der Beweis ist jetzt vollständig. ■

Anmerkungen

1. *Die Exaktheit einer Differentialgleichung wird durch die Bedingung* (2.17) *abgeprüft.*
2. *Ist H ein Potential von* (2.15)*, dann ist $\tilde{H} = H + c$ auch ein Potential für beliebiges $c \in \mathbb{R}$.*
3. *Lösungen eines Anfangswertproblems $y(x_0) = y_0$ einer exakten Differentialgleichung* (2.15) *können mit einem Potential H aus der algebraischen Gleichung $H(x, y(x)) = H(x_0, y_0)$ durch Auflösen nach $y(x)$ bestimmt werden.*

Was machen wir, wenn (2.15) nicht exakt ist, oder (2.16) nicht mit den richtigen Funktionen p, q geschrieben ist?

Definition 2.3 *Eine nirgends verschwindende Funktion $m : I \times J \to \mathbb{R}$ heißt integrierender Faktor (auch: Euler Multiplikator) für* (2.15)*, falls die Differentialgleichung*

$$m(x, y)p(x, y) + m(x, y)q(x, y)y' = 0$$

exakt ist.

Beispiel 2.12 *Wir betrachten die Differentialgleichung*

$$\begin{aligned}(2x^2y + y) + xy' &= 0\\ y(1) &= 1\\ p(x, y) &= 2x^2y + y\\ q(x, y) &= x\end{aligned}$$

1. *Die Differentialgleichung ist nicht exakt.*

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2x^2 + 1 \neq 1 = \frac{\partial q}{\partial x}$$

2. *Wir raten*

$$
\begin{aligned}
m(x,y) &= \frac{1}{xy} \quad \textit{ist ein integrierender Faktor}\\
\tilde{p}(x,y) &= m(x,y)p(x,y)\\
&= 2x + \frac{1}{x}\\
\tilde{q}(x,y) &= m(x,y)q(x,y)\\
&= \frac{1}{y}\\
\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} &= 0 = \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x} \;\Rightarrow \textit{exakt}
\end{aligned}
$$

3. *Wir berechnen ein Potential.*
   Anfangspunkt sei $x^* = y^* = 1$.

$$
\begin{aligned}
H(x,y) &= \int_1^x 2s + \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s + \int_1^y \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = s^2 + \ln|s|\Big|_1^x + \ln|t|\Big|_1^y + c\\
&= x^2 - 1 + \ln|x| + \ln|y| + c
\end{aligned}
$$

   $c \in \mathbb{R}$ *ist beliebig. Sei daher* $c = 0$.

4. *Auflösung des Potentials*

$$
\begin{aligned}
H(x,y) &= H(x_0,y_0) = 0\\
\ln|y| &= 1 - x^2 - \ln|x|\\
x,y > 0: \qquad y(x) &= \mathrm{e}^{1-x^2-\ln x} = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{1-x^2}.
\end{aligned}
$$

Anmerkungen *Wie findet man einen integrierenden Faktor?*
Wir überprüfen (2.17) *für* $\tilde{p}, \tilde{q}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} &= \frac{\partial (mp)}{\partial y} = p\frac{\partial m}{\partial y} + m\frac{\partial p}{\partial y}\\
\frac{\partial \tilde{q}}{\partial x} &= \frac{\partial (mq)}{\partial x} = q\frac{\partial m}{\partial x} + m\frac{\partial q}{\partial x}
\end{aligned}
$$

m *ist integrierender Faktor genau dann,wenn*

$$
q\frac{\partial m}{\partial x} - p\frac{\partial m}{\partial y} = m\Big(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\Big)\,.
$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung, die meist viel schwerer zu lösen ist als (2.15). *Es ist also besser zu raten.*

Kapitel 3

Differentialgleichungssysteme (Allgemeine Lösungstheorie)

3.1 Motivation

Bis jetzt haben wir Ansätze kennengelernt, Differentialgleichungen explizit analytisch zu lösen. Dabei blieb natürlich offen, ob es noch weitere Lösungen geben könnte, man vergleiche aber Satz 2.1 auf Seite 11 und Bsp. 2.3 auf Seite 17. Diese Lücke werden wir im Folgenden schließen. Dank Transformation 1.1 auf Seite 7 brauchen wir dies nur für Differentialgleichungs-Systeme 1.Ordnung zu tun.

3.2 Existenz und Eindeutigkeit

3.2.1 Das Polygonzugverfahren und Existenz einer Lösung

Die Grundidee aller Theorien zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen ist die Folgende.

Satz 3.1 *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ *und* $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ *stetig. Dann löst eine stetige Funktion* $y : I \to \mathbb{R}^k$ *das Anfangswertproblem*

$$y' = f(x, y)\,,\ y(x_0) = y_0 \tag{3.1}$$

für $(x_0, y_0) \in \Omega$ *genau dann, wenn* $(x, y(x)) \in \Omega$ *für alle* $x \in I$ *sowie die Beziehung*

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\ \mathrm{d}t \tag{3.2}$$

für alle $x \in I$ *erfüllt ist.*

Beweis: „ $\Rightarrow$ “ Sei y eine Lösung von (3.1). Dann ist sicher y stetig und nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechung gilt für alle $x \in I$

$$\begin{aligned} y(x) - y(x_0) &= \int\limits_{x_0}^{x} y'(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\ \mathrm{d}t \\ y(x) = y_0 &+ \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Also löst y (3.2).

„ $\Leftarrow$ “ Sei (3.2) erfüllt: Wir erhalten für $x = x_0$

$$y(x_0) = y_0 + \underbrace{\int\limits_{x_0}^{x_0} f(t, y(t))\ \mathrm{d}t}_{=0} = y_0$$

Da y stetig ist, ist auch $t \to f(t, y(t))$ stetig. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist damit die linke Seite von (3.2) differenzierbar und es gilt

$$y'(x) = f(x, y(x)) \,.$$

Mithin löst y (3.1). ■

Anmerkungen

1. *Die Implikation* (3.1) $\Rightarrow$ (3.2) *gilt praktisch immer. In Bsp. 1.2 auf Seite 5 sahen wir schon, dass* (3.2) $\Rightarrow$ (3.1) *nicht immer gelten muss.*

2. *Wir können mit diesem Satz ein allgemeines Prinzip produktiv machen: Integration ist eine glättende Operation. So kann man die Integralgleichung* (3.2) *zum Beispiel durch Integration lösen.*

3. *Die Integration in* (3.2) *erfolgt separat in jeder Komponente der Funktion* $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$.

Im Folgenden sei

$$\|y\| = \|y\|_\infty = \max_{i=1,\dots,k} |y_k| \qquad \text{für } y \in \mathbb{R}^k\,.$$

Wir benötigen noch eien vorbereitenden Satz zum Beweis der Existenz einer Lösung.

Definition 3.1 *Sei* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Fuktionenfolge mit* $f_n : I \to \mathbb{R}^k$. *Die Funktionenfolge heißt gleichgradig stetig in* $x_0 \in I$, *falls*

$$\forall\,\epsilon > 0\;\exists\,\delta > 0\;\forall\,n \in \mathbb{N}\;\forall\,x \in I :\; |x - x_0| < \delta \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(x_0)\| < \epsilon. \tag{3.3}$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt kurz gleichgradig stetig, falls dies für alle* $x_0 \in I$ *gilt.*
Die Funktionenfolge heißt gleichmäßig beschränkt, wenn

$$\exists\,M > 0\;\;\forall\,n \in \mathbb{N}\;\;\forall\,x \in I\;\;:\quad \|f_n(x)\| \le M.$$

Anmerkungen f *ist stetig in* x_0 *genau dann, wenn*

$$\forall\,\epsilon > 0\;\;\exists\,\delta > 0\;\;\forall\,x \in I\;\;:\quad |x - x_0| < \delta \quad\Rightarrow\quad \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon.$$

Lemma 3.1 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ *sei gleichgradig stetig. Dann gilt:*

$$\forall\,\epsilon > 0\;\exists\,\delta > 0\;\forall\,n \in \mathbb{N}\;\forall\,x, x' \in [a, b]\;:\;|x - x'| < \delta \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(x')\| < \epsilon.$$

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt, d.h. wir nehmen an, es gäbe ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ jeweils $x_m, x'_m \in [a, b]$ existieren und $n_m \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_m - x'_m| < \frac{1}{m} \;\text{ und }\; \|f_{n_m}(x_m) - f_{n_m}(x'_m)\| \ge \epsilon\,.$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine Teilfolge $(x_{m_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$, welche gegen ein $x_0 \in [a, b]$ konvergiert. Wegen

$$|x_{m_\ell} - x'_{m_\ell}| < \frac{1}{m_\ell} \quad \text{gilt} \quad \lim_{\ell\to\infty} x'_{m_\ell} = x_0\,.$$

Nach Definition der gleichgradigen Stetigkeit finden wir ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\, \forall\, x \in I \;:\quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f_n(x) - f_n(x_0)\| < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Wir wählen $\ell_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für $\ell \geq \ell_0$ gilt

$$|x_{m_\ell} - x_0| < \delta \quad \text{und} \quad |x'_{m_\ell} - x_0| < \delta\,.$$

Dann gilt

$$\|f_{m_\ell}(x_{m_\ell}) - f_{m_\ell}(x_0)\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{und} \quad \left\|f_{m_\ell}(x'_{m_\ell}) - f_{m_\ell}(x_0)\right\| < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Die Dreiecksungleichung liefert

$$\left\|f_{m_\ell}(x_{m_\ell}) - f_{m_\ell}(x'_{m_\ell})\right\| < \epsilon.$$

Dies führt zu einem Widerspruch. ■

Satz 3.2 *(Satz von Arzelá-Ascoli) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ sei gleichgradig stetig und gleichmäßig beschränkt. Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$, welche gleichmäßig konvergiert.*

Anmerkungen

1. *Die Bedingung ist auch notwendig.*
2. *Die Bedingung formuliert ein Kompaktheitskriterium in $C\big([a,b],\ \mathbb{R}^k\big)$.*

Beweis:

1. Sei $J = \mathbb{Q} \cap [a,b]$, dann gilt $J = \{r_1, r_2, \dots\}$ für eine Folge $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Dann ist $(f_n(r_1))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^k$ beschränkt. Es gibt dann eine Teilfolge $(m_\ell^1)_{\ell\in\mathbb{N}}$, sodass $\Big(f_{m_\ell^1}(r_1)\Big)_{\ell\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Nun ist $\Big(f_{m_\ell^1}(r_2)\Big)_{\ell\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^k$ beschränkt.

   Sei $(f_{m_\ell^2}(r_2))_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Induktiv finden wir für jedes $q \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge $(m_\ell^q)_{\ell\in\mathbb{N}}$ von $(m_\ell^{q-1})_{\ell\in\mathbb{N}}$, sodass $(f_{m_\ell^q}(r_q))_{\ell\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Wir setzen nun $\bar{n}_\ell = m_\ell^\ell$. Da für genügend große ℓ dann $\bar{n}_\ell$ eine Teilfolge von m_ℓ^q ist, gilt für alle q, dass $(f_{\bar{n}_\ell}(r_q))_{\ell\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

2. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen $\delta > 0$ nach Lemma 3.1 auf Seite 47, sodass

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\, \forall\, x, x' \in [a,b] \;:\; |x - x'| < \delta \;\Rightarrow\; \|f_n(x) - f_n(x')\| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (3.4)$$

Wir finden $q_1, \ldots, q_j \in J$, so dass für alle $x \in [a,b]$ ein $p \in \{1, \ldots, j\}$ existiert mit $|x - q_p| < \delta$.
Aus 1. erhalten wir ein $\ell_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $\ell\,, \ell' \geq \ell_0$ und $p \in \{1, \ldots, j\}$

$$\left\| f_{\bar{n}_\ell}(q_p) - f_{\bar{n}_{\ell'}}(q_p) \right\| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (3.5)$$

Wir bekommen nun für ein beliebiges $x \in [a,b]$ mit einem q_p einen Abstand $|x - q_p| < \delta$ und $\ell, \ell' \geq \ell_0$ derart, dass

$$\begin{aligned}
&\left\| f_{\bar{n}_\ell}(x) - f_{\bar{n}_{\ell'}}(x) \right\| \\
&= \left\| f_{\bar{n}_\ell}(x) - f_{\bar{n}_\ell}(q_p) + f_{\bar{n}_\ell}(q_p) - f_{\bar{n}_{\ell'}}(q_p) + f_{\bar{n}_{\ell'}}(q_p) - f_{\bar{n}_{\ell'}}(x) \right\| \\
&\leq \underbrace{\left\| f_{\bar{n}_\ell}(x) - f_{\bar{n}_\ell}(q_p) \right\|}_{<\frac{\epsilon}{3}\ (3.4)} + \underbrace{\left\| f_{\bar{n}_\ell}(q_p) - f_{\bar{n}_{\ell'}}(q_p) \right\|}_{<\frac{\epsilon}{3}\ (3.5)} + \underbrace{\left\| f_{\bar{n}_{\ell'}}(q_p) - f_{\bar{n}_{\ell'}}(x) \right\|}_{<\frac{\epsilon}{3}\ (3.4)} .
\end{aligned}$$

Es gilt also für alle $\ell, \ell' \geq \ell_0$ und $x \in [a,b]$

$$\left\| f_{\bar{n}_\ell}(x) - f_{\bar{n}_{\ell'}}(x) \right\| < \epsilon\,.$$

$(f_{\bar{n}_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ ist somit eine Cauchyfolge bezüglich der Supremumnorm.
Damit konvergiert $(f_{\bar{n}_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig.

1. und 2. liefern den Beweis. ■

Folgerung 1 *Erfüllt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\ f_n : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ gleichmäßig eine Lipschitz-Bedingung, das heißt es existiert eine Konstante $L > 0$ mit*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\, \forall\, x, x' \in [a,b] \;:\quad \|f_n(x) - f_n(x')\| \leq L\,|x - x'|,$$

und $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ ist gleichmäßig beschränkt, dann existiert eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $(f_{n_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$.

Beweis: Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig stetig. Man wähle $x' = x_0$ und $\delta = \frac{\epsilon}{L}$ in Definition 3.1 auf Seite 47. Satz 3.2 auf der vorherigen Seite zeigt das Verlangte. ■

Satz 3.3 *(Satz von Peano) Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ stetig. Für $\alpha,\ \beta > 0\,,\ \ x_0 \in \mathbb{R}\,,\ \ y_0 \in \mathbb{R}^k$ sei*

$$D = [x_0, x_0 + \alpha] \times \{y : \|y - y_0\| \leq \beta\} \subseteq \Omega\,.$$

Wir setzen

$$M = \sup\{\|f(x,y)\| : (x,y) \in D\}$$

und $\gamma = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}\right\}$.
Dann existiert eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x,y)\,,\ \ y(x_0) = y_0$$

im Intervall $[x_0, x_0 + \gamma]$.

Anmerkungen

1. *Es gilt eine analoge Aussage für das Intervall $[x_0 - \gamma, x_0]$.*
2. *Supremum $M < \infty$, weil f stetig und D eine kompakte Menge ist.*

Beweis: Wir zeigen den Satz von Peano.

1. Wir definieren eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $\varphi_n : [x_0, x_0 + \gamma] \to \mathbb{R}^k$. Dazu seien Punkte x_i^n durch $x_i^n = x_0 + i\frac{\gamma}{n}$ für $i = 0, \ldots, n$ definiert. Damit setzen wir induktiv

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} y_0 + (x - x_0)f(x_0, y_0) & \text{für } \ x \in [x_0, x_1^n], \\ \varphi_n(x_i^n) + (x - x_i^n)f(x_i^n, \varphi_n(x_i^n)) & \text{für } \ x \in [x_i^n, x_{i+1}^n]. \end{cases}$$

   Offenbar ist $\varphi_n(x)$ für $x \in [x_i^n, x_{i+1}^n]$ korrekt definiert, wenn $\varphi_n(x_i^n)$ korrekt definiert ist und

$$\|\varphi_n(x_i^n) - y_0\| \leq \beta\,.$$

2. Durch Induktion zeigen wir für alle $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ für welche

$$\|\varphi_n(x_{i'}^n) - y_0\| \leq \beta \qquad \text{für alle } \ i' < i\,,$$

   dass für alle $x \in [x_0, x_{i+1}^n]$

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x_{i_n(t)}^n, \varphi_n(x_{i_n(t)}^n))\,\mathrm{d}t \tag{3.6}$$

mit $i_n(t) = \left\lfloor n\frac{(t-x_0)}{\gamma} \right\rfloor$ gilt.

Induktionsanfang:

$$x \in [x_0, x_1^n] \quad \Rightarrow \quad i_n(t) = 0 \qquad \text{für alle } \ t \in [x_0, x)$$

und es gilt

$$\begin{aligned} y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x_{i_n(t)}^n, \varphi_n(x_{i_n(t)}^n))\mathrm{d}t &= y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x_0, \varphi_n(x_0))\mathrm{d}t \\ &= y_0 + (x - x_0) f(x_0, y_0) \\ &= \varphi_n(x)\,. \end{aligned}$$

Induktionsschritt ($i - 1 \to i$): für $x \in [x_0, x_i^n]$ ist nichts zu beweisen.

$$t \in [x_i^n, x_{i+1}^n] \text{ ist } i_n(t) = i\,.$$

Deshalb finden wir

$$\begin{aligned} y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x_{i_n(t)}^n, \varphi_n(x_{i_n(t)}^n))\mathrm{d}t = y_0 &+ \int\limits_{x_0}^{x_i^n} f(x_{i_n(t)}^n, \varphi_n(x_{i_n(t)}^n))\mathrm{d}t \\ &+ \int\limits_{x_i^n}^{x} f(x_{i_n(t)}^n, \varphi_n(x_{i_n(t)}^n))\mathrm{d}t \\ = \varphi_n(x_i^n) &+ \int\limits_{x_i^n}^{x} f(x_i^n, \varphi_n(x_i^n))\mathrm{d}t \\ = \varphi_n(x_i^n) &+ (x - x_i^n) f(x_i^n, \varphi_n(x_i^n)) \\ = \varphi_n(x)\,. \end{aligned}$$

3. Aus (3.6) erhalten wir, wenn $\|\varphi_n(x_i^n) - y_0\| \leq \beta$, dass

$$\begin{aligned} \left\|\varphi_n(x_{i+1}^n) - y_0\right\| &= \left\| \int\limits_{x_0}^{x_{i+1}^n} f(x_{i_n(t)}^n, \varphi_n(x_{i_n(t)}^n))\mathrm{d}t \right\| \\ &\leq \int\limits_{x_0}^{x_{i+1}^n} \underbrace{\left\|f(x_{i_n(t)}^n, \varphi_n(x_{i_n(t)}^n))\right\|}_{\leq M} \mathrm{d}t \\ &\leq (x_{i+1}^n - x_0) M \leq \gamma M \\ &\leq \frac{\beta}{M} M = \beta. \end{aligned}$$

Damit ist φ_n auf ganz $[x_0, x_0+\gamma]$ wohldefiniert.

4. Folglich gilt auch (3.6) für alle $x \in [x_0, x_0+\gamma]$.
Wir erhalten für $x, x' \in [x_0, x_0+\gamma]$ mit $x < x'$, dass

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n(x) - \varphi_n(x')\| &= \left\| \int_{x_0}^{x} f(x^n_{i_n(t)}, \varphi_n(x^n_{i_n(t)}))\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x'} f(x^n_{i_n(t)}, \varphi_n(x^n_{i_n(t)}))\mathrm{d}t \right\| \\
&= \left\| -\int_{x}^{x'} f(x^n_{i_n(t)}, \varphi_n(x^n_{i_n(t)}))\mathrm{d}t \right\| \\
&\le \int_{x}^{x'} \left\| f(x^n_{i_n(t)}, \varphi_n(x^n_{i_n(t)})) \right\| \mathrm{d}t \\
&\le (x'-x)M, \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

d.h. eine gleichmäßige Lipschitz-Bedingung. Analog leiten wir her

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n(x)\| &= \left\| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x^n_{i_n(t)}), \varphi_n(x^n_{i_n(t)}))\mathrm{d}t \right\| \\
&\le \|y_0\| + \left\| \int_{x_0}^{x} f(x^n_{i_n(t)}, \varphi_n(x^n_{i_n(t)}))\mathrm{d}t \right\| \\
&\le \|y_0\| + \beta\,. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

5. Wegen (3.7) und (3.8) erfüllt die Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzung der Folgerung aus Satz 3.2 auf Seite 48. Damit gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $(\varphi_{n_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ mit dem Grenzwert $\varphi : [x_0, x_0+\gamma] \to \mathbb{R}^k$.

6. D ist kompakt. Also ist f gleichmäßig stetig. Das heißt für jedes $\epsilon > 0$ finden wir ein $\delta > 0$ mit

$$\forall\,(x,y)\,,\ (x',y') \in\ D\ :$$
$$|x-x'| < \delta\,,\ \ \|y-y'\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x,y) - f(x',y')\| < \frac{\epsilon}{2\gamma}. \qquad (3.9)$$

7. Sei $\epsilon > 0$ beliebig aber fest gewählt. Damit gibt es ein $0 < \delta < \frac{\epsilon}{2}$, sodass (3.9) gilt. Da φ gleichmäßig stetig ist gibt es ein $\tilde{\delta} > 0$ mit $\tilde{\delta} < \delta$, sodass für alle $x, x' \in [x_0, x_0+\gamma]$

$$|x-x'| < \tilde{\delta} \quad \Rightarrow \quad \|\varphi(x) - \varphi(x')\| < \frac{\delta}{2}\,.$$

Wir wählen ℓ_0 so groß, dass für alle $\ell \geq \ell_0$

$$\sup_{t \in [x_0, x_0+\gamma]} \|\varphi_{n_\ell}(t) - \varphi(t)\| \leq \frac{\delta}{2}$$

und $\frac{\gamma}{n_\ell} < \tilde{\delta}$.

8. Sei nun $x_\ell(t) := x^{n_\ell}_{i_{n_\ell}(t)}$.
   Dann gilt für alle $t \in [x_0, x_0+\gamma]$, dass $|x_\ell(t) - t| < \tilde{\delta}$. Dies impliziert

$$\begin{aligned} &\|\varphi_{n_\ell}(x_\ell(t)) - \varphi(t)\| \\ &\leq \|\varphi_{n_\ell}(x_\ell(t)) - \varphi(x_\ell(t))\| + \|\varphi(x_\ell(t)) - \varphi(t)\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

9. Mit (3.9) und (3.10) finden wir für $x \in [x_0, x_0+\gamma]$ und $\ell \geq \ell_0$

$$\begin{aligned} &\left\|\varphi(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\mathrm{d}t\right\| \\ &\leq \|\varphi(x) - \varphi_{n_\ell}(x)\| + \left\|\varphi_{n_\ell}(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\mathrm{d}t\right\| \\ &\leq \delta + \left\|\int_{x_0}^{x} f(x_\ell(t), \varphi_{n_\ell}(x_\ell(t)))\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\mathrm{d}t\right\| \\ &\leq \delta + \int_{x_0}^{x} \|f(x_\ell(t), \varphi_{n_\ell}(x_\ell(t))) - f(t, \varphi(t))\|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \delta + \int_{x_0}^{x} \frac{\epsilon}{2\gamma}\mathrm{d}t = \delta + (x - x_0)\frac{\epsilon}{2\gamma} \leq \delta + \gamma\frac{\epsilon}{2\gamma} \\ &= \delta + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon\,. \end{aligned}$$

   Da $\epsilon > 0$ beliebig war, ergibt sich für alle $x \in [x_0, x_0+\gamma]$

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t\,.$$

   Da φ stetig ist, ist φ nach Satz 3.1 auf Seite 45 also eine Lösung des Anfangswertproblems (3.1).

Dadurch ist der Beweis vollständig erbracht. ∎

Beispiel 3.1 *(siehe auch Bsp. 2.3 auf Seite 17)*

$$
\begin{aligned}
y' &= 3\sqrt[3]{y^2}\,, \quad y(0) = 0 \\
\alpha &= \beta = 1 \\
\Rightarrow M &= 3 \\
\Rightarrow \gamma &= \frac{1}{3} \\
\varphi_n(x) &= y_0 + (x - x_0) f(x_0, y_0) \quad \textit{für } x \in I \textit{ mit } I = \left[x_0, x_0 + \frac{\gamma}{n}\right] = \left[0, \frac{1}{3n}\right] \\
&= 0 + (x - x_0) \cdot 0 = 0
\end{aligned}
$$

Induktiv sieht man

$$\varphi_n(x) = 0 \qquad \textit{für alle } \ x \in \left[0, \tfrac{1}{3}\right].$$

Damit ist

$$\varphi(x) = 0 \qquad \textit{für alle } \ x \in \left[0, \tfrac{1}{3}\right].$$

Das heißt wir erhalten nach dieser Methode nur die Nulllösungen, nicht die anderen.

3.2.2 Der Satz von Picard-Lindelöf und Eindeutigkeit der Lösung

Im Folgenden benötigen wir das folgende nützliche Resultat:

Satz 3.4 *(Lemma von Gronwall) Sei $f : [a, b] \to [0, \infty[$ eine stetige Funktion für welche ein $c \geq 0$ und eine stetige Funktion $g : [a, b] \to [0, \infty[$ existieren, sodass für alle $x \in [a, b]$*

$$f(x) \leq c + \int_a^x f(t) g(t) \, \mathrm{d}t\,.$$

Dann gilt für alle $x \in [a, b]$ mit der Notation $\mathrm{e}^x = \exp(x)$

$$f(x) \leq c \, \exp\left(\int_a^x g(t) \, \mathrm{d}t \right).$$

Anmerkungen *Wenn Gleichheit („=“) gilt, dann zeigt Satz 3.1 auf Seite 45 dass*

$$f'(x) = f(x)g(x)\,, \quad f(a) = c\,.$$

Diese Gleichung in getrennten Variablen hat genau die Lösung

$$f(x) = c\,\exp\left(\int\limits_a^x g(t)\;\mathrm{d}t\right)\,.$$

Wir behandeln also eine Art Differentialgleichung.

Beweis: Sei $h : [a,b] \to [0,\infty[$ durch

$$h(x) = c + \int\limits_a^x f(t)g(t)\;\mathrm{d}t$$

gegeben. Dann gilt laut Voraussetzung $f(x) \leq h(x)$ für alle $x \in [a,b]$, sowie $0 \leq c \leq h(x)$. Außerdem ist h nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung differenzierbar und es gilt

$$h'(x) = f(x)g(x) \leq h(x)g(x)\,.$$

Fall $c > 0$: Mit $h(a) = c$ erhalten wir für beliebiges $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned}
\ln\frac{h(x)}{c} &= \ln h(x) - \ln h(a) \\
&= \int\limits_a^x (\ln h)'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_a^x \frac{h'(t)}{h(t)}\mathrm{d}t \\
&\leq \int\limits_a^x g(t)\mathrm{d}t \\
h(x) &\leq c\,\exp\left(\int\limits_a^x g(t)\;\mathrm{d}t\right)
\end{aligned}$$

und damit gilt diese obere Schranke auch für $f(x)$.

Fall $c = 0$: Nach Voraussetzung gilt dann für beliebiges $\tilde{c} > 0$ auch

$$f(x) \leq \tilde{c} + \int\limits_a^x f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$$

für alle $x \in [a, b]$. Es folgt

$$0 \leq f(x) \leq \tilde{c}\ \exp\left(\int\limits_a^x g(t)\ \mathrm{d}t\right).$$

für $x \in [a, b]$. Der Grenzübergang $\tilde{c} \to 0$ für festes x zeigt $f(x) = 0$ für $x \in [a, b]$. Insbesondere ist somit die Ungleichung $0 = f(x) \leq c\exp(\cdots) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ im Fall $c = 0$ korrekt. ∎

Folgerung 2 *Seien $f, g : [a, b] \to [0, \infty[$ stetig und es gelte*

$$f(x) \leq \int\limits_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t \qquad \textit{für alle} \ \ x \in [a, b].$$

Dann gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.

Diese Folgerung läßt sich aus dem Beweis von Satz 3.4 im Fall $c = 0$ ersehen.

Definition 3.2 *Sei f eine Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ offen. Dann heißt f Lipschitz-stetig bezüglich y mit Konstante $L > 0$, falls $\forall\ (x, y), (x, \bar{y}) \in \Omega$*

$$\|f(x, y) - f(x, \bar{y})\| \leq L\,\|y - \bar{y}\|\ .$$

f heißt lokal Lipschitz-stetig bezüglich y in Ω, falls für alle Paare $(x, y) \in \Omega$ eine Umgebung U von (x, y) in Ω existiert, sodass $f\big|_U$ Lipschitz-stetig bezüglich y ist.

Satz 3.5 *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ offen. $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ sei stetig bezüglich x und Lipschitz-stetig bezüglich y mit Konstante $L > 0$. Sind $\varphi_1 : I \to \mathbb{R}^k$, $\varphi_2 : I \to \mathbb{R}^k$ zwei Lösungen von $y' = f(x, y)$ zu den Anfangswerten*

$$\varphi_1(x_0) = y_1\ ,\ \ \varphi_2(x_0) = y_2\ ,$$

so gilt für alle $x \in I$

$$\|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\| \leq \|y_1 - y_2\|\, \mathrm{e}^{L|x-x_0|}\ .$$

Anmerkungen *Wir wissen also, dass die Lösung stetig von den Anfangswerten abhängt.*

Diese Stetigkeit ist wichtig an vielen Stellen:

1. für die Numerik (Anfangswert ist nicht exakt darzustellen),
2. für die Modellierung,
3. für die Ingenieuranwendungen: Stabilität des Systems,
4. Ein analoges Resultat gibt es auch für die stetige Abhängigkeit von der rechten Seiten.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x > x_0$. Wir definieren

$$h(t) = \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| .$$

Nach Satz 3.1 auf Seite 45 gilt jetzt für $x_0 \leq t \leq x$

$$\begin{aligned}
h(t) &= \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \\
&= \left\| y_1 + \int_{x_0}^{t} f(s,\varphi_1(s))\,\mathrm{d}s - \left(y_2 + \int_{x_0}^{t} f(s,\varphi_2(s))\,\mathrm{d}s \right) \right\| \\
&= \left\| y_1 - y_2 + \int_{x_0}^{t} \left(f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s)) \right) \mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \|y_1 - y_2\| + \int_{x_0}^{t} \|f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s))\| \,\mathrm{d}s \\
&\leq \|y_1 - y_2\| + \int_{x_0}^{t} L\,\|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\| \,\mathrm{d}s \\
&= \|y_1 - y_2\| + \int_{x_0}^{t} Lh(s)\,\mathrm{d}s .
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$h(t) \leq \|y_1 - y_2\| + \int_{x_0}^{t} Lh(s)\,\mathrm{d}s .$$

Das Lemma von Gronwall Satz 3.4 auf Seite 54 mit $c = \|y_1 - y_2\| \geq 0$ und $g(t) = L > 0$ sagt nun

$$h(x) \leq \|y_1 - y_2\| \exp\left(\int_{x_0}^{x} L\,\mathrm{d}s \right) = \|y_1 - y_2\|\,\mathrm{e}^{L(x-x_0)}$$

und mit der Definition von h folgt die Behauptung. ■

Satz 3.6 *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ *offen,* $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ *sei stetig bezüglich* x *und lokal Lipschitz-stetig bezüglich* y*. Sind* I_1, I_2 *offene Intervalle und*

$$\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}^k \,, \;\; \varphi_2 : I_2 \to \mathbb{R}^k$$

zwei Lösungen des Anfangswertproblems $y' = f(x,y), \;\; y(x_0) = y_0$ *mit einem Anfangswert* $(x_0, y_0) \in \Omega$*, dann gilt*

$$\varphi_1\big|_{I_1 \cap I_2} = \varphi_2\big|_{I_1 \cap I_2} \,.$$

Beweis:

1. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit betrachten wir

$$I = (I_1 \cap I_2) \cap [x_0, \infty[,$$

da ein analoger Beweis auch für $x \leq x_0$ geführt werden kann.

2. Wir betrachten die Menge

$$S = \{x \in I : \varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)\} \;.$$

Annahme: $S \neq \emptyset$

Sei $\hat{x} = \inf S$.

Falls $\hat{x} = x_0$ gilt, dann folgt

$$\varphi_1(\hat{x}) = \varphi_1(x_0) = y_0 = \varphi_2(x_0) = \varphi_2(\hat{x}) \,.$$

Falls $\hat{x} > x_0$ gilt, dann haben wir für große $n \in \mathbb{N}$

$$\hat{x} - \frac{1}{n} \notin S \,, \quad \hat{x} - \frac{1}{n} \geq x_0 \,, \quad \varphi_1\Big(\hat{x} - \frac{1}{n}\Big) = \varphi_2\Big(\hat{x} - \frac{1}{n}\Big) \,.$$

Da φ_1 und φ_2 stetig sind, liefert Grenzwertbildung

$$\begin{aligned} \varphi_1(\hat{x}) &= \lim_{n\to\infty} \varphi_1\Big(\hat{x} - \frac{1}{n}\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \varphi_2\Big(\hat{x} - \frac{1}{n}\Big) \\ &= \varphi_2(\hat{x}) \,. \end{aligned}$$

In jedem Fall ist $\varphi_1(\hat{x}) = \varphi_2(\hat{x})$ und daher $\hat{x} \notin S$.

3. Wir wissen somit $\varphi_1(\hat{x}) = \varphi_2(\hat{x})$. Da f lokal Lipschitz-stetig bezüglich y ist, finden wir eine Umgebung U von $(\hat{x}, \varphi_1(\hat{x}))$ und ein $L > 0$, sodass $f\big|_U$ Lipschitz-stetig mit Konstante L ist.

   Sei $\epsilon > 0$ nun so gewählt, dass

   $$(t, f(t, \varphi_i(t))) \in U \ \text{ für } i = 1, 2 \ \text{ und } \ t \in [\hat{x}, \hat{x} + \epsilon] \, .$$

   Es sind φ_1, φ_2 beides Lösungen des Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$, $y(\hat{x}) = \varphi_1(\hat{x}) = \varphi_2(\hat{x})$. Aus dem vorigen Satz 3.5 folgt nun für diese t

   $$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq \|\varphi_1(\hat{x}) - \varphi_2(\hat{x})\| \, \mathrm{e}^{L(t-\hat{x})} = 0.$$

   Daraus ergibt sich

   $$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) \quad \text{für } \ \hat{x} \leq t \leq \hat{x} + \epsilon \, .$$

   Das widerspricht $\hat{x} = \inf S$.

Der Beweis ist damit indirekt erfolgt. ■

Anmerkungen *Ist $f(x, y_1, \ldots, y_k)$ partiell nach y_i für $i = 1, \ldots, k$ differenzierbar und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial y_i} f(x, y_1, \ldots, y_k)$ stetig auf ganz Ω. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig bezüglich y. Das bedeutet, dass diese Eigenschaft hinreichend für die Eindeutigkeit der Lösung ist. Diese stetige Differenzierbarkeit ist oft erfüllt.*

Satz 3.7 *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bezüglich y und $(x_0, y_0) \in \Omega$. Sei*

$$b = \sup \left\{ a > 0 : \textit{Es gibt eine Lösung } \varphi : [x_0, x_0 + a] \to \mathbb{R}^k \textit{ von } (3.1) \right\} \, .$$

Dann existiert $b > 0$ oder $b = +\infty$ und es gibt eine eindeutig bestimmte Lösung

$$\varphi : [x_0, x_0 + b[\to \mathbb{R}^k \textit{ von } (3.1)$$

zusätzlich gilt für $b < \infty$

$$\Omega \cap ([x_0 + b, \infty[\times \mathbb{R}^k) \cap \overline{\{(x, \varphi(x)) : x \in [x_0, x_0 + b[\}} = \emptyset.$$

Beweis:

1. Wegen Satz 3.3 auf Seite 50 existiert eine Lösung von (3.1), das heißt die Menge ist nicht leer und das Supremum $b > 0$ existiert.

2. Wir fixieren für alle a mit $0 < a < b$ eine Lösung $\varphi_a : [x_0, x_0 + a] \to \mathbb{R}^k$ von (3.1). Dann definieren wir $\varphi : [x_0, x_0 + b[\to \mathbb{R}^k$ durch $\varphi(x) = \varphi_x(x)$. Aus dem letzten Satz 3.6 folgt für

$$x_0 \leq x \leq x_0 + a < x_0 + b\,, \quad \varphi(x) = \varphi_x(x) = \varphi_{x_0+a}(x)\,.$$

Damit löst φ auch (3.1) auf $[x_0, x_0 + a]$. Da a beliebig ist, löst φ (3.1) auf ganz $[x_0, x_0 + b[$. Gemäß dem vorigen Satz 3.6 auf Seite 58 ist φ eindeutig bestimmt.

3. Sei

$$(x_1, y_1) \in \Omega \cap [x_0 + b, \infty[\times \mathbb{R}^k \cap \overline{\{(t, \varphi(t)) : t \in [x_0, x_0 + b[\}}\,.$$

Das heißt $x_1 \geq x_0 + b$ und es gibt eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}\,,\ \ t_n \in [x_0, x_0 + b[$, sodass

$$x_1 = \lim_{n \to \infty} t_n \leq x_0 + b\,, \quad y_1 = \lim_{n \to \infty} \varphi(t_n)\,.$$

Folglich ist $x_1 = x_0 + b$. Nun existieren ein $\epsilon > 0$ und $L > 0$, sodass f Lipschitz-stetig mit Konstante L auf

$$U = \{(x, y) : \|(x, y) - (x_1, y_1)\| < 2\epsilon\} \subseteq \Omega$$

ist. Die Menge

$$K = \{(x, y) : \|(x, y) - (x_1, y_1)\| \leq \epsilon\} \subset U \subseteq \Omega$$

ist kompakt, also

$$M = \sup \{\|f(x, y)\| : (x, y) \in K\} < \infty\,.$$

Wir setzen

$$\delta = \frac{1}{2}\, \min \left\{\epsilon, \frac{\epsilon}{M}\right\} > 0$$

4. Es gilt

$$(x_1, y_1) \in \overline{\{(t, \varphi(t)) : t \in [x_0, x_0 + b[\}}\,.$$

Folglich gibt es zu δ aus 3. einen Punkt

$$(x_2, y_2) \in \{(t, \varphi(t)) : t \in [x_0, x_0 + b[\}$$

mit $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta$. Damit ist auch $x_2 < x_1 = x_0 + b$. Sei

$$D = [x_2, x_2 + \delta] \times \left\{y : \|y - y_2\| < \frac{\epsilon}{2}\right\} \subset K\,.$$

Nach Satz 3.3 auf Seite 50 (setze $\alpha = \delta$ und $\beta = \frac{\epsilon}{2}$, dann $\delta \leq \frac{\epsilon}{2M}$) existiert damit eine Lösung $\tilde{\varphi} : [x_2, x_2 + \delta] \to \mathbb{R}^k$ von

$$y' = f(x, y), \ \ y(x_2) = y_2 = \varphi(x_2)$$

5. Wir setzen
$$\hat{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{für } x \in [x_0, x_0 + b[\\ \tilde{\varphi}(x) & \text{für } x \in [x_2, x_2 + \delta]. \end{cases}$$
$\hat{\varphi}$ ist wohldefiniert nach Satz 3.6 auf Seite 58
$$\varphi\big|_{[x_2, x_0+b]} = \tilde{\varphi}\big|_{[x_2, x_0+b[}$$
Folglich ist $\hat{\varphi} : [x_0, x_2 + \delta] \to \mathbb{R}^k$ eine Lösung von (3.1). Wegen der Abschätzung $|x_1 - x_2| < \delta \leq \frac{\epsilon}{2}$ und $x_2 < x_1$ folgt
$$x_2 + \delta > x_1 = x_0 + b$$
und damit Widerspruch zu Definition von b.

Dies schließt den Beweis ab. ■

Anmerkungen *Zur Bedeutung von*
$$\Omega \cap [x_0 + b, \infty[\times \mathbb{R}^k \cap \overline{\{(t, \varphi(t)) : t \in [x_0, x_0 + b[\}} = \emptyset$$
siehe Abb. 3.1 .

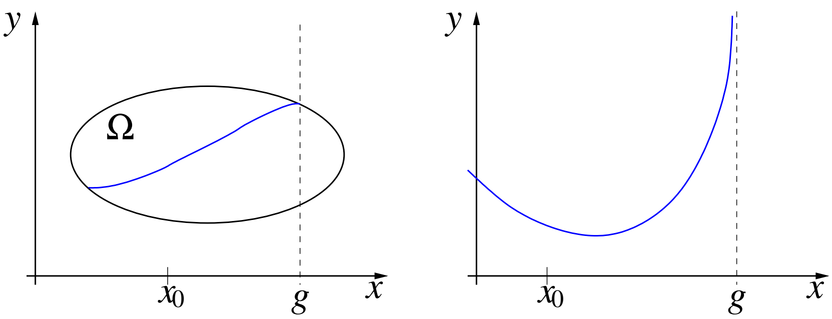


Abbildung 3.1: Die Lösung wird für $t \to g := x_0 + b$ gegen den „Rand“ von Ω „getrieben“. Beschränktes Gebiet Ω (links) und $\Omega = \mathbb{R}^{k+1}$ (rechts).

Satz 3.8 *(Picard - Lindelöf) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ stetig und lokal Lipschitz-stetig in y, sowie $(x_0, y_0) \in \Omega$. Dann gibt es Zahlen $x_- < x_0 < x_+$ und eine Lösung $\varphi :]x_-, x_+[\to \mathbb{R}^k$ von (3.1), sodass für jede Lösung $\tilde{\varphi} :]a, b[\to \mathbb{R}^k$, sowohl $a \geq x_-, b \leq x_+$ als auch $\tilde{\varphi} = \varphi\big|_{]a,b[}$ gilt.*

Anmerkungen φ *wird auch als maximale Lösung von* (3.1) *bezeichnet, maximal wegen Maximalität des Intervalls.*

Beweis: x_+ sei $x_0 + b$ mit den Bezeichnungen des vorigen Satzes. Analog setzen wir x_- für die umgekehrte Richtung fest. Entsprechend gibt es dann eine Lösung

$$\varphi :]x_-, x_+[\to \mathbb{R}^k$$

von (3.1). Ist

$$\tilde{\varphi} :]a, b[\to \mathbb{R}^k$$

eine andere Lösung von (3.1), so ist für alle $\epsilon > 0$ auch $\tilde{\varphi}\big|_{[x_0, b-\epsilon]}$ eine Lösung von (3.1). Nach Definition von φ ist

$$\forall \epsilon > 0 : \quad b - \epsilon \leq x_+ \,,$$

das heißt $b \leq x_+$. Analog finden wir $a \geq x_-$. Satz 3.6 auf Seite 58 zeigt nun, dass

$$\varphi\big|_{]a,b[\cap]x_-,x_+[} = \tilde{\varphi}\big|_{]a,b[\cap]x_-,x_+[} \quad \Rightarrow \quad \varphi\big|_{]a,b[} = \tilde{\varphi}$$

gilt. ■

Beispiel 3.2 *Wir betrachten das Anfangswertproblem*

$$y' = y^2 + 1 \,, \quad y(0) = 0.$$

Lösung durch Trennung der Variablen.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} &= \mathrm{d}x \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} &= \int \mathrm{d}x \\ \arctan y &= x + c \\ y &= \tan(x+c) \end{aligned}$$

Anfangswerte:

$$\arctan y(0) = c \Rightarrow c = 0$$

Lösung:

$$y(x) = \tan(x)$$

Es gilt

$$\lim_{x \to \pm\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \pm\infty \,.$$

Die Lösung explodiert also, das heißt

$$x_- = -\frac{\pi}{2} \,,\; x_+ = +\frac{\pi}{2}.$$

Wann gibt es eine „globale“ Lösung auf der ganzen Zeitachse?

Satz 3.9 *Seien $a < b$ ($a = -\infty$ und/oder $b = +\infty$ möglich) und*

$$f :]a, b[\times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$$

stetig und lokal Lipschitz-stetig in y. Zusätzlich gebe es zwei stetige Funktionen

$$\sigma_0, \sigma_1 :]a, b[\to [0, \infty[\,,$$

sodass

$$\|f(x, y)\| \leq \sigma_0(x) + \sigma_1(x)\,\|y\| \tag{3.11}$$

für alle $x \in]a, b[$ und alle $y \in \mathbb{R}^k$ gilt.

Dann existiert für alle $x_0 \in]a, b[$ und alle $y_0 \in \mathbb{R}^k$ eine eindeutige Lösung $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}^k$ von (3.1).

Anmerkungen *Das heißt $x_- = a$ und $x_+ = b$ mit den Bezeichnungen des vorigen Satzes.*

Beweis: Es sei x_0, y_0 fest und $\varphi :]x_-, x_+[\to \mathbb{R}^k$ die maximale Lösung von (3.1). Im Folgenden zeigen wir indirekt, dass $x_- = a, \quad x_+ = b$, das heißt ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $x_+ < b$. Wir betrachten nun die Funktion

$$h : [x_0, x_+[\to [0, \infty[, \quad h(x) = \|\varphi(x)\|\,.$$

Jetzt erhalten wir aus Satz 3.1 auf Seite 45 und (3.11) für alle $x \in [x_0, x_+[$

$$\begin{aligned}
h(x) &= \|\varphi(x)\| \\
&= \left\| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t \right\| \\
&\leq \|y_0\| + \int_{x_0}^{x} \|f(t, \varphi(t))\|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \|y_0\| + \int_{x_0}^{x} (\sigma_0(t) + \sigma_1(t)\,\|\varphi(t)\|)\,\mathrm{d}t \\
&= \|y_0\| + \int_{x_0}^{x} \sigma_0(t)\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} \sigma_1(t) h(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \|y_0\| + \int_{x_0}^{x_+} \sigma_0(t)\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} \sigma_1(t) h(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Das Lemma von Gronwall Satz 3.4 auf Seite 54 ergibt

$$h(x) \leq \left(\|y_0\| + \int\limits_{x_0}^{x_+} \sigma_0(t) \, \mathrm{d}t \right) \left(\exp \left(\int\limits_{x_0}^{x_+} \sigma_1(t) \, \mathrm{d}t \right) \right) .$$

Das heißt, es gibt ein $M > 0$ mit

$$\forall \, x \in [x_0, x_+[: \quad \|\varphi(x)\| \leq M \, .$$

Wir betrachten die Folge $u_n = x_+ - \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $x_0 < u_n < x_+$ für alle hinreichend hohen n. Die Folge $(\varphi(u_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ ist beschränkt. Nach dem (mehrdimensionalen) Satz von Bolzano-Weierstraß existiert ein Grenzwert $z \in \mathbb{R}^k$. Wir erhalten

$$\lim_{n \to \infty} \left(x_+ - \tfrac{1}{n}, \varphi(x_+ - \tfrac{1}{n}) \right) = (x_+, z).$$

Offenbar ist also

$$(x_+, z) \in \overline{\{(t, \varphi(t)) : t \in [x_0, x_+[\}},$$

jedoch auch $(x_+, z) \in \Omega =]a, b[\times \mathbb{R}^k$. Dies steht im Widerspruch zu Satz 3.7 auf Seite 59. ■

Beispiel 3.3 *Wir betrachten die Differentialgleichung*

$$y' = y \ln y \, , \quad y(0) = \mathrm{e}. \tag{3.12}$$

(3.11) *gilt nicht. Wir zeigen, dass eine Lösung* $y : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ *von* (3.12) *existiert, das heißt* (3.11) *ist nicht notwendig für eine Nicht-Explosion von* y.
Methode der getrennten Variablen ergibt:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y \ln y} = \mathrm{d}x$$

$$\int\limits_{\mathrm{e}}^{y} \frac{1}{z \ln z} \, \mathrm{d}z = \int_0^x \mathrm{d}s = x$$

$$(u = \ln z) \qquad \int \frac{1}{z \ln z} \, \mathrm{d}z = \int \frac{1}{u} \, \mathrm{d}u = \ln u = \ln(\ln z)$$

$$\ln(\ln y) = x$$

$$\Rightarrow y(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$$

Dies ist für alle $x \geq 0$ *definiert (sogar für alle* $x \in \mathbb{R}$*).*

3.2.3 Glattheit der Lösung und der Taylorreihenansatz

Motivation *Erfüllt $y : I \to \mathbb{R}^k$ die Differentialgleichung*

$$y' = f(x, y)$$

mit stetigem f, so ist y natürlich stetig differenzierbar (das heißt die Ableitung existiert und diese ist stetig).

Satz 3.10 *Ist f partiell einmal stetig differenzierbar, dann ist y zweimal stetig differenzierbar und es gilt*

$$y''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \sum_{i=1}^{k} f_i(x, y(x)) \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y(x)) \,. \tag{3.13}$$

Ist f sogar p-mal stetig differenzierbar, so ist y $(p+1)$-mal stetig differenzierbar.

Beweis: (3.13) folgt aus der mehrdimensionalen Kettenregel.

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y'(x) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y(x)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) \cdot 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y(x)) \frac{\mathrm{d}y_i(x)}{\mathrm{d}x} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \sum_{i=1}^{k} f_i(x, y(x)) \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y(x)) \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist stetig, deshalb ist y zweimal stetig differenzierbar.
Die Aussage zur mehrfachen Differenzierbarkeit folgt durch Induktion.
Wir zeigen für alle $1 \leq j \leq p$, dass

$$y^{(j+1)}(x) = g_j(x, y(x))$$

für eine $(p-j)$-mal stetig differenzierbare Funktion g_j.
Der Induktionsanfang ist durch (3.13) gegeben.
Der Schluss von j nach $j+1$ erfolgt durch die zu (3.13) analoge Formel

$$\begin{aligned} y^{(j+2)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y^{(j+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g_j(x, y(x)) \\ &= \frac{\partial g_j}{\partial x}(x, y(x)) + \sum_{i=1}^{k} f_i(x, y(x)) \frac{\partial g_j}{\partial y_i}(x, y(x)). \end{aligned}$$

Dadurch ist die Aussage für alle p gezeigt. ■

Ist also f beliebig oft differenzierbar, so gilt dies auch für y. Es ist also vernüftiger, wenn auch nicht gesichert, anzunehmen, dass sich eine Lösung von

$$y' = f(x, y)\,, \quad y(x_0) = y_0$$

zumindest in einer Umgebung von x_0 als Potenzreihe

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^n}{n!} \tag{3.14}$$

darstellen lässt, mit

$$a_n = y^{(n)}(x_0)\,. \tag{3.15}$$

Rezept 3.1 *Zur Lösung von* (3.14) *entwickle man y nach* (3.15) *in eine Potenzreihe. Die Koeffizienten $(a_n)_{n \in N}$ ergeben sich dann durch Reihenentwicklung von f oder iterierte Anwendung von* (3.13) *zur Berechnung von $y^{(n)}(x_0)$.*

Im folgenden betrachten wir einzelne Differentialgleichungen ($k = 1$).

Beispiel 3.4

$$y' = -2xy \qquad y(0) = 1\,.$$

Ansatz:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!} \\
y'(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1} \frac{x^i}{i!} \\
-2xy &= \sum_{i=0}^{\infty} -2x a_i \frac{x^i}{i!} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} -2a_i \frac{x^{i+1}}{i!} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} -2(i+1) a_i \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} -2i a_{i-1} \frac{x^i}{i!} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} -2i a_{i-1} \frac{x^i}{i!}
\end{aligned}$$

Da die Taylorreihen die gleiche Funktion sein sollen, müssen die Koeffizienten gleich sein.

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= -2ia_{i-1} \quad \textit{für alle} \;\; i = 0, 1, 2, \dots \\ a_0 &= 1 \end{aligned}$$

Für $i = 0$ sehen wir $a_1 = 0$. Induktiv sieht man daraus leicht

$$a_{2k+1} = 0 \quad \textit{für alle} \;\; k \in \mathbb{N}\,.$$

Es gilt nun auch

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{(-1)^k (2k)!}{k!} \\ a_0 &= \frac{(-1)^0}{0!} = 1\,. \end{aligned}$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} a_{2k+2} &= -2(2k+1)a_{2k} \\ &= -2(2k+1)\frac{(-1)^k (2k)!}{k!} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}(2k+2)(2k+1)(2k)!}{(k+1)k!} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}(2k+2)!}{(k+1)!} \end{aligned}$$

Wir finden also

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{k!} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} \\ &= \mathrm{e}^{-x^2} \end{aligned}$$

Man kann das Taylorreihenverfahren auch zur Approximation benutzen. Dies erfolgt im nächsten Beispiel.

Beispiel 3.5

$$y'' = \sin y \tag{3.16}$$

$$y(0) = 0\,, \;\; y'(0) = 1$$

Taylorreihenansatz

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} y^{(i)}(0) \frac{x^i}{i!}$$

Aus der Differentialgleichung bekommen wir leicht

$$y''(0) = \sin(y(0)) = \sin(0) = 0.$$

Durch das Differenzieren von (3.16) *erhalten wir auch Formeln für höhere Ableitungen.*

$$\begin{aligned}
y''' &= (\sin(y))' = \cos(y)y' \\
y'''(0) &= \cos(y(0)) \;\; y'(0) = 1 \\
y^{(4)} &= -\sin(y)\;(y')^2 + \cos(y)\;y'' \\
y^{(4)}(0) &= -0 \cdot 1^2 + 1 \cdot 0 = 0 \\
y^{(5)} &= -\cos(y)\;(y'^3) - \sin(y)\;2y'\;y'' - \sin(y)\;y'\;y'' + \cos(y)\;y''' \\
&= -\cos(y)\;(y')^3 - 3\sin(y)\;y'\;y'' + \cos(y)y''' \\
y^{(5)}(0) &= -1 \cdot 1^3 - 3 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 - 1 = 0 \\
y^{(6)} &= \cos(y)y^{(4)} - 3\sin(y)(y'')^2 + \sin(y)(y')^4 \\
&\quad - 6\cos(y)(y')^2y'' - 4\sin(y)y'y''' \\
y^{(6)}(0) &= 1 \cdot 0 - 0 + 0 - 0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

Als weitere Ableitungswerte ergeben sich bei $x_0 = 0$*:* $y^{(7)} = -9$, $y^{(8)} = 0$, $y^{(9)} = -45$, $y^{(10)} = 0$, $y^{(11)} = 756$, $y^{(12)} = 0$, $y^{(13)} = 23085$, $y^{(14)} = 0$, $y^{(15)} = -61479$, $y^{(16)} = 0$, $y^{(17)} = -26977860$, $\ldots$

Taylorreihe lokal ⇒ funktioniert für Intervalle wunderbar, für global fortsetzen mit weiteren Taylorreihen auf folgenden Intervallen.

Dies sieht man auch gut an den Abbildungen Abb. 3.2 auf der nächsten Seite-Abb. 3.5 auf Seite 72

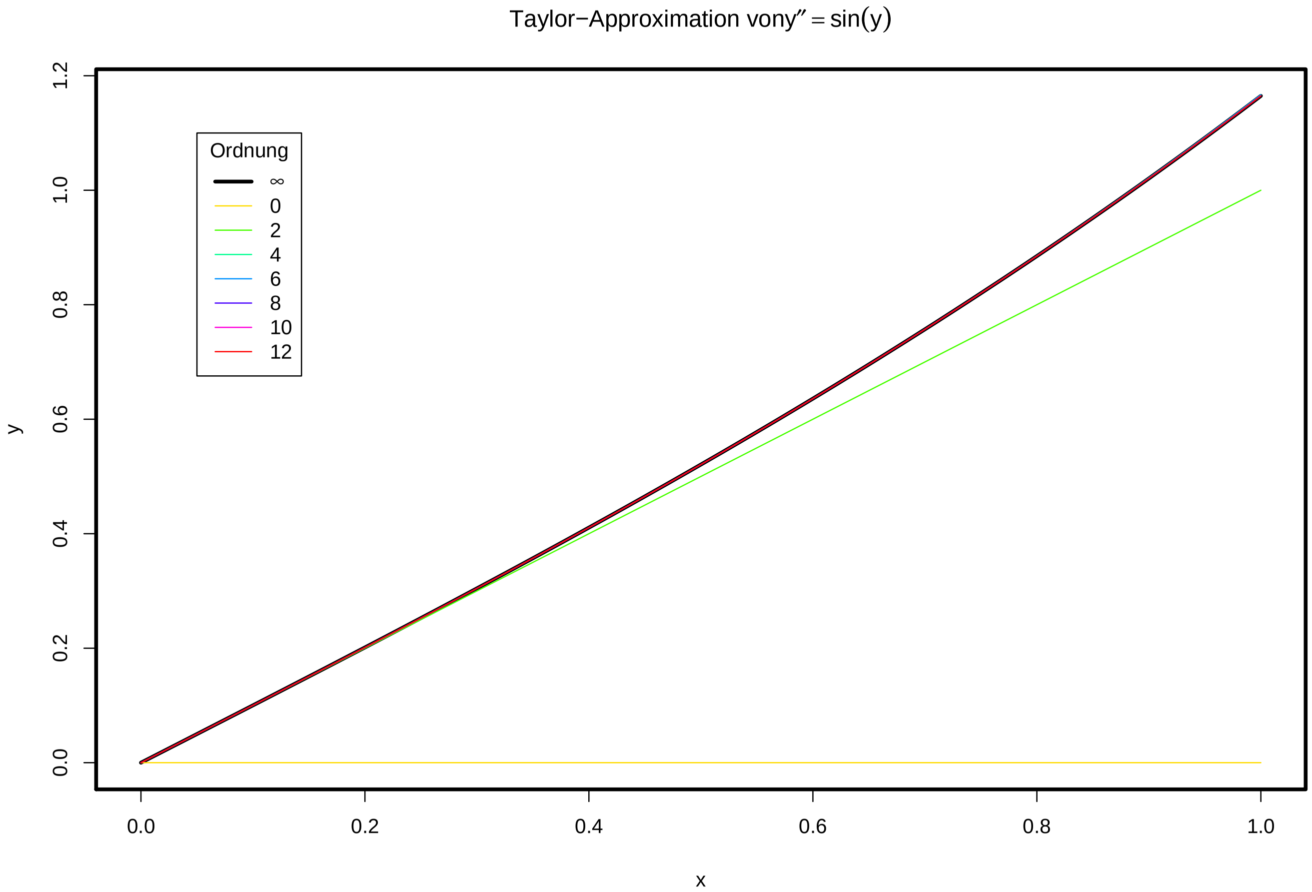


Abbildung 3.2: Taylorapproximation von $y'' = \sin(y)$ im Intervall $[0, 1]$

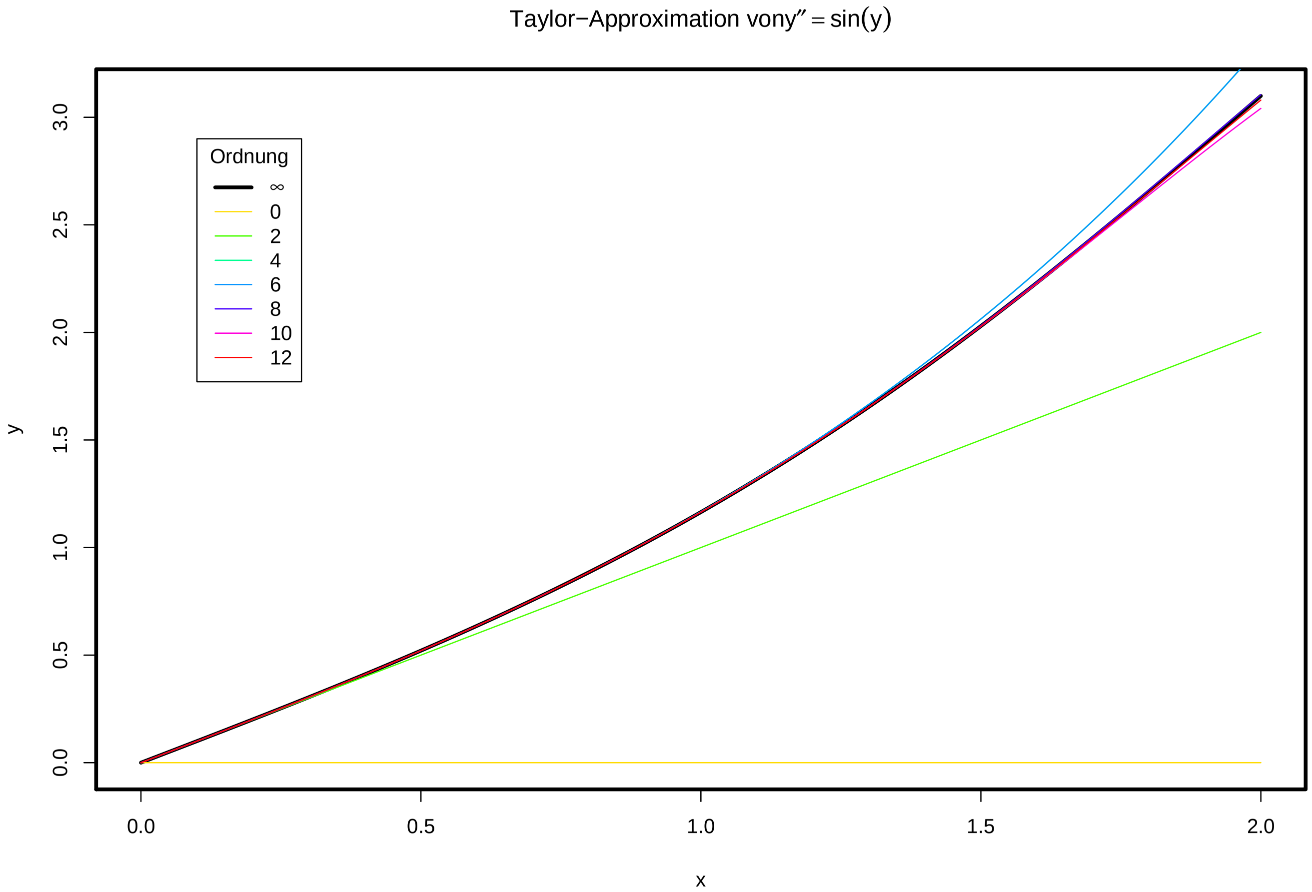


Abbildung 3.3: Taylorapproximation von $y'' = \sin(y)$ im Intervall $[0, 2]$

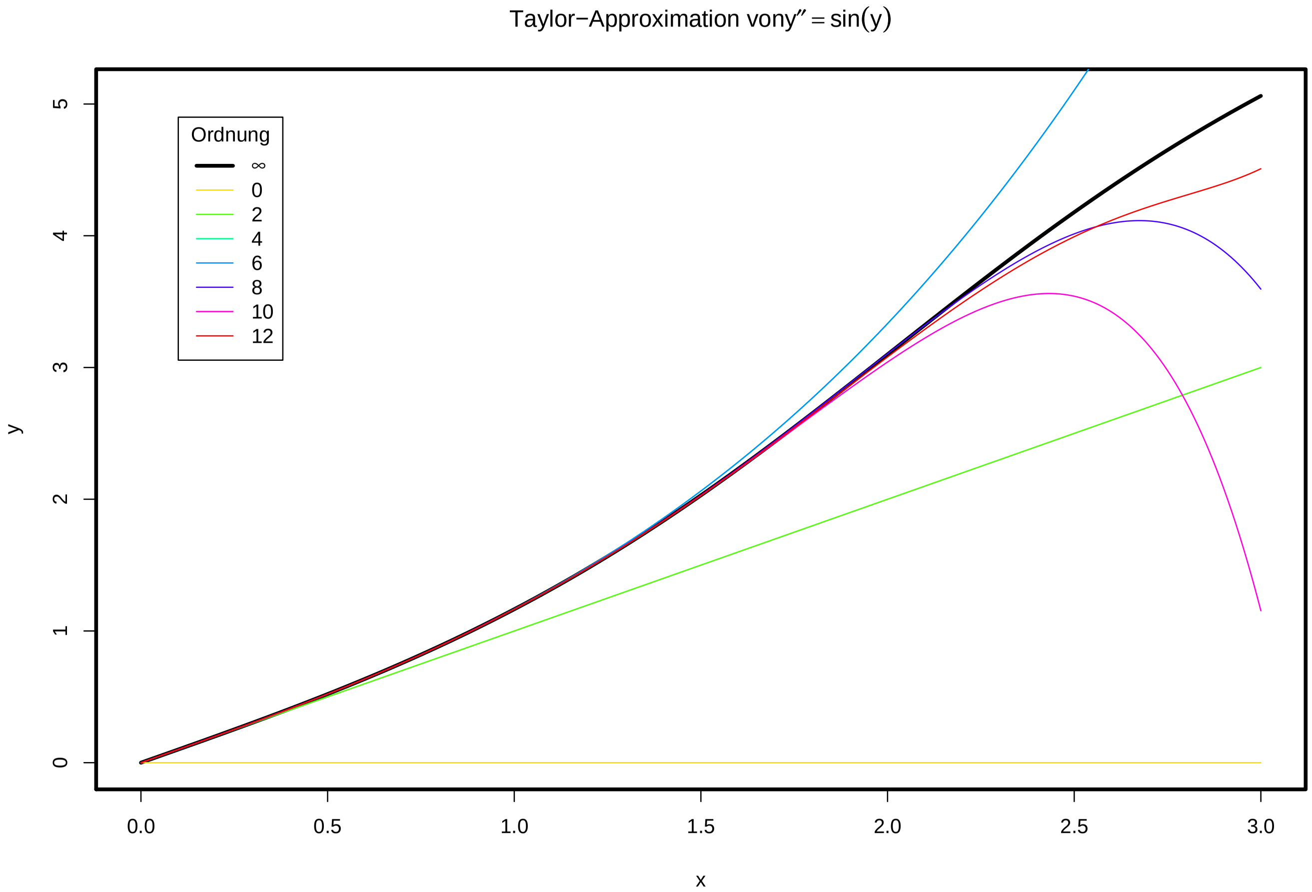


Abbildung 3.4: Taylorapproximation von $y'' = \sin(y)$ im Intervall $[0, 3]$

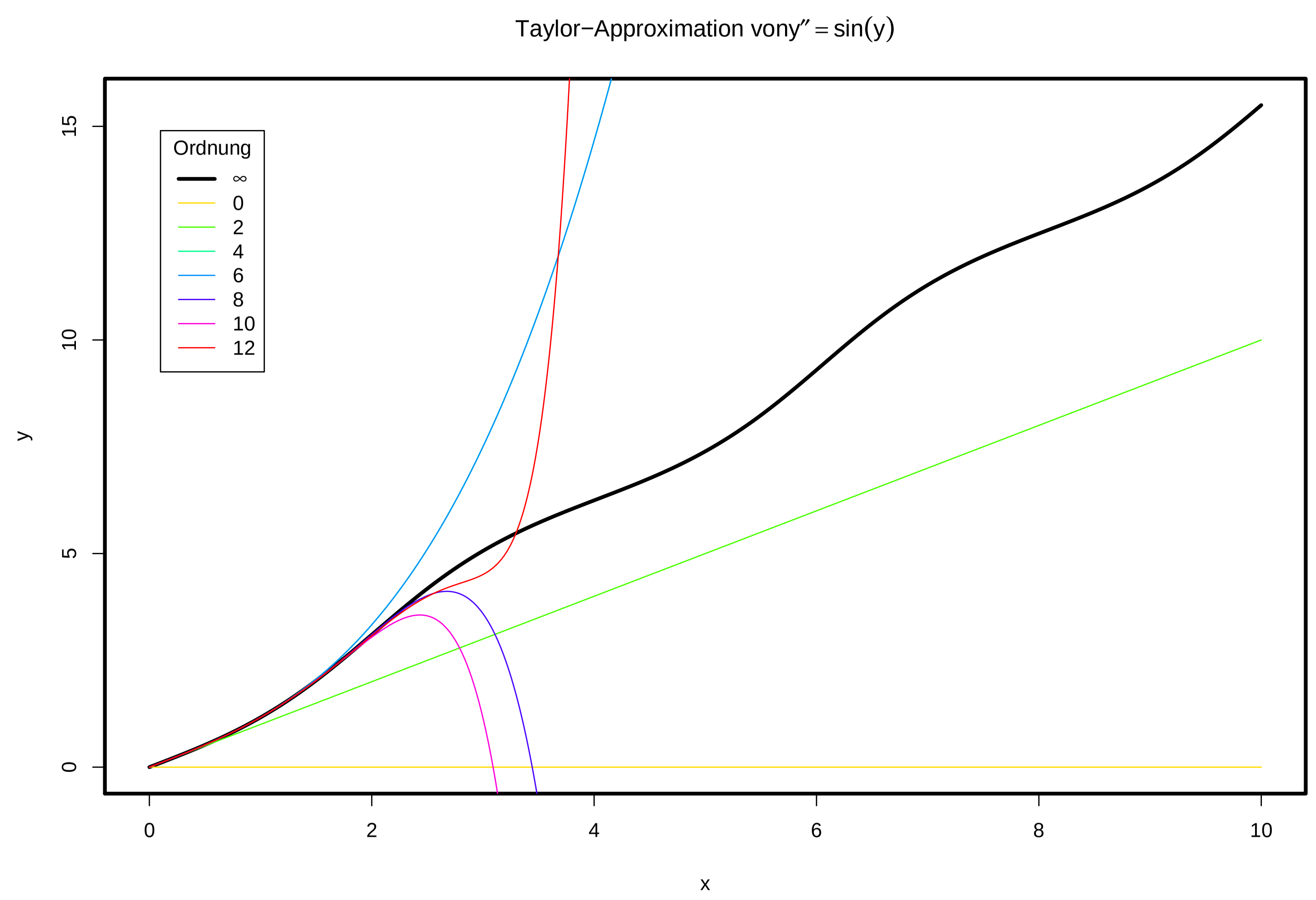


Abbildung 3.5: Taylorapproximation von $y'' = \sin(y)$ im Intervall $[0, 10]$

Kapitel 4

Lineare Differentialgleichungen

Eine allgemeines System aus linearen Differetialgleichungen erster Ordnung besitzt die Gestalt

$$y' = A(x)y + b(x)$$

mit gegebenen Funktionen $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{k\times k}$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$. Ist $b \equiv 0$, dann liegt ein homogenes System vor.

4.1 Das Exponential einer Matrix

Motivation *Die lineare Differentialgleichung*

$$y' = ry\,, \;\; y(0) = y_0$$

hat die Lösung

$$y(x) = \mathrm{e}^{rx} y_0\,.$$

Ein System linearer Differentialgleichungen (homogenen mit konstanten Koeffizienten) können wir in der Form

$$y' = Ay\,, \;\; y(0) = y_0$$

mit $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ *und* $y_0 \in \mathbb{R}^k$ *schreiben.*
Rein formal erwarten wir eine Lösung der Form

$$y(x) = \mathrm{e}^{Ax} y_0$$

Die recht Seite, speziell e^{Ax} *müssen wir erst definieren. Unser Ansatz dafür ist die Potenzreihenentwicklung von* e^x.
Konvention: $A^0 = Id$ $\quad$ *(*Id*: Einheitsmatrix)*

Satz 4.1 *Für $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

eintragsweise absolut.

Beweis: Seien

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^k\,, \quad B = (b_{ij})_{i,j=1}^k$$

zwei Matrizen und

$$M_A = \max_{1\le i,j\le k} |a_{ij}|\,, \quad M_B = \max_{1\le i,j\le k} |b_{ij}|\,.$$

Dann gilt für $1 \le i, j \le k$ beliebig:

$$\begin{aligned}
(AB)_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{k} a_{i\ell}\, b_{\ell j} \\
|(AB)_{ij}| &\le \sum_{\ell=1}^{k} |a_{i\ell}|\, |b_{\ell j}| \\
&\le \sum_{\ell=1}^{k} M_A\, M_B
\end{aligned}$$

Dadurch folgt

$$|(AB)_{ij}| \le k\, M_A\, M_B. \tag{4.1}$$

Durch Induktion beweisen wir nun, dass das

$$\max_{1\le i,j\le k} |(A^n)_{ij}| \le k^{n-1} M_A^n\,. \tag{4.2}$$

Der Induktionsanfang $n = 1$ ist gerade die Definition von M_A.

Für den Induktionsschritt $n \to n + 1$ benutzen wir (4.1)

$$\begin{aligned}
\max_{1\le i,j\le k} |(A^{n+1})_{ij}| &= \max_{1\le i,j\le k} |(A\, A^n)_{ij}| \\
&\le k\, M_A \max_{1\le i,j\le k} |(A^n)_{ij}| \\
&\le k\, M_A\, k^{n-1}\, M_A^n \\
&= k^n\, M_A^{n+1}.
\end{aligned}$$

Wir finden damit für beliebige $1 \leq i, j \leq k$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\frac{A^n}{n!} \right)_{ij} \right| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{n-1} M_A^n}{n!} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n M_A^n}{n!} \\ &= \mathrm{e}^{k M_A} < \infty.\end{aligned}$$

Damit konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

eintragsweise absolut. ■

Beispiel 4.1

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \qquad \textit{mit} \;\; a, b \in \mathbb{R}$$

Analog:

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{a^n}{n!}) & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{b^n}{n!}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^b \end{pmatrix}$$

Dies ist typisch für Diagonalmatrizen.

Beispiel 4.2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^n = 0 \;\; \textit{für alle} \;\; n \geq 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = Id + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist typisch für sogenannte nilpotente Matrizen, das heißt $A^m = 0$ für ein $m > 0$.

Beispiel 4.3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:B} = bB\,, \quad b \in \mathbb{R}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -Id$$

$$B^3 = -Id\,B = -B$$

$$B^4 = (B^2)^2 = Id$$

Also gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$B^{4k} = Id\,, \quad B^{4k+1} = B\,, \quad B^{4k+2} = -Id\,, \quad B^{4k+3} = -B\,,$$
$$B^{2k} = (-1)^k\,Id\,, \quad B^{2k+1} = (-1)^k\,B.$$

Das heißt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} B^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{b^{2k}}{(2k)!} B^{2k} + \frac{b^{2k+1}}{(2k+1)!} B^{2k+1} \Big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{b^{2k}}{(2k)!} (-1)^k Id \Big) + \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{b^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k B \Big) \\
&= \cos(b) Id + \sin(b) B \\
&= \begin{pmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Definition 4.1 *Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ heißt Matrixexponential der Matrix $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Symbol e^A.*

Satz 4.2 *Sei $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$.*

1. *Es gilt für die Nullmatrix 0:*
$$\mathrm{e}^0 = Id\,.$$

2. *Für s und $t \in \mathbb{R}$ gilt*
$$\mathrm{e}^{sA}\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{(s+t)A}\,.$$

3. e^A *ist invertierbar und es gilt*

$$(\mathrm{e}^A)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}\,.$$

4. Für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}^{tA}\big|_{t=t_0} = A\mathrm{e}^{t_0 A} = \mathrm{e}^{t_0 A}A\,.$$

Beweis:

1. Es gilt $0^0 = Id$ laut Definition. Daraus folgt

$$\mathrm{e}^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = Id + 0 + 0 + \cdots = Id.$$

2. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{sA}\mathrm{e}^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(sA)^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(tB)^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n A^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m A^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^n t^m}{n!m!} A^{n+m} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{p} \frac{s^{p-m} t^m}{(p-m)!m!} A^p \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} \sum_{m=0}^{p} \frac{p!}{(p-m)!m!} s^{p-m} t^m \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} s^{p-m} t^m \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} (s+t)^p \\
&= \mathrm{e}^{(s+t)A}.
\end{aligned}$$

3. Aus 1. und 2. leiten wir

$$\mathrm{e}^A\mathrm{e}^{-A} = \mathrm{e}^{(1-1)A} = \mathrm{e}^0 = Id \quad \text{und} \quad \mathrm{e}^{-A}\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{(-1+1)A} = \mathrm{e}^0 = Id$$

ab, das heißt $(\mathrm{e}^A)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}$.

4. Aus 2. erhalten wir mit beliebigen $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\Big(\mathrm{e}^{(t_0+h)A} - \mathrm{e}^{t_0 A}\Big) &= \frac{1}{h}\Big(\mathrm{e}^{hA}\mathrm{e}^{t_0 A} - \mathrm{e}^{t_0 A}\Big) \\
&= \frac{1}{h}\Big(\mathrm{e}^{hA} - Id\Big)\mathrm{e}^{t_0 A} \\
&= \frac{1}{h}\Big(\mathrm{e}^{t_0 A}\mathrm{e}^{hA} - \mathrm{e}^{t_0 A}\Big) \\
&= \mathrm{e}^{t_0 A}\frac{1}{h}\Big(\mathrm{e}^{hA} - Id\Big)
\end{aligned}$$

Folglich reicht es aus

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\mathrm{e}^{hA} - Id\Big) = A$$

zu zeigen. Wir finden

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\Big(\mathrm{e}^{hA} - Id\Big) &= \frac{1}{h}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n A^n}{n!} - Id\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^{n-1}A^n}{n!} \\
&= A + h\sum_{n=2}^{\infty}\frac{h^{n-2}A^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Benutzen wir (4.2), dann ergibt sich für $|h| < 1$

$$\begin{aligned}
\Big|\Big(\frac{1}{h}\Big(\mathrm{e}^{hA} - Id\Big) - A\Big)_{ij}\Big| &= \Big|h\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{h^{n-2}A^n}{n!}\Big)_{ij}\Big| \\
&\leq |h|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|h|^{n-2}}{n!}\Big|(A^n)_{ij}\Big| \\
&\leq |h|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|h|^{n-2}}{n!}k^{n-1}M_A^n \\
&\leq |h|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{k^n M_A^n}{n!} \\
&\leq \mathrm{e}^{kM_A}|h|.
\end{aligned}$$

Daraus schließen wir für alle $i, j \in \{1, \ldots, k\}$

$$\lim_{h\to 0}\Big(\frac{1}{h}\Big(\mathrm{e}^{hA} - Id\Big)\Big)_{ij} = A_{ij}.$$

Dadurch sind die vier Eigenschaften gezeigt. ■

4.2 Allgemeine Lösung

4.2.1 Lineare homogene Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

Satz 4.3 *Sei $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$, dann hat für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}^k$ das Anfangswertproblem*

$$y' = Ay\,,\ y(x_0) = y_0 \tag{4.3}$$

die maximale Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ mit

$$y(x) = \mathrm{e}^{(x-x_0)A} y_0. \tag{4.4}$$

Beweis: Die Abbildung $y \mapsto Ay$ ist (global) Lipschitz-stetig.

$$\begin{aligned}
\|Ay\| &= \max_{1\le i\le k} |(Ay)_i| \\
&= \max_{1\le i\le k} \Big| \sum_{j=1}^{k} a_{ij} y_j \Big| \\
&\le \max_{1\le i\le k} \sum_{j=1}^{k} \max_{1\le p,q\le k} |a_{pq}| \max_{1\le \ell\le k} |y_\ell| \\
&= k\ M_A\, \|y\|
\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\|Ay - A\tilde{y}\| = \|A(y-\tilde{y})\| \le k\ M_A\, \|y-\tilde{y}\|\,.$$

Damit folgt unter Nutzung von (4.4) und Anwendungen von Satz 3.8 auf Seite 61 und Satz 3.9 auf Seite 63, dass eine maximale Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ von (4.3) existiert, welche eindeutig ist. Aus Satz 4.2 auf Seite 76 1. erhalten wir

$$y(x_0) = \mathrm{e}^{(x_0-x_0)A} y_0 = \mathrm{e}^{0A} y_0 = \mathrm{e}^{0} y_0 = Id\ y_0 = y_0.$$

Ebenso folgt aus Satz 4.2 auf Seite 76 4.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{e}^{(x-x_0)A} y_0 = A\mathrm{e}^{(x-x_0)A} y_0 = Ay(x).$$

Mithin löst y (4.3), das heißt $y = \varphi$ und der Beweis ist vollständig. ■

Für die Verwendung dieses Satzes müssen wir also e^{xA} für beliebige Matrizen $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ ausrechnen. Dies wird mit Hilfe der linearen Algebra leichter. Wir sahen schon in Bsp. 4.1 auf Seite 75, dass Diagonalmatrizen besonders einfach zu exponenzieren sind.

Um Matrizen auf Diagonalgestalt zu bringen, benötigt man Eigenwerte und Eigenvektoren, welche auch bei rellen Matrizen komplex sein können. Deshalb dehnen wir unser Studium auf komplexe Matrizen aus.

Die entsprechende Theorie ergibt sich leicht aus der reellen:
Wir können den Vektorraum $\mathbb{C}^k \cong \mathbb{R}^{2k}$ unter der Identifizierung

$$a + b\mathrm{i} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

und die Matrizengruppe $\mathbb{C}^{k\times k} \subset \mathbb{R}^{2k\times 2k}$ unter der Identifizierung

$$a + b\mathrm{i} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

betrachten.

Satz 4.4 *Sei $A \in \mathbb{C}^{k\times k}$. Dann besitzt das Anfangswertproblem* (4.3) *für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{C}^k$ die eindeutig bestimmte maximale Lösung* (4.4).

Satz 4.5 *Seien $A\,, B \in \mathbb{C}^{k\times k}$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. *Wenn $AB = BA$, dann gilt*

$$\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^B \mathrm{e}^A\,.$$

2. *Ist $T \in \mathbb{C}^{k\times k}$ regulär (das heißt invertierbar), so gilt*

$$T^{-1}\,\mathrm{e}^A\,T = \mathrm{e}^{T^{-1}AT}\,.$$

3. *Hat A Blockdiagonalgestalt, das heißt $A = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_m)$*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_m \end{pmatrix},$$

dann gilt

$$\mathrm{e}^A = \mathrm{diag}\Big(\mathrm{e}^{A_1}, \ldots, \mathrm{e}^{A_m}\Big)\,.$$

Beweis:

1. Zunächst gilt mit der Produktregel und Satz 4.2 auf Seite 76 4.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\mathrm{e}^{xA}\,B\,\mathrm{e}^{-xA}\Big)\Big|_{x=x_0} &= \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{xA}\Big)\Big|_{x=x_0} B\,\mathrm{e}^{-x_0A} + \mathrm{e}^{x_0A}B\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\mathrm{e}^{-xA}\Big)\Big|_{x=x_0}\\ &= \mathrm{e}^{x_0A}AB\,\mathrm{e}^{-x_0A} + \mathrm{e}^{x_0A}\,B(-A)\,\mathrm{e}^{-x_0A}\\ &= \mathrm{e}^{x_0A}(AB+B(-A))\mathrm{e}^{-x_0A}\\ &= 0\end{aligned}$$

Also $x \mapsto \mathrm{e}^{xA}\,B\,\mathrm{e}^{-xA}$ konstant, das heißt

$$\mathrm{e}^{xA}\,B\,\mathrm{e}^{-xA} = \mathrm{e}^{0A}\,B\,\mathrm{e}^{-0A} = B\,.$$

Nach Satz 4.2 auf Seite 76 3. heißt dies, dass $\mathrm{e}^{xA}B = B\,\mathrm{e}^{xA}$. Nun erhalten wir für beliebige $y_0 \in \mathbb{C}^k$ mit der Produktregel

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{xA}\,\mathrm{e}^{xB}\,y_0 &= A\,\mathrm{e}^{xA}\,\mathrm{e}^{xB}\,y_0 + \mathrm{e}^{xA}\,B\,\mathrm{e}^{xB}\,y_0\\ &= A\,\mathrm{e}^{xA}\,\mathrm{e}^{xB}\,y_0 + B\,\mathrm{e}^{xA}\,\mathrm{e}^{xB}\,y_0\\ &= (A+B)(\mathrm{e}^{xA}\mathrm{e}^{xB}y_0)\end{aligned}$$

Damit löst $x \mapsto \mathrm{e}^{xA}\mathrm{e}^{xB}y_0$ das Anfangswertproblem

$$y' = (A+B)y\,,\quad y(0) = y_0\,.$$

Nach Satz 4.4 auf der vorherigen Seite ist also

$$\mathrm{e}^{xA}\,\mathrm{e}^{xB}\,y_0 = \mathrm{e}^{x(A+B)}\,y_0\,.$$

Da y_0 beliebig war, gilt

$$\mathrm{e}^{xA}\,\mathrm{e}^{xB} = \mathrm{e}^{x(A+B)}\,.$$

Mit $x = 1$ folgt die zu zeigende Formel.

2. Analog betrachten wir

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,T^{-1}\,\mathrm{e}^{xA}\,T\,y_0 &= T^{-1}\,A\,\mathrm{e}^{xA}\,T\,y_0\\ &= T^{-1}\,A\,T\,T^{-1}\,\mathrm{e}^{xA}\,T\,y_0.\end{aligned}$$

Damit löst $x \mapsto T^{-1}\,\mathrm{e}^{xA}\,T\,y_0$ das Anfangswertproblem

$$y' = (T^{-1}\,A\,T)y\,,\quad y(0) = y_0$$

und wir erhalten wieder

$$T^{-1}\,\mathrm{e}^{xA}\,T = \mathrm{e}^{xT^{-1}AT}\,.$$

Mit $x = 1$ entsteht die behauptete Formel.

3. Man sieht leicht, dass die Differentialgleichungen über die Blöcke entkoppeln. Anwendung von Satz 4.4 auf Seite 80 auf jeden einzelnen Block liefert das Ergebnis.

Damit sind die drei Eigenschaften nachgewiesen. ■

In der linearen Algebra kann man den folgenden Satz beweisen.

Satz 4.6 *(Jordan-Zerlegung) Sei $A \in \mathbb{C}^{k\times k}$, dann existiert eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{C}^{k\times k}$, sodass $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(A_1,\dots,A_m)$, Jeder Block A_ℓ besitzt die Gestalt (λ) oder*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Anmerkungen (4.5) *heißt Jordan-Block. Man sieht dann, dass λ ein Eigenwert von A_ℓ (und A) mit Eigenvektor e_1 ist. Alle anderen Einheitsvektoren erfüllen*

$$A_\ell\, e_{i+1} = \lambda\, e_{i+1} + e_i\,.$$

Rezept 4.1 *(Lösung von $y' = Ay$)*

1. *Man transformiert A in die Jordansche Normalform laut Satz 4.6.*

2. *Man löse die Differentialgleichung für jeden Jordan-Block extra (siehe Satz 4.5 auf Seite 80 3.).*

3. *Man transformiere die Lösung zurück (siehe Satz 4.5 auf Seite 80 2.).*

Beispiel 4.4

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2\,, \quad y_1(0) = 1 \\ y_2' &= 2y_1 + 3y_2\,, \quad y_2(0) = 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Eigenwerte ausrechnen:

$$\begin{aligned} (1-\lambda)(3-\lambda) + 2 &= 0 \\ \lambda^2 - 4\lambda + 3 + 2 &= 0 \\ \lambda^2 - 4\lambda + 5 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm \mathrm{i} \end{aligned}$$

3. Eigenvektoren:

$$\begin{aligned} \textit{Eigenvektor zu } \lambda_1 &= 2 + \mathrm{i} \\ (1-(2+\mathrm{i}))y_1 - y_2 &= 0 \\ y_2 &= (-1-\mathrm{i})y_1 \\ \textit{Eigenvektor: } &\begin{pmatrix} 1 \\ -1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ \textit{Eigenvektor zu } \lambda_2 = 2 - \mathrm{i} \textit{ analog: } &\begin{pmatrix} 1 \\ -1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ \textit{Transformationsmatrix}: & \\ T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1-\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ T^{-1}\,A\,T &= \begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. *T^{-1} ausrechnen:*

$$\begin{aligned}
Ty &= z \\
y_1 + y_2 &= z_1 \\
\Rightarrow y_2 &= z_1 - y_1 \\
(-1-\mathrm{i})y_1 + (-1+\mathrm{i})y_2 &= z_2 \\
\Rightarrow (-1-\mathrm{i})y_1 + (-1+\mathrm{i})z_1 + (1-\mathrm{i})y_1 &= z_2 \\
-2\mathrm{i}y_1 &= (1-\mathrm{i})z_1 + z_2 \\
y_1 &= \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})z_1 + \frac{\mathrm{i}}{2}z_2 \\
y_2 &= z_1 - y_1 = \frac{1}{2}(1-\mathrm{i})z_1 - \frac{\mathrm{i}}{2}z_2 \\
T^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1+\mathrm{i}}{2} & \frac{\mathrm{i}}{2} \\ \frac{1-\mathrm{i}}{2} & -\frac{\mathrm{i}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

5. *Das lineare Differentialgleichungssystem*

$$z' = T^{-1}\,A\,T\,z$$

hat die Lösung

$$z(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})x} \end{pmatrix} z(0) \quad \textit{siehe Bsp. 4.1.}$$

6. *Rücktransformation:*

$$\begin{aligned}
y' &= Ay \ \textit{ hat die Lösung} \\
y(x) &= T \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})x} \end{pmatrix} T^{-1}\,y(0) \\
y(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T^{-1}\,y(0) = \begin{pmatrix} \frac{1+\mathrm{i}}{2} \\ \frac{1-\mathrm{i}}{2} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\mathrm{i}}{2} \\ \frac{1-\mathrm{i}}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1+\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x} \\ \frac{1-\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})x} \end{pmatrix} \\
y(x) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1-\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x} \\ \frac{1-\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})x} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1+\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x} + \frac{1-\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})x} \\ -\frac{(1+\mathrm{i})^2}{2}\,\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x} - \frac{(1-\mathrm{i})^2}{2}\,\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})x} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x}\,(\cos x - \sin x) \\ \mathrm{e}^{2x}\,2\sin x \end{pmatrix} \\
\textit{das heißt } y_1 &= \mathrm{e}^{2x}\,(\cos x - \sin x) \\
y_2 &= \mathrm{e}^{2x}\,2\sin x
\end{aligned}$$

Beispiel 4.5

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_1 + y_2 \\
y_2' &= y_2 \\
A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir laut Satz 4.5 auf Seite 80 und Bsp. 4.2

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{xA} = \mathrm{e}^{x\,Id}\,\mathrm{e}^{x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} &= \mathrm{e}^x Id \left(Id + \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \\
\textit{also gilt} \quad y(x) &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & x\,\mathrm{e}^x \\ 0 & \mathrm{e}^x \end{pmatrix} y(0) \\
y_1(x) &= y_1(0)\,\mathrm{e}^x + y_2(0)\,x\,\mathrm{e}^x \\
y_2(x) &= y_2(0)\,\mathrm{e}^x
\end{aligned}
$$

Dieser Lösungsweg ist einfacher als die Transformationen aus 2.3 auf Seite 23. Für allgemeine Jordan-Blöcke erhält man

$$
\exp\left(x \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \right) = \mathrm{e}^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \cdots & \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ & 1 & x & \cdots & \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & x \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.
$$

4.2.2 Lineare homogene Differentialgleichungen mit variablen Koffizienten

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Wir befassen uns jetzt mit Systemen aus homogenen linearen Differentialgleichungen

$$
y' = A(x)y, \tag{4.7}
$$

wobei die Koeffizientenfunktionen $A : I \to \mathbb{R}^{k \times k}$ gegeben sind und die Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ gesucht ist.

Definition 4.2 *Zur homogenen linearen Dgl.* (4.7) *bezeichne* $\mathcal{L}_{\mathrm{H}}$ *die Menge aller Lösungen auf* I.

Definition 4.3 *Eine Menge* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ *aus Funktionen* $\varphi_i : I \to \mathbb{R}^k$ *heißt* linear unabhängig *über* $\mathbb{R}$*, wenn mit* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i(x) = 0 \quad \textit{für alle} \;\; x \in I \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0.$$

Satz 4.7 *Sei* $A : I \to \mathbb{R}^{k \times k}$ *stetig. Dann ist* $\mathcal{L}_{\mathrm{H}}$ *ein* k*-dimensionaler Vektorraum über* $\mathbb{R}$*. Für eine Menge von Lösungen* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset \mathcal{L}_{\mathrm{H}}$ *sind äquivalent:*

i) Die Menge $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ *ist linear unabhängig über* $\mathbb{R}$*.*

ii) Es existiert ein $x_0 \in I$*, so dass die Vektoren* $\{\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_m(x_0)\} \subset \mathbb{R}^k$ *linear unabhängig sind.*

iii) Für jedes $x_0 \in I$ *sind die Vektoren* $\{\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_m(x_0)\} \subset \mathbb{R}^k$ *linear unabhängig.*

Beweis:

1. $\mathcal{L}_{\mathrm{H}}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$:
   Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{\mathrm{H}}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$(\varphi + \psi)' = \varphi' + \psi' = A\varphi + A\psi = A(\varphi + \psi)$$
$$(\lambda\varphi)' = \lambda\varphi' = \lambda A\varphi = A(\lambda\varphi)$$

2. Wir zeigen die Äquivalenzen (i)-(iii). Die Implikationen (iii) $\to$ (ii) $\to$ (i) sind klar für allgemeine Funktionen. Wir brauchen daher nur noch (i) $\to$ (iii) zu zeigen. Dabei wird ein indirekter Beweis verwendet.

   Seien $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset \mathcal{L}_{\mathrm{H}}$ linear unabhängig und $x_0 \in I$ beliebig. Angenommen die Menge der Vektoren $\{\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_m(x_0)\}$ wäre linear abhängig. Dann gäbe es reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ mit

$$\lambda_1\varphi_1(x_0) + \cdots + \lambda_m\varphi_m(x_0) = 0$$

   und nicht alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sind gleich null. Desweiteren gilt wegen Teil 1.

$$\psi := \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_m\varphi_m \in \mathcal{L}_{\mathrm{H}}.$$

   Es gilt $\psi(x_0) = 0$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung von Anfangswertproblemen des Differentialgleichungssystems (4.7) folgt $\psi \equiv 0$. Damit ist die Funktionenmenge $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ aber linear abhängig über $\mathbb{R}$. Es entsteht ein Widerspruch.

3. Wir haben noch $\dim(\mathcal{L}_\mathrm{H}) = k$ zu zeigen. Seien $e_1, \dots, e_k$ die Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^k$ und $x_0 \in I$ beliebig. Zu den Anfangsbedingungen

$$\varphi_i(x_0) = e_i \qquad \text{für } \; i = 1, \dots, k$$

existieren lokal jeweils eindeutige Lösungen. Die Existenz und Eindeutigkeit globaler Lösungen $\varphi_i : I \to \mathbb{R}^k$ gilt wegen Satz 3.9, da das Differentialgleichungssystem (4.7) die Nicht-Explosions-Bedingung (3.11) erfüllt.

Die Lösungen $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ sind linear unabhängig wegen Teil 2 (ii), weil die Einheitsvektoren linear unabhängig sind. Somit folgt $\dim(\mathcal{L}_\mathrm{H}) \geq k$. Andererseits gilt $\dim(\mathcal{L}_\mathrm{H}) \leq k$, denn wegen Teil 2 (iii) können nur bis zu k Vektoren in $\mathbb{R}^k$ linear unabhängig sein.

Dadurch sind alle Aussagen des Satzes gezeigt. ■

Definition 4.4 *Eine Menge $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ aus linear unabhängigen Lösungen eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems heißt* Fundamentalsystem. *Diese Lösungen bilden eine* Fundamentalmatrix

$$\Phi : I \to \mathbb{R}^{k \times k}, \qquad \Phi = (\varphi_1 \; \varphi_2 \; \cdots \; \varphi_k).$$

(Die Lösungen aus dem Fundamentalsystem liefern die Spalten der Fundamentalmatrix.)

Satz 4.7 zeigt die Existenz eines Fundamentalsystems. Jedoch gibt es kein allgemeines Konstruktionsprinzip bzw. Lösungsverfahren zur Bestimmung eines Fundamentalsystems.

Es ergibt sich aus Definition 4.4 sofort die nächte Folgerung.

Satz 4.8 *Für die Ableitungen der Funktionen in der Fundamentalmatrix gilt*

$$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x)$$

für alle $x \in I$.

Satz 4.9 *Für eine Funktionalmatrix Φ sind alle Matrizen $\Phi(x_0) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ für $x_0 \in I$ regulär.*

Beweis: Satz 4.7 (iii) zeigt

$$\det(\Phi(x_0)) \neq 0 \qquad \text{für alle } \; x_0 \in I.$$

und damit die Behauptung. ■

Mit $c = (c_1, \dots, c_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ gilt für das Matrix-Vektor-Produkt

$$\Phi c = c_1\varphi_1 + \cdots c_k\varphi_k \in \mathcal{L}_{\mathrm{H}}.$$

Wir betrachten Anfangwertprobleme

$$y' = A(x)y, \qquad y(x_0) = y_0.$$

Für die zugehörige Lösung ergibt sich die Formel

$$y(x) = \Phi(x)\Phi(x_0)^{-1}y_0,$$

denn es gilt $y(x_0) = \Phi(x_0)\Phi(x_0)^{-1}y_0 = y_0$.

Im Spezialfall eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten, d.h. $y' = Ay$ mit $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ konstant, folgt als Fundamentalmatrix

$$\Phi(x) = \mathrm{e}^{xA} \qquad \text{oder} \qquad \Phi(x) = \mathrm{e}^{(x-x_0)A}$$

mit der Matrixexponentiellen aus Kapitel 4.1.

4.2.3 Lineare inhomogene Differentialgleichungen mit variablen Koffizienten

Sei wieder $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Wir behandeln jetzt Systeme aus inhomogenen linearen Differentialgleichungen

$$y' = A(x)y + b(x), \tag{4.8}$$

wobei die Koeffizientenfunktionen $A : I \to \mathbb{R}^{k\times k}$ und $b : I \to \mathbb{R}^k$ gegeben sind und die Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ gesucht ist.

Definition 4.5 *Zur inhomogenen linearen Dgl.* (4.8) *bezeichne $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$ die Menge aller Lösungen auf I.*

Satz 4.10 *Seien $A : I \to \mathbb{R}^{k\times k}$ und $b : I \to \mathbb{R}^k$ stetig. Ist $\psi \in \mathcal{L}_{\mathrm{I}}$ eine spezielle Lösung, dann gilt*

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}} = \{\psi + \varphi \;:\; \varphi \in \mathcal{L}_{\mathrm{H}}\},$$

wobei $\mathcal{L}_{\mathrm{H}}$ die Lösungsmenge der zugehörigen homogenen Dgl. $y' = A(x)y$ ist.

Beweis: Die Stetigkeit von A und b garantiert die Nicht-Explosions-Bedingung aus Satz 3.9, sodass Lösungen auf ganz I existieren.

Sei $\eta \in \mathcal{L}_{\mathrm{I}}$. Es folgt

$$(\eta - \psi)' = \eta' - \psi' = A\eta + b - (A\psi + b) = A(\eta - \psi).$$

Also gilt $\eta - \psi \in \mathcal{L}_{\mathrm{H}}$. Somit $\eta = \psi + (\eta - \psi)$ mit $\eta - \psi \in \mathcal{L}_{\mathrm{H}}$. Wir haben daher

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}} \subseteq \{\psi + \varphi \;:\; \varphi \in \mathcal{L}_{\mathrm{H}}\}.$$

Sei umgekehrt $\eta \in \{\psi + \varphi \;:\; \varphi \in \mathcal{L}_{\mathrm{H}}\}$. Also $\eta = \psi + \varphi$ mit einem $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathrm{H}}$. Es folgt

$$\eta' = \psi' + \varphi' = A\psi + b + A\varphi = A(\psi + \varphi) + b = A\eta + b.$$

Somit $\eta \in \mathcal{L}_{\mathrm{I}}$. Wir haben demzufolge

$$\{\psi + \varphi \;:\; \varphi \in \mathcal{L}_{\mathrm{H}}\} \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{I}}$$

und die Gleichheit der Mengen ist gezeigt. ■

Satz 4.10 besagt, dass wir aus einer speziellen Lösung der inhomogenen Dgl. und der gesamte Lösungsmenge der zugehörigen homogenen Dgl. dann die gesamte Lösungsmenge der inhomogenen Dgl. erhalten.

Variation der Konstanten

Die Konstruktion einer speziellen Lösung ist mit einer Variation der Konstanten analog zu Rezept 2.2 aus Kapitel 2.3 möglich. Dazu wird angenommen, dass ein Fundamentalsystem $\Phi(x)$ der zugehörigen homogenen Dgl., siehe Definition 4.4, bereits vorliegt.

Ansatz:

$$y(x) = \Phi(x)c(x).$$

Es gilt mit der Produktregel der Differentiation

$$y' = \Phi' c + \Phi c'$$

Mit Satz 4.8 folgt

$$y' = Ay + b = A(\Phi c) + b = (A\Phi)c + b = \Phi' c + b.$$

Gleichsetzen liefert mit der Regularität der Fundamentalmatrix aus Satz 4.9

$$\begin{aligned}\Phi' c + \Phi c' &= \Phi' c + b \\ \Phi c' &= b \\ c' &= \Phi^{-1} b.\end{aligned}$$

Eine Integration zeigt die Formel für die unbekannten Koeffizienten

$$c(x) = \int \Phi(s)^{-1} b(s)\ \mathrm{d}s.$$

Sind die Funktionen in der inversen Matrix Φ^{-1} gegeben, dann verbleibt zur Bestimmung von c nur noch Stammfunktionen zu finden.

Wir betrachten jetzt Anfangswertprobleme.

Satz 4.11 *Die Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = A(x)y + b(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

lautet

$$y(x) = \Phi(x) \left[\int_{x_0}^{x} \Phi(s)^{-1} b(s)\ \mathrm{d}s + \Phi(x_0)^{-1} y_0 \right].$$

Beweis: Satz 4.9 garantiert die Existenz der inversen Matrizen. Wir definieren

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi(s)^{-1} b(s)\ \mathrm{d}s + \Phi(x_0)^{-1} y_0,$$

d.h. $y = \Phi c$. Differentiation liefert

$$\begin{aligned} y'(x) &= \Phi'(x)c(x) + \Phi(x)c'(x) \\ &= A(x)\Phi(x)c(x) + \Phi(x)\Phi(x)^{-1}b(x) \\ &= A(x)y(x) + b(x). \end{aligned}$$

Somit ist y eine Lösung des Differentialgleichungssystems. Die Anfangsbedingung folgt aus $c(x_0) = \Phi(x_0)^{-1} y_0$, wodurch $y(x_0) = \Phi(x_0)\Phi(x_0)^{-1} y_0 = y_0$ sicher gestellt ist. ∎

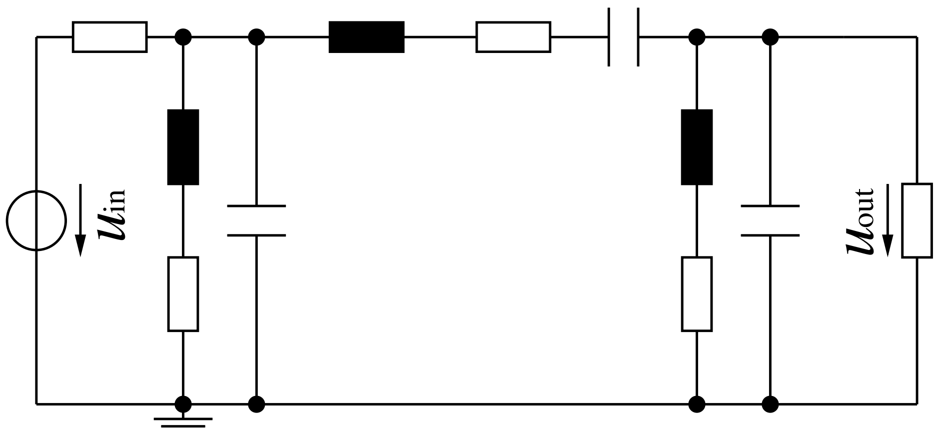


Abbildung 4.1: Elektrische Schaltung eines Band-Pass-Filters

Beispiel 4.6 *Elektrische Schaltung: Band-Pass-Filter*

Abb. 4.1 zeigt die elektrische Schaltung eines Band-Pass-Filters. Diese Schaltung enthält Kondensatoren, Spulen und Widerstände. Eine Spannungsquelle führt eine Eingangsspannung u_{in} ein, während die Ausgangsspannung u_{out} an einem Widerstand vorliegt.

Eine mathematische Modellierung führt auf ein Differentialgleichungssystem der Form $y' = Ay + b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1R_0} & 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_2R_4} & 0 & -\frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & -\frac{R_1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & -\frac{R_2}{L_2} & 0 \\ \frac{1}{L_3} & -\frac{1}{L_3} & -\frac{1}{L_3} & 0 & 0 & -\frac{R_3}{L_3} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} \frac{u_{\text{in}}(x)}{C_1R_0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist konstant, während der Vektor b variabel ist. Die unabhängige Veränderliche x hat die Bedeutung der Zeit. Die Unbekannten y sind 6 Spannungen, wobei die Ausgangsspannung $u_{\text{out}} = y_3$ ist. Die verwendeten physikalischen Parameter lauten $C_1 = C_2 = C_3 = L_1 = L_2 = L_3 = R_0 = R_4 = 1$, $R_1 = R_2 = R_3 = 0.01$. Als Eingangsspannung wird das Signal $u_{\text{in}}(x) = \sin(10^{-3}x^2)$ vorgegeben, welches einer harmonischen Oszillation mit einer zeitlich ansteigenden Frequenz entspricht. Ein Anfangswertproblem wird vorgegeben mit $y(0) = 0$. Abb. 4.3 zeigt die zugehörige Ausgangsspannung. Wir beobachten, dass zu kleinen Zeiten ($x < 100$) die Ausgangspannung nahe null ist, da die Eingangsspannung eine niedrige Frequenz besitzt. Dann steigt die Amplitude der Ausgangsspannung

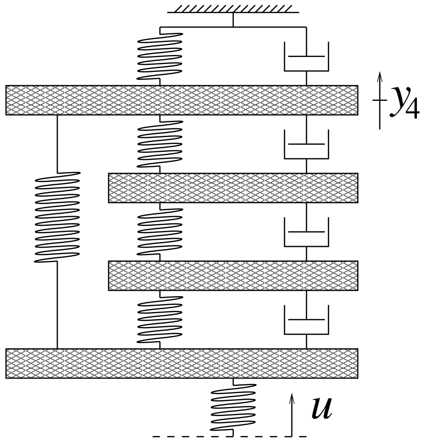


Abbildung 4.2: Masse-Feder-Dämpfer Konfiguration

eine Zeit lang auf etwa 0.5*. Für* $x > 1000$ *sinkt die Ausgangsspannung auf null ab, da die Eingangsspannung jetzt eine hohe Frequenz aufweist. Dies stellt das Verhalten eines Band-Pass-Filters dar, weil nur für ein bestimmtes Frequenzfenster das Signal durch die Schaltung hindurch gelassen wird.*

Beispiel 4.7 *Mechanisches System: Masse-Feder-Dämpfer*

Abb. 4.2 illustriert eine bestimmte Konfiguration aus Massen, Federn und Dämpfern. Eine mathematische Modellierung erzeugt ein lineares System aus Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Gestalt

$$My''(x) + Dy'(x) + Ky(x) = b(x). \tag{4.9}$$

Die unabhängige Veränderliche x *hat die Bedeutung der Zeit und die Lösung ist* $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^\top$*. Die konstanten Matrizen und der variable Vektor lauten*

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} d_1 & -d_1 & 0 & 0 \\ -d_1 & d_1 + d_2 & -d_2 & 0 \\ 0 & -d_2 & d_2 + d_3 & -d_3 \\ 0 & 0 & -d_3 & d_3 + d_4 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + k_5 & -k_2 & 0 & -k_5 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ -k_5 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 + k_6 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} k_1 u(x) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die externe Anregung u *erfolgt an der untersten Feder. Wir geben das Signal* $u(x) = \sin(10^{-4}x^2)$*, das eine harmonische Oszillation mit zeitlich ansteigender*

Frequenz darstellt, vor. Wir beobachten die Position y_4 *der obersten Masse. Die physikalischen Parameter werden gesetzt auf* $m_1 = 1$, $m_2 = 5$, $m_3 = 25$, $m_4 = 125$, $k_1 = 27$, $k_2 = 9$, $k_3 = 3$, $k_4 = 1$, $k_5 = 2$, $k_6 = 3$, $d_1 = 0.1$, $d_2 = 0.4$, $d_3 = 1.6$, $d_4 = 1$. *Wir betrachten das Anfangswertproblem zu* (4.9) *mit* $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Das System (4.9) *ist äquivalent zu einem linearen Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Abb. 4.4 veranschaulicht die Beobachtungsgröße aus dem zugehörigen Anfangswertproblem. Wir stellen fest, dass bei stets steigender Frequenz der Anregung* u *die Amplitude der Auslenkung* y_4 *mit der Zeit auf ein Maximum (bei* $x \approx 1100$*) ansteigt und dann wieder abfällt bis auf null. Dies stellt ein typisches Resonanzverhalten dar.*

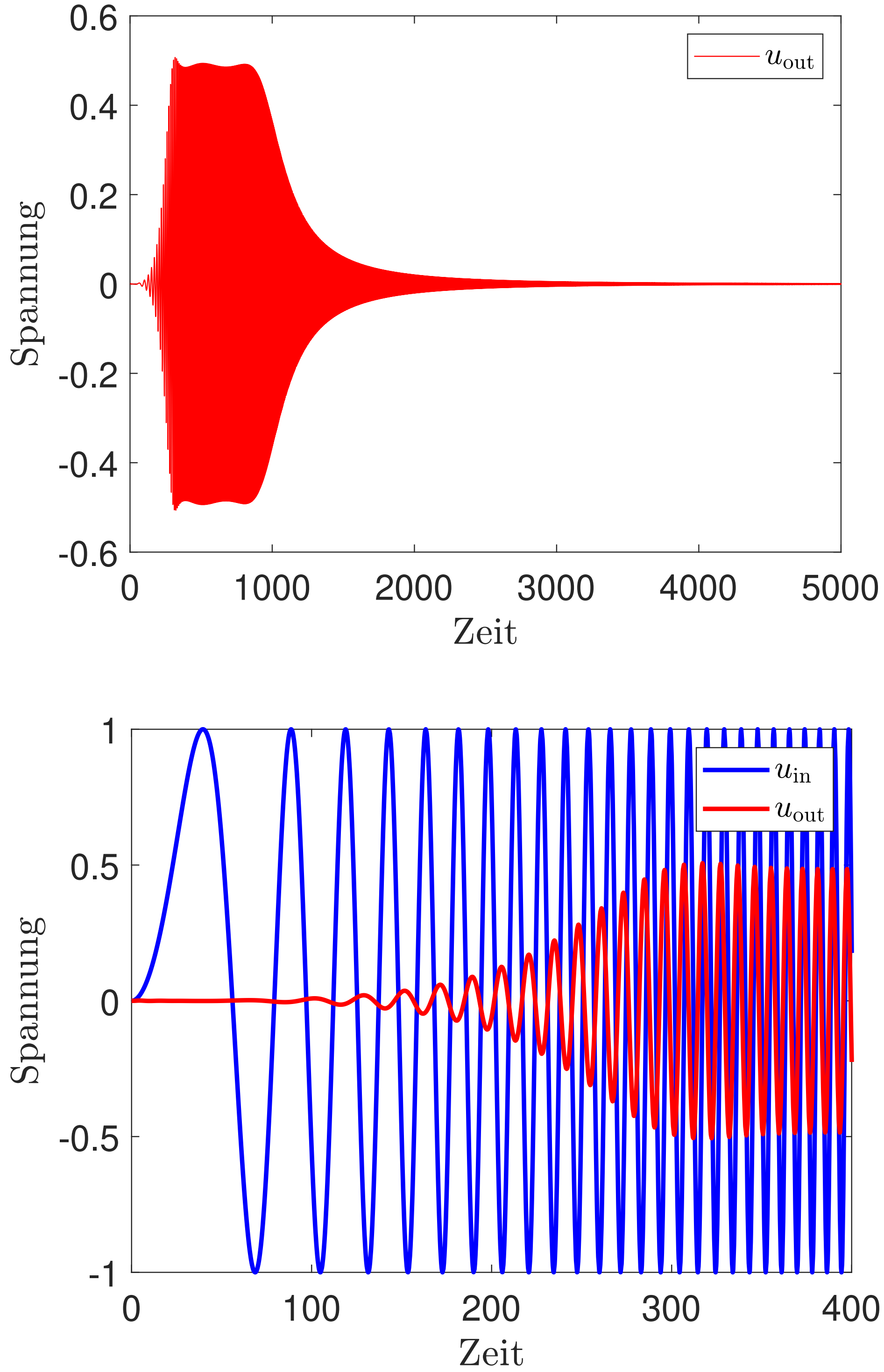
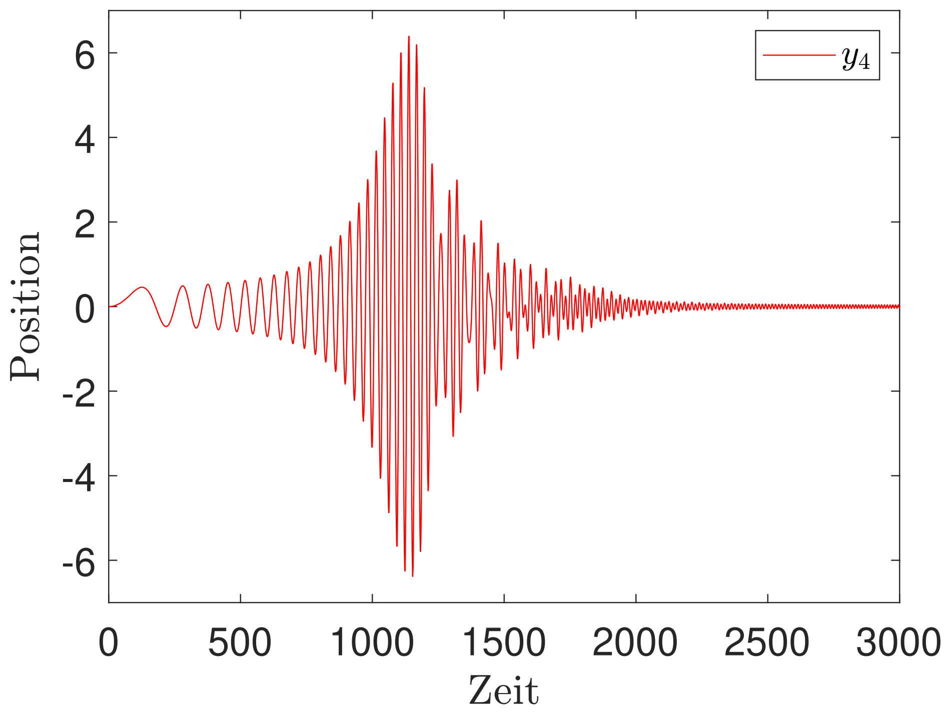


Abbildung 4.3: Ausgangsspannung aus Lösung eines Anfangswertproblems zum Modell des Band-Pass-Filters



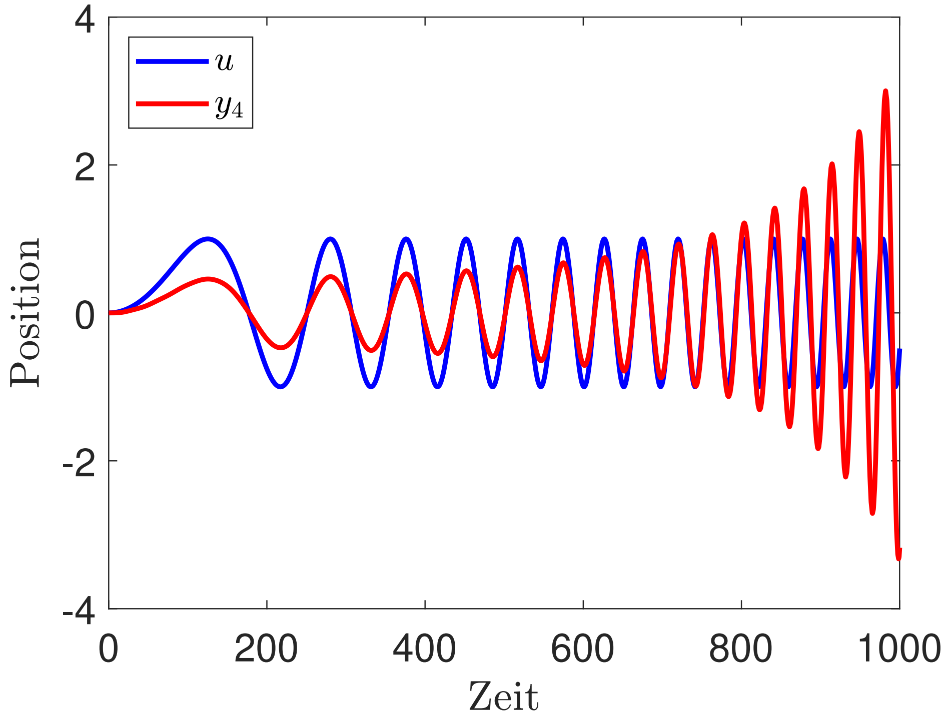


Abbildung 4.4: Beobachtungsgröße aus Lösung eines Anfangswertproblems zum Masse-Feder-Dämpfer-System.