Funktionalanalysis

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Michael Schürmann

Themenliste für die mündliche Prüfung

I. Banachräume

1. Der Hilbertraum $l^2(N)$

Definition normierter Vektorraum, Banach-Raum; Beispiele: Folgenräume, Raum der stetigen Funktionen auf kompaktem Intervall

Äquivalenz von Normen

Einführung des Hilbert-Raumes $l^2(N)$

Satz I.1.2: Normierter Vektorraum endlich-dimensional g.d.w. Einheitskugel kompakt

2. Hilberträume

Definition; Beispiele: $l^2(N)$, allgemein: L^2-Räume, direkte Summe

Orthonormalsysteme, vollständige Orthonormalsysteme

Satz I.2.1 und **Korollar I.2.2**: Besselsche Ungleichung, Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Separabilität von Hilbert-Räumen (**Satz I.2.3** und **Satz I.2.4**)

Satz I.2.5: Parcevalsche Gleichung, Fourier-Entwicklung; Korollar **I.2.6**

Satz I.2.7: Punkt geringsten Abstands (Lotfällen); Projektionssatz (**Satz I.2.8**)

Satz I.2.9: Lemma von Riesz; im Anschluss: Folgerung über „beschränkte" Sesquilinearformen

3. Stetige lineare Operatoren

Satz I.3.1: Äquivalenz Stetigkeit und Beschränktheit für lineare Operatoren auf normierten Vektorräumen; **Satz I.3.2** und **Satz I.3.3** sowie **Satz I.3.4**

4. Hahn-Banach-Sätze

Satz I.4.4 (von Hahn-Banach): „Ur-Satz"

Satz I.4.5: „Ur-Trennungssatz"

Satz I.4.7: Fortsetzungssatz komplex, **Korollar I.4.8**: Fortsetzungssatz Hauptanwendung

Korollar I.4.9 und **Korollar I.4.10**: Trennungssätze Versionen 1 + 2

Anwendungen: schwache Topologie, Einbettung von X in X´´, Satz von Banach-Alaoglu (**Satz I.4.11**)

5. Anwendungen des Satzes von Baire

Satz I.5.2, **Satz I.5.3** (von Banach-Steinhaus; Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit), **Korollar I.5.5**

Satz I.5.6 (von der offenen Abbildung), **Korollar I.5.7** (Satz vom inversen Operator**), Satz I.5.9** (vom abgeschlossenen Graphen), **Korollar I.5.10**

II. Kompakte Operatoren

1. Spektralwerte stetiger Operatoren in Banach-Räumen

Definition Spektrum, Punktspektrum, stetiges Spektrum, Restspektrum, Resolvente, reguläre Werte

Satz II.1.1: Die Resolventenmenge ist offen.

Satz II.1.2: wichtige grundlegende Eigenschaften des Spektrums

Satz II.1.4: Spektralradius; **Satz II.1.5**: Spezialfall eines normalen Operators

2. Kompakte Operatoren (auf Hilbert-Räumen)

Definition kompakter Operator, äquivalente Formulierung

Satz II.2.1, **Satz II.2.2**: Kompakte Operatoren bilden abgeschlossenen Unterraum, Idealeigenschaft

Beispiele: endlich-dimensionaler Fall, Operatoren von endlichem Rang, Integraloperatoren

Satz II.2.3 (von Arzela-Ascoli)

Satz II.2.4 (von Schauder): T kompakt g.d.w. T´ kompakt; **Satz II.2.6** (von Riesz): Eigenschaften von id – T, T kompakt; führt zur Definition Fredholm-Operator und Index eines Fredholm-Operators

3. Fredholm-Operatoren

Satz II.3.1 (Fredholm-Alternative); **Satz II.3.2**, **Satz II.3.3**: Der Index eines Opeators id – T, T kompakt, ist 0.

Anwendung ist **Satz II.3.4**: Charakterisierung des Spektrums eines kompakten Operators; wichtige Anwendung ist **Satz II.3.5**: Beschreibung des Spektrums eines normalen kompakten Operators

4. Anwendungen auf Integralgleichungen

III. Der Spektralsatz für beschränkte lineare Operatoren

1. Der stetige Funktionalkalkül

Satz III.1.2 (Spektralsatz Verson 1; stetiger Funktionalkalkül)

2. Spektralmaße

Satz III.2.1 (Spektralsatz Version 2; messbarer Funktionalkalkül)

Satz III.2.2: 1-1-Korrespondenz zwischen (beschränkten) hermiteschen Operatoren und Spektralmaßen mit kompaktem Träger

3. Realisierung als Multiplikationsoperator

Satz III.3.2: Jeder (beschränkte) hermitesche Operator auf einem separablen Hilbertraum kann als Multiplikationsoperator auf dem L^2-Raum eines endlichen Maßraumes dargestellt werden.