# Stochastische Prozesse

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Michael Schürmann

# Themenliste für die mündliche Prüfung

**I. Maßtheoretische Grundlagen**
*Grundkenntnisse werden benötigt, sind aber nicht direkt Gegenstand der mündlichen Prüfung*.

**II. Die Konstruktion von Daniell-Kolmogorov**

<u>1. Grundlegende Begriffe der Theorie der stochastischen Prozesse</u>

Definition stochastischer Prozess, Indexmenge; endlich-dimensionale Verteilungen, stochastische Äquivalenz

**Satz II.1.1**: Die endlich-dimensionalen Verteilungen bilden projektive Familie von W.maßen.

<u>2. Der Satz von Daniell-Kolmogorov</u>
<u>3. Folgerungen (Konstruktion von Lévy-Prozessen, Poisson-Prozess, Brownsche Bewegung)</u>

Produkträume, Faltung von W.maßen

**Satz II.2.2** (von Daniell-Kolmogrorov) und **Satz II.3.1**: Konstruktion eines stochastischen Prozesses aus einer projektiven Familie von W.maßen

Definition Lévy-Prozess; Zusammenhang mit Faltungshalbgruppen, besonders **Satz II.3.2** und **Satz II.3.3**

Beispiele Poisson- und Gauß-Faltungshalbgruppe

**III. Der Poisson-Prozess**

<u>1. Der Poisson-Prozess als Lévy-Prozess</u>

Eigenschaften der Pfade (monoton wachsend, rechtsseitig stetig, Sprünge der Höhe 1)

<u>2. Der Poisson-Prozess als Sprungprozess</u>

Konstruktion des Poisson-Prozesses aus einer Folge unabhängiger exponentialverteilter Zufallsvariablen (**Satz II.2.1**).

**IV. Die Brownsche Bewegung (Wiener-Prozess)**

<u>1. Die Brownsche Bewegung als Lévy-Prozess</u>

Stetige stochastische Prozesse, **Satz IV.1.1** (Stetigkeitssatz von Kolmogorov): Kriterium für Stetigkeit (der Pfade)

**Korollar IV.1.2**: Brownsche Bewegung erfüllt Kriterium.

2. Pfadweise Konstruktion der Brownschen Bewegung

**Satz IV.2.1**: Unabhängigkeit von Gaußsystemen von Zufallsvariablen

Konstruktion der Brownschen Bewegung auf dichter Teilmenge

**Satz IV.2.2**, **Satz IV.2.4** und **Satz IV.2.5**: Approximation der Brownschen Bewegung

**Satz IV.2.6**: Invarianzprinzip

3. Weitere Eigenschaften der Pfade einer Brownschen Bewegung

**Satz IV.3.1**: Pfade einer Brownschen Bewegung sind nirgends differenzierbar.

**Satz IV.3.2**: Berechnung der quadratischen Variation der Brownschen Bewegung

**Satz IV.3.4**: Pfade einer Brownschen Bewegung sind nicht von beschränkter Variation.

## V. Die Markov-Eigenschaft

1. Bedingte Erwartungen

Definition der bedingten Erwartung, insbesondere Existenz und Eindeutigkeit (**Satz V.1.2**)

**Satz V.1.3**: elementare Eigenschaften der bedingten Erwartung

2. Stoppzeiten

Definiton; elementare Eigenschaften (**Satz V.2.1**, **Satz V.2.2**); Beispiele (erste Eintrittszeit, „Aktienkurs“)

3. Markov-Halbgruppen

Definitionen Markov-Kern, Markov-Halbgruppe

Räumlich homogene Markov-Halbgruppen und Faltungshalbgruppen; Beispiele: endliche Markov-Ketten und Lévy-Prozesse

**Satz V.3.1**: Markov-Halbgruppen liefern projektive Familien von W.maßen.

4. Elementare, schwache und starke Markov-Eigenschaft

Elementare Markov-Eigenschaft; **Satz V.4.1**: Markov-Halbgruppe + Startwahrscheinlichkeit liefern Prozess mit elementarer Markov-Eigenschaft.

Markov-Prozesse, Markov-Eigenschaft; **Satz V.4.2**: Zusammenhang zwischen Markov-Halbgruppen und Markov-Prozessen

Brownsche Bewegung erfüllt starke Markov-Eigenschaft.

## VI. Martingale

### 1. Grundlegende Eigenschaften

Definition Martingal, Sub- und Supermartingal, vorhersagbare Prozesse; Beispiele: Summen und Produkte unabhängiger Zufallsvariablen, Petersburger Spiel

**Satz VI.1.1**: elementare Eigenschaften

Diskretes stochastische Integral

**Satz VI.1.2**: Charakterisierung von (diskreten) Martingalen durch diskrete stochastische Integrale

### 2. Diskrete Zeit: Doob-Zerlegung und quadratische Variation

**Satz VI.2.1**: Doobscher Zerlegungssatz im Diskreten

Quadratische Variation eines diskreten Martingals

### 3. Martingal-Konvergenzsätze (in diskreter Zeit)

**Satz VI.3.1**: allgemeiner Martingal-Konvergenzsatz, Doobsche Ungleichung

Problem der Konvergenz der Erwartungswerte (Pertersburger Spiel); gleichgradige Integierbarkeit und **Satz VI.3.2**