

Lösungen zum Arbeitsblatt 6

1.

$$\begin{array}{lcl} \text{(a)} & A \setminus B = \{1,4,5\} & \searrow \\ & B \setminus A = \{0,7,8\} & \nearrow \\ & & (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{0,1,4,5,7,8\} \end{array}$$

Alternativ:

$$\begin{array}{lcl} A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\} & & \\ A \cap B = \{2,3,6\} & \nearrow & (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{0,1,4,5,7,8\} \end{array}$$

(b) Die Idee ist es Teilmengenschaft nachzuweisen. Wir zeigen also:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B) \text{ und } (A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

„ $\subseteq$ “

Sei $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Die Teilmengen $A \setminus B$ und $B \setminus A$ sind nach Konstruktion disjunkt. Es gilt also $x \in A \vee x \in B$. Demnach ist $x \notin A \cap B$. Also $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

„ $\supseteq$ “

Sei $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Also $x \notin (A \cap B)$.
Demnach gilt $x \in A \vee x \in B$, also auch $x \in B \setminus A \vee A \setminus B$ und damit $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

(c) Hierbei handelt es sich um eine Fangfrage, da die disjunkte Vereinigung in diesem Zusammenhang die Disjunkte Vereinigung nicht als Mengenoperation definiert ist. Vielmehr sprechen wir von der disjunkten Vereinigung zweier Mengen, falls diese disjunkt sind und dann vereinigt werden. Die symmetrische Differenz hingegen ist eine Operation, welche wir auf zwei (nicht notwendiger Weise disjunkte [siehe a]) Mengen anwenden können. Das Ergebnis liefert allerdings eine Menge, welche wir nun in das Übrige von A und B wieder aufteilen können und diese Mengen sind wiederum disjunkt weshalb wir bei ihrer Vereinigung wieder von der disjunkten Vereinigung sprechen können.

2. Die Idee ist wieder wie in 1b. Ergebnisse ggf. per E-Mail zur Überprüfung.

3. Um nachzuweisen, dass eine Relation eine Äquivalenzrelation ist, müssen wir zeigen, dass die Relation die Axiome der *Reflexivität*, *Symmetrie* und *Transitivität* erfüllt.

Reflexivität: z. Z. $\forall x \in M: x \sim_R x$

Betrachte alle durch R gegebenen Tupel die aus zwei gleichen Elementen bestehen:

$(a, a); (b, b); (c, c); (d, d)$ damit stehen alle Elemente aus M zu sich selbst in Relation und es gilt die zu zeigende Eigenschaft.

Symmetrie: z. z. $\forall x, y \in M: x \sim_R y \Rightarrow y \sim_R x$

Das Tupel (a, a) erfüllt die Symmetrieeigenschaften. Außerdem gilt $a \sim_R b \Rightarrow b \sim_R a$ wegen (a, b) und (b, a) .

Das Tupel (b, b) erfüllt die Symmetrieeigenschaften. Es ex. keine weiteren Tupel bzgl. b . Dasselbe Argument gilt für c und d .

Das Tupel (e, e) erfüllt die Symmetrieeigenschaften und es ex. Gar keine weiteren e -Tupel.

Transitivität: z. z. $\forall x, y, z \in M: x \sim_R y \wedge y \sim_R z \Rightarrow x \sim_R z$

Diese Eigenschaft ist deshalb erfüllt, weil es keine Tupel gibt, die sie verletzen. Es ist also nicht zwingend notwendig, dass überhaupt Äquivalenzklassen ex. Die mehr als ein Element enthalten. Wegen $A \vee \neg A$ ist die Eigenschaft also erfüllt.

□

4.

5. Diese Aufgabe ist sehr abstrakt und arbeitet mit allen bisher gelernten Mitteln. Die erste Überlegung ist: Was ist eine Bijektion? Eine Bijektion scheint eine bijektive Abbildung zu sein. Wir suchen also eine Abbildung, die sowohl surjektiv als auch injektiv ist. Insbesondere also eine, welche eine Umkehrabbildung besitzt. Wie zeigen wir also, dass die konstruierte Abbildung h eine Bijektion ist? Indem wir ihre Umkehrabbildung g angeben und zeigen, dass $h \circ g = id$ gilt. Die Abbildung h ist eine Abbildung von $\mathcal{P}(M) \rightarrow 2^M$. Wie sehen die Elemente aus $\mathcal{P}(M)$ aus? $A \in \mathcal{P}(M)$ sind $A \subseteq M$. Damit sind $h(A) \in 2^M$, also sind $h(A)$ wieder Abbildungen. Auf welche Abbildung soll A abgebildet werden, damit es zu jedem A genau ein $f \in 2^M$ gibt? f muss alle Elemente aus M auf $\{0,1\}$ abbilden. Konstruieren wir also h wie folgt: Sei $h: \mathcal{P}(M) \rightarrow 2^M: A \mapsto f$ mit $f_A: M \rightarrow \{0,1\}: f_A(m) = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \in A \\ 0 & \text{falls } m \notin A \end{cases}$. Diese Abbildung leicht erkennbar injektiv, denn zwei Funktionen f_1 und f_2 sind offenbar nur dann gleich, wenn sie zum gleichen A gehören. Also $h(A_1) = h(A_2) \Rightarrow f_{A_1}(m) = f_{A_2}(m) \Rightarrow A_1 = A_2$. Nun konstruieren wir eine Umkehrabbildung und zeigen somit, dass die Funktion auch surjektiv ist. Die Umkehrabbildung muss so konstruiert sein, dass $(h \circ g)(A) = A$ gilt, damit $h \circ g = id$ erfüllt ist. $g: 2^M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ muss also folgende Bedingung erfüllen: $g(f_A) = A$. In der Konstruktion von h sehen wir, dass f_A alle Elemente $m \in A$ auf 1 abbildet. Um also durch g die Menge A zu setzen wir: $g(f_A) := \{m \in M \mid f_A(m) = 1\}$. Dann ist $(h \circ g)(A) = g(h(A)) = g(f_A) = \{m \in M \mid f_A(m) = 1\} = \{m \in M \mid m \in A\} = A$. h ist also bijektiv.

□

Wenn wir nun $k: M \rightarrow \mathcal{P}(M): a \mapsto \{a\}$ betrachten, dann sehen wir, dass diese Funktion offensichtlich injektiv ist. Sie kann aber nicht surjektiv sein, denn Sei k beliebig, dann ist $A = \{a \in M \mid a \in k(a)\} \notin \text{Bild}(k)$.

□