Abbildungen der Ebene. Sei d diejenige Drehung der Ebene um den Ursprung, die $(2,3)$ auf $(-2,3)$ abbildet; sei v die Verschiebung um $(-1,-7)$; und schließlich sei s die Spiegelung an der Verbindungsgeraden von $(4,1)$ und $(6,4)$. Außerdem betrachten wir das Dreieck mit den Ecken $C=(3,11), D=(10,2)$ und $E=(5,14)$.

a) Beschreiben Sie verschiedene Möglichkeiten des Schulunterrichts, den Drehwinkel von d zu bestimmen.

b) Bestimmen Sie für d, s und $s\circ v\circ d$ jeweils eine Darstellung der Abbildungsvorschrift mithilfe von Matrizen.

c) Es geht nun darum, die Bildpunkte von C, D und E unter den Abbildungen d, $v\circ d$ und $s\circ v\circ d$ auf zweierlei Weise zu bestimmen, und zwar...

- ... einerseits konstruktiv, entweder zeichnerisch auf Papier oder mithilfe von *Geogebra* bzw. ähnlicher Software. Falls Sie sich für das Zeichnen auf Papier entscheiden, bedenken Sie, dass Sie viel Platz benötigen: Auf der x-Achse von -12 bis 14; auf der y-Achse von -13 bis 14.
- ... andererseits mithilfe der Matrizendarstellungen aus b).

d) Das Ziel sind jetzt verschiedene Beschreibungen der Hintereinanderausführung $s\circ v\circ d$; beschaffen Sie sich (zusätzlich zu der Beschreibung aus b) zunächst mindestens eine weitere Beschreibung mithilfe von Matrizen; dann mindestens zwei verschiedene mittelstufentaugliche konstruktive Beschreibungen als Hintereinanderausführung von jeweils nur *zwei* Kongruenzabbildungen.

e) Was ist der didaktische Wert der Betrachtung von Hintereinanderausführungen von Kongruenzabbildungen?

f) Zeigen Sie nun mithilfe von Linearer Algebra: Sind a und k zwei ganze Zahlen und definieren wir $b := 8a+13k$, so wird (a,b) durch d wiederum auf einen Gitterpunkt (also mit ganzzahligen Koordinaten) abgebildet.

g) Welche Gitterpunkte werden durch s auf Gitterpunkte abgebildet? Bearbeiten Sie diese Aufgabe sowohl mit Hochschul- als auch mit Schulmethoden. Für die Schule kommt zum Beispiel systematisches Probieren in Betracht.

h) Der einzige Nicht-Gitterpunkt, der bei der Aufgabe c) auftritt, ist das Bild von C unter $s\circ v\circ d$. Es wäre schön, wenn dies einfach zu „reparieren“ wäre. Schreiben Sie daher einen einfachen, schultauglichen Algorithmus, der nach Gitterpunkten X sucht, für die die Bildpunkte unter d, $v\circ d$ und $s\circ v\circ d$ allesamt Gitterpunkte sind. Wenn möglich, implementieren Sie diesen Algorithmus in einer Progammiersprache (oder in *Geogebra*) und wenden Sie ihn an. Bewerten Sie die Ergebnisse im Hinblick auf ihre praktische Unterrichtstauglichkeit.

Algebraische Beschreibungen von Drehungen. Lesen Sie den ersten Teil des Artikels *Rotation Matrices in the Plane without Trigonometry* (bis Seite 73 oben). Reflektieren Sie den didaktischen Wert dieses Artikels und überlegen Sie, ob in der Schule eine algebraische Beschreibung von Drehungen der Ebene möglich ist.

Anwendung der Orthogonalprojektion. Finden Sie mithilfe einer Orthogonalprojektion $a,b,c\in\mathbb{R}$ derart, dass die Funktion $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto ax^2+bx+c$ möglichst gut zu den Punkten $(-1,2)$, $(0,-3)$, $(1,-3)$, $(2,-2)$ und $(3,-1)$ passt (im Sinne einer minimalen Summe der quadrierten Abweichungen in $y-$Richtung). Überprüfen Sie das Ergebnis unter Verwendung von *Geogebra* oder anderer geeigneter Software.